Übungsblatt 13

Abzugeben bis: Freitag 01.02.2018 - 16.00 Uhr

Aufgabe 1

Divergenz
Zeigen Sie, dass

a. $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ *(1 Punkt)*

b. $\nabla \cdot (\mathbf{r} f(r)) = 3f(r) + r\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 2

Divergenzsatz (Satz von Gauß)
Ein Beispiel für den Gauß-Satz wurde in Blatt 07 (Aufgabe 3) gegeben. In Vektorform könnte man das Theorem als

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, \mathrm{d}V = \oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}a \tag{1}$$

schreiben, wo $\mathbf{n}$ das Normale an der Oberfläche ist, durch die der Fluss von $\mathbf{A}$ zu finden ist. Für eine Oberfläche durch φ definiert, ist

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}.$$

Prüfen Sie den Divergenztheorem, indem Sie beide Seiten von Gleichung 1 mit $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ über einem Zylinder, beschrieben durch $\{\varphi(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4; 0 \leq z \leq 4\}$ bewerten. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3

Rotation
Geben ein Ortvektor $\mathbf{r}$, zeigen Sie dass

a. $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. *(1 Punkt)*

b. $\nabla \times (\mathbf{r} f(r)) = \mathbf{0}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 4

Weitere Anwendungen von Divergenz und Rotation

a. Schreiben Sie die vollständige Form des Laplacianers aus $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ and berechen Sie $\nabla^2(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$ wo $\mathbf{r}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ und $\mathbf{r}_2 = z^2\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ *(2 Punkt)*

b. Zeigen Sie, durch direkte Expansion, dass $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, wenn $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ und $\mathbf{B}$ ein konstanter Vektor ist. *(2 Punkte)*

c. Wenn

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H},}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

zeigen Sie dass

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

und

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

(4 Punkte)