Übungsblatt 9

Abzugeben bis: Freitag 24.06.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

Letztes Blatt für B.Ed.!

Aufgabe 9.1: Elementares zu Vektoren

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

i) Sind die drei Vektoren voneinander abhängig? *(2 Punkte)*

ii) Geben Sie einen Vektor $\vec{d}$ an der komplanar (linear abhängig) zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. *(2 Punkte)*

iii) Berechnen Sie $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 9.2: Skalarprodukt, Betrag und Winkel

Es seien die Vektoren aus (9.1) gegeben.

i) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{c} \cdot \vec{b}$. *(2 Punkte)*

ii) Bestimmen Sie die Beträge aller Vektoren. *(1,5 Punkte)*

iii) Welcher Winkel wird von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen? *(1 Punkt)*

Aufgabe 9.3: Kreuzprodukt

Es seien die Vektoren aus (9.1) gegeben.

i) Bestimmen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$. *(2 Punkte)*

ii) Wie groß ist die Maßzahl $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ und was sagt diese aus? *(2 Punkte)*

iii) Bestimmen Sie mittels Kreuzprodukt noch einmal den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. *(1 Punkt)*

Aufgabe 9.4: Beweise mit Vektoren

I) Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ schließen mit den Achsen des Koordinatensystems und somit mit den Vektoren $\widehat{e}_1 = (1,0,0)$, $\widehat{e}_2 = (0,1,0)$ und $\widehat{e}_3 = (0,0,1)$, der sogenannten Standartbasis des $\mathbb{R}^3$, die Winkel α_1 , α_2 und α_3 ein. Zeigen Sie, dass $\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1$ gilt. *(2,5 Punkte)*

ii) Sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ mit $n > 1$. Zeigen Sie: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Welche bekannte geometrische Aussage verbirgt sich dahinter? *(2 Punkte)*

BONUSAufgabe 9.5: Orthogonale Vektoren

Vektoren heißen bekanntlich orthogonal wenn das Skalarprodukt von beiden 0 wird ohne, dass einer der beiden Vektoren der Nullvektor $\vec{0}$ ist. Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{x}$ derart, dass dieser Vektor orthogonal zu den drei anderen steht. *(4 Punkte)*

B.Ed.-Aufgabe 9.6: Kronecker-Delta und Levi-Civita-Symbol

Wir definieren das Kronecker-Delta $\delta_{ij} := \widehat{e}_i \cdot \widehat{e}_j$ und das Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{ijk} := \widehat{e}_i \cdot (\widehat{e}_j \times \widehat{e}_k)$ mittels der Standarbasis des $\mathbb{R}^3$. Wobei $\widehat{e}_i$ der Einheitsvektor mit einer 1 in der i-ten Komponente ist, z.B.: $\widehat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i) Welche Werte kann das Kronecker-Delta annehmen? *(1 Punkt)*

ii) Wie kann man das Kronecker-Delta geometrisch interpretieren? *(1 Punkt)*

iii) Welche Werte kann das Levi-Civita-Symbol annehmen? *(1 Punkt)*

iv) Wie kann man das Levi-Civita-Symbol geometrisch interpretieren? *(1 Punkt)*

v) Wie viele Möglichkeiten der Anordnung besitzt das Levi-Civita-Symbol? *(1 Punkt)*