Übungsblatt 3

Abzugeben bis: Freitag 10.05.2019 - 16.00 Uhr

Aufgabe 1

Lineare Unabhängigkeit von reelle Funktionen
Für 2 reelle Funktionen f(x) und g(x) auf einem Intervall I ist die Wronski-Determinante definiert durch:

$$W(f(x),g(x)) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

Gilt W(f(x),g(x)) $\neq 0$ in I, so sind die Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall I linear unabhängig. Zeigen Sie an, ob die folgenden Funktionen im angegebenen Intervall linear unabhängig sind.

i) $\log x$, $\log x^2$, $x > 0$ *(1 Punkt)*

ii) e^{ax}, e^{-ax}, $x \in \mathbb{R}$ *(1 Punkt)*

iii) $\cos x$, $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 2

Homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y=0$. Finden Sie auch die spezielle Lösung, gegeben $x=0$, $y=4$ and $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=9$ *(3 Punkte)*

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $9\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-24\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+16y=0$ und die spezielle Lösung mit Randbedingungen $t=0$, $y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3$ *(3 Punkte)*

iii) Lösen Sie die DGL $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+13y=0$, mit $x=0$, $y=3$ and $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=7$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 3

Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten (2)
Betrachten Sie die Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

a. Zeigen Sie, dass die Substitution $u(x,y)=e^{x/\alpha}f(\xi)$, wobei $\xi=\beta x-\alpha y$, und α und β positive Konstanten sind, Gleichung 1 auf die folgende Differentialgleichung reduziert

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\xi^2}+2p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}+\frac{q}{\alpha^2}f=0 \tag{2}$$

wo

$$p=\frac{\beta}{\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)} \text{ and } q=\frac{1}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)} \tag{3}$$

Hint: *Verwenden Sie die Kettenregel* $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}$ *(3 Punkte)*

b. Lösen Sie die Gleichung 2 und finden Sie daher die entsprechende Lösung für die Gleichung 1.

***Hint**: Bei der Lösung von Gleichung 2 müssen Sie Gleichung 3 verwenden, um eine einfache Form der Lösung zu erhalten.* *(3 Punkte)*