

Übungsblatt 5

Abzugeben bis: Freitag 16.11.2018 - 16.00 Uhr

Aufgabe 1

Stammfunktionen 1

a. Berechnen Sie $\int f(x)^n f'(x) dx$ (2 Punkte)

b. Berechnen Sie $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ (2 Punkte)

c. Bewerten Sie für jede Funktion in der Tabelle die Stammfunktion und vervollständigen Sie die Tabelle. (2 Punkte)

Funktion	Stammfunktion
a	
x^n	
$\sin x$	
$\cos x$	
$\sec x \tan x$	
$\sec^2 x$	
e^x	
a^x	
x^{-1}	
$(x^2 + 1)^{-1}$	

Aufgabe 2

Stammfunktionen 2

Sie können bei Bedarf die Tabellenzusammenfassung verwenden, die Sie in Aufgabe 1 c. gemacht haben.

a. Finden Sie f so, dass $f'(x) = e^{x/2} + a(1 + x^2)^{-1}$ und $f(0) = 2$. (1 Punkt)

b. Finden Sie alle Funktionen g so, dass $g'(x) = 6 \sin x + \frac{x^5 - 2\sqrt{x}}{x}$. (1 Punkt)

c. Finden Sie f so dass $f''(x) = 4x^2 + 8x - 3$ und $f'(0) = f(0) = 0$. (1 Punkt)

Aufgabe 3

Stammfunktionen 3

Sie können Ihre Ergebnisse in Aufgabe 1 a. und Aufgabe 1 b. verwenden.

Berechnen Sie

a. $\int \sec^4 x \tan x dx$ (1 Punkt)

b. $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 5} dx$ (1 Punkt)

c. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$ (1 Punkt)

d. $\int \frac{\log x}{x} dx$ (1 Punkt)

e. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$ (1 Punkt)

f. $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ (1 Punkt)

g. $\int \frac{1}{x \log x} dx$ (1 Punkt)

BONUS Aufgabe: Integration mit Substitutionregel

a. Der log und das Integral

Benutzen Sie

$$\log y = \int_1^y \frac{1}{x} dx$$

um die Gültigkeit der Rechenregel

$$\log ab = \log a + \log b$$

zu zeigen.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = \frac{x}{a}$ (2 Punkte)

b. Das Basler Problem

Man kann zeigen, dass

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\cos^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Lösen Sie nun das Integral um den Wert der Reihe zu erhalten.

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $x = \sin \theta$ bzw. $x = \cos \theta$. (2 Punkte)