Übungsblatt 2

Abzugeben bis: Dienstag 30.10.2018 - 16.00 Uhr

Aufgabe 1

Differenzieren
Zeigen Sie, dass für $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $f'(s) = ns^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$. (Hinweis: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$) *(2 Punkte)*

Aufgabe 2

Die Differenzierbarkeit und Stetigkeit einer Funktionen
Gegeben sei die Funktion $f_a = \begin{cases} x^a & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

i) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f stetig in $x = 0$? *(2 Punkte)*

ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar in $x = 0$? In diesem Fall, ist die Ableitung in $x = 0$ stetig? (Hinweis: Für $x > 0$, $f_a'(x) = ax^{a-1}$) *(3 Punkte)*

Aufgabe 3

Funktionen und Tangenten

i) Es sei $f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 3x + 1$ gegeben. Finden Sie alle Punkte, bei denen die Tangente Null ist. In welchen Bereichen von x ist die Tangente negativ oder positiv? *(3 Punkte)*

ii) Finden Sie die Gleichung der Tangentenlinie und der Normallinie zur Kurve $y = \sqrt{x^2 + 25}$ im Punkt $y = 7$. Berechen Sie allgemein die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Für welche x_0 ist die Tangente senkrecht zur ersten und zur zweiten Winkelhalbierenden? *(3 Punkte)*

Aufgabe 4

Die Regel von de l'Hôpital
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital.

i) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$ *(2 Punkte)*

ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha x}$; $\alpha \in \mathbb{N}$ *(2 Punkte)*

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - cos(x)}{\sin^2(x)}$ *(2 Punkte)*

Aufgabe 5

Taylorpolynome
Berechnen Sie die Taylorpolynome der folgenden Funktionen um den angegebenen Punkt x_0 bis zur Ordnung n.

i) $f(x) = x^4, \quad x_0 = -3, \quad n = 4$ *(2 Punkte)*

ii) $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad n = 6$ *(2 Punkte)*

iii) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad n = 4$ *(2 Punkte)*

BONUS Aufgabe

Eigenschaften von Funktionen und Ungleichungen

i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = (x^2 + 1)\log(x)$ streng monoton steigend ist. *(2 Punkte)*

ii) Zeigen Sie, dass $\forall x \in \mathbb{R} > 0$, $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ *(1 Punkte)*