Übungsblatt 4

Abzugeben bis: Freitag 09.11.2018 - 16.00 Uhr

Aufgabe 1

Grenzwerte mit Taylor-Entwicklung

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x^3}{x^2 - x}$ *(3 Punkte)*

b. $\lim_{x\to 0} \frac{-x^3 - x\log(1+x)}{xe^{x/\pi} - \sin x}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 2

Partielle Ableitungen
Bei der Funktion $f(x,y,z) = \log(1+xyz)$

a. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ für alle $\alpha \in \{x,y,z\}$. *(3 Punkte)*

b. Berechnen Sie die partielle Ableitung zweiter Ordnung $f_{\alpha\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \{x,y,z\}$. *(4 Punkte)*

c. Berechnen Sie f_{xxzy}. *(2 Punkte)*

d. Schreiben Sie das totales Differential df. *(1 Punkte)*

Aufgabe 3

Partielle Ableitungen 2
Zeigen Sie, dass fÃ$\frac{1}{4}$r jede der folgenden Gleichungen die angegebenen Funktionen Lösungen sind.

a. 1-dimensionale Wellengleichung: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ wobei c eine geeignete Konstante ist. *(3 Punkte)*

i) $f(x,t) = x^2 + 3t^2$

ii) $f(x,t) = \sin kx \cos kqt$

c. 2-dimensionale Laplace-Gleichung: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ *(3 Punkte)*

i) $f(x,t) = e^{x^2-y^2} \sin 2xy$

ii) $f(x,t) = \log(x^2+y^2)$

c. 1-dimensionale Wärmegleichung: $\frac{\partial f}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *(3 Punkte)*

i) $f(x,t) = e^{-4\omega^2 t} \sin \omega x$

ii) $f(x,t) = e^{-\omega^2 c^2 t} \cos \omega x$

Aufgabe 4

Satz von Schwarz

a. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{ax^2+by^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ziegen Sie dass $f_{xy} \neq f_{yx}$. Warum funktioniert der Schwarz-Satz hier nicht? *(2 Punkte)*

b. Zeigen Sie, dass, wenn eine Funktion $g(x, y)$ das Schwarz-Satz erfüllt, dann $g_{xyy} = g_{yxy} = g_{yyx}$ auch. *(2 Punkte)*

BONUS Aufgabe

Die Gasgleichung
Die ideale Gasgleichung $pV = RT$ beschreibt, wie in idealen Gasen die Größen Druck (p), Temperatur (T) und Volumen (V) miteinander verknüpft sind. R ist die Gaskonstante. Mit Hilfe der idealen Gasgleichung kann jede Variable V; p; T als Funktion der beiden anderen dargestellt werden, z.B. $V(p, T) = \frac{RT}{p}$. Zeigen Sie: $\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = -1$ *(3 Punkte)*