Übungsblatt 9

Abzugeben bis: Freitag 05.07.2019 - 16.00 Uhr

Aufgabe 1

Eigenschaften der Deltafunktion
Die Dirac'sche Deltafunktion, $\delta(x)$, hat die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = F(x_0).$$

Zeigen Sie, dass

i) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$; $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ *(2 Punkte)*

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-x_0)\right)\,\mathrm{d}x = F'(x_0)$. *(2 Punkte)*

iii) $\delta((x-a)(x-b)) = \frac{1}{|a-b|}(\delta(x-a)+\delta(x-b))$ für $a \neq b$. *(2 Punkte)*

iv) Aufgabe 1 iii) ist ein Spezialfall von $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ wobei x_i einfache Nullstellen von f sind, also $f(x_i) = 0$, $f'(x_i) \neq 0$ *(2 Punkte)*

Aufgabe 2

Integration mit Deltafunktionen

i) Beweise, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

(2 Punkte)

ii) Zeigen Sie mit der Annahme $f(x) = xg(x)$ in Aufgabe 2 i), dass $x\delta'(x) = -\delta(x)$ *(2 Punkte)*

Aufgabe 3

Anwendungen der Deltafunktion
Wir gehen von einem eindimensionalen, unendlichen, ionischen Kristall in kartesischen Koordinaten aus, in dem die Ladungen auf der z-Achse lokalisiert sind.

i) Geben Sie die dreidimensionale Ladungsverteilung ρ_q unter Verwendung von Deltafunktionen an, wobei die Ladungen auf einem eindimensionalen Gitter entlang der z-Achse mit Gitterparameter a platziert sind und jede Ladung den Wert q sowie entgegengesetztes Vorzeichen zu seinen nächsten Nachbarn hat. *(2 Punkte)*

ii) Die x-Komponente des elektrischen Feldes in einem Gebiet Ω ist gegeben durch

$$E_x(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_\Omega \frac{\rho_q(x',y',z')}{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{3/2}}$$

Zeigen Sie unter Verwendung von ρ_q aus Aufgabe 3 i) und der Eigenschaft, dass an einem Punkt P gilt

$$\iint_\Omega f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{wenn } P \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dass $E_x(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=\infty}^{\infty}(-1)^k \frac{x}{(x^2+(z-ka)^2)^{3/2}}$ *(4 Punkte)*