Übungsblatt 11

Abzugeben bis: Freitag 18.01.2018 - 16.00 Uhr

Aufgabe 1

Levi-Civita Tensor
Mit Hilfe der Einstein-Summenkonvention (d.h. ein wiederholter Dummy-Index bedeutet, dass der Begriff über seinen Bereich summiert werden soll. $A_k B_k = \sum_i A_i B_i = \sum_j A_j B_j$) und mit folgender Identität

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{nlm} = \det \begin{pmatrix} \delta_{in} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jn} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kn} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{pmatrix}$$

zeigen dass

a. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \det \begin{pmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{pmatrix}$. *(2.5 Punkte)*

b. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$ *(2 Punkte)*

c. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$ *(1.5 Punkte)*

Aufgabe 2

Spatprodukt

a. Bei zwei Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, ein Kreuzprodukt von einem zum anderen kann als

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \epsilon_{ijk} v_j w_k \hat{\mathbf{e}}_i$$

geschrieben werden, während ihr Skalar Produkt ist

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_i w_i$$

. Durch die Verwendung der Identitäten in Aufgabe 1 und $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$, zeigen dass

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Lineare Gleichungen
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

a.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= 7, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 17. \end{aligned}$$

(3 Punkte)

b.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4

Determinante
Verwenden Sie in dieser Übung die folgenden Eigenschaften der Determinanten.

I. Die Determinante ist Null, wenn zwei Spalten (oder Zeilen) gleich sind.
II. Wenn in einer Matrix eine Zeile oder eine Spalte mit einer Konstanten multipliziert wird, erhält man ihre Determinante durch Multiplikation der orininalen Determinante mit der Konstanten.
III. Die Determinante ändert sich nicht, wenn ein Vielfaches einer Spalte (oder Zeile) zu einer anderen Spalte (oder Zeile) hinzugefügt wird.

a.

$$\begin{vmatrix} 1 & r & st \\ 1 & s & rt \\ 1 & t & rs \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r & r^2 \\ 1 & s & s^2 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix}$$

(3 Punkte)

b. Finden Sie die Determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \\ r_1 & 1+r_2 & r_3 & \cdots & r_n \\ r_1 & r_2 & 1+r_3 & \cdots & r_n \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & 1+r_n \end{vmatrix}$$

(3 Punkte)

BONUS Aufgabe

Verwenden Sie eine Determinante, um den Kreis zu finden, der durch (2,6), (6,4), (7,1) geht.

Hinweis: Verwenden Sie den allgemeinen Formel eines Kreises $r(x^2 + y^2) + sx + ty + u = 0$ *(3 Punkte)*