Übungsblatt 6

Abzugeben bis: Freitag 23.11.2018 - 16.00 Uhr

Aufgabe 1

Zweidimensionale Integrale
Integrieren Sie die Funktion $f(x,y)$ auf dem Gebiet G und skizzieren sie für 1 b. und 1 a.

a. $f(x,y) = y\sqrt{1-x^2}$, $G = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$ *(3 Punkte)*

b. $f(x,y) = xy$, $G = \left\{(x,y) : x >= 0, y >= 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\right\}$ *(3 Punkte)*

c. $f(x) = e^{-x^2}$, $G = (-\infty, \infty)$. *(4 Punkte)*
Hinweis: *Sei* $I = \int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$*, berechnen Sie zunächst* $I^2 = \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *mit Hilfe von Polarkoordinaten.*

Aufgabe 2

Integrationsreihenfolge bei unstetigen Funktionen
Gegeben sei die im Bereich $B : 0 < x \leq 2,\ 0 < y \leq 1$ unstetige Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 - y^2\right)^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass man in diesem Fall die Integrationsreihenfolge nicht vertrauschen darf. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3

Koordinaten des Massenschwerpunkts
Die Masse einer Schichte im Bereich G ist definiert als

$$m = \iint_G \rho(x,y)\,\mathrm{d}A$$

wo $\rho(x,y)$ die Massendichte an einem Punkt (x,y). Das statische Moment der Schichte über die x-Achse, M_x ist definiert als

$$M_x = \iint_G y\rho(x,y)\,\mathrm{d}A$$

und über die y-Achse, M_y is definiert als

$$M_y = \iint_G x\rho(x,y)\,\mathrm{d}A$$

. Die Koordinaten des Massenschwerpunktes einer Schichte wird dann definiert als

$$\vec{r} = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt der Massenkoordinaten für eine Schichtebene in der Region G : $\{y \geq x^2,\ y \leq \sqrt{x}\}$ mit gleichmäßiger Massendichte $\rho(x,y) = 1$. *(6 Punkte)*

BONUS Aufgabe: Laden auf eine elektrische Scheibe

Die elektrische Ladung wird auf einer kreisförmigen Scheibe $x^2 + y^2 = 1$ so verteilt, dass die Ladungsdichte beträgt $\sigma(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Verwenden Sie die Idee in Aufgabe 3, um die Masse aus der Massendichte zu berechnen, und berechnen Sie die Ladung der Scheibe.

Tipp:*Sie können die Hilfe von Polarkoordinaten verwenden, um das Integral auszuführen* *(5 Punkte)*