

Beispielaufgaben zum Thema **Vektoren**

**Aufgabe 1.1** Es sei ein Dreieck  $\Delta$  mit Ecken  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$  und  $(3, 0)$  gegeben.

- Berechnen Sie die Seitenlängen und Cosinus der drei Winkel.
- Geben Sie die Koordinaten der Seitenmitten an.
- Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Geradengleichung für jede der drei *Seitenhalbierenden* (Gerade durch eine Ecke und die Mitte der gegenüberliegenden Seite).
- Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Geradengleichung für jede der drei *Höhengeraden*. (Unter Höhengerade ist die Gerade durch eine Ecke gemeint, die orthogonal zu der gegenüberliegenden Seite ist.)

**Aufgabe 1.2** Es seien die folgenden Geraden durch Geradengleichungen gegeben. Geben Sie für jede dieser Geraden eine Parameterdarstellung an.

(*Hinweis:* Finden Sie jeweils zuerst zwei Punkte auf der Geraden!)

- $y = x$ ,
- $y = x + 1$ ,
- $y = 2x - 2$ ,
- $x = 1$ ,
- $y = 0$ ,
- $3x - 2y = 1$ ,

**Aufgabe 1.3** Es sei jeweils ein Paar der Geraden gegeben. Testen Sie, ob die Geraden parallel sind. Falls nein, können Sie den Schnittpunkt der Geraden bestimmen?

- $(1, 0) + \lambda(0, 1)$  und  $(1, 1) + \mu(0, -1)$ ,
- $(2, 1) + \lambda(0, 1)$  und  $(1, 2) + \mu(1, -1)$ ,
- $(2, -2) + \lambda(1, 1)$  und  $x = 0$ ,
- $(1, 1) + \lambda(1, 2)$  und  $x - 2y = 1$ ,
- $x + y = 1$  und  $2x - y = 2$ .

**Aufgabe 1.4** Flugzeug Alpha fliegt gradlinig durch die beiden Punkte  $A = (-8, 3, 2)$  und  $B = (-4, -1, 4)$ . Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 km. Der Flughafen  $F$  befindet sich in der  $x$ - $y$ -Ebene.

- In welchem Punkt  $F$  ist das Flugzeug gestartet? In welchem Punkt  $T$  erreicht es seine Reiseflughöhe von 10.000m?
- Flugzeug Beta steuert vom Punkt  $C = (10, -10, 5)$  in Richtung  $v = (-2, 2, -1)$  an. Zeigen Sie, dass die beiden Flugzeuge keinesfalls kollidieren können.
- In dem Moment, an dem Flugzeug Alpha den Punkt  $B$  passiert, erreicht Flugzeug Beta den Punkt  $C$ . Wie groß ist die Entfernung der Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt?

**Aufgabe 1.5** Es sei ein Dreieck  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  mit Ecken

$$(0, 0, 0), \quad \frac{1+\sqrt{3}}{3}(1, 2, 2) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

gegeben.

- a) Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks  $\Delta$ .
- b) Berechnen Sie die (Cosinus der) Eckwinkel von  $\Delta$ . Ist  $\Delta$  rechtwinklig?  
Wie kann man ohne Berechnung der Eckwinkel entscheiden, ob das Dreieck rechtwinklig ist?

**Aufgabe 1.6** Geraden im Raum.

- a) Es seien in  $\mathbb{R}^3$  drei Punkte gegeben:  $A = (1, -2, 1)$ ,  $B = (2, -1, 2)$  und  $C = (-1, -4, -1)$ . Zeigen Sie, dass die Punkte  $A, B, C$  kollinear sind, d.h. dass alle drei auf einer Geraden liegen.
- b) Es sei  $G_1$  die Gerade aus Teil a) und  $G_2$  die Gerade mit Parameterdarstellung  $(3, 0, -3) + \mu(0, 0, 1)$ . Sind  $G_1$  und  $G_2$  parallel? Falls nein, können Sie auch entscheiden, ob sie windschief sind oder sich schneiden?

**Aufgabe 1.7** Es seien vier Punkte in  $\mathbb{R}^3$  gegeben:

$$A = (3, 1, 2), \quad B = (6, 2, 2) \quad C = (5, 9, 4) \quad \text{und} \quad D = (1, 4, 3).$$

- a) Was ist die längste Seite des Vierecks  $ABCD$ ?
- b) Hat das Viereck  $ABCD$  einen rechten Winkel?
- c\*) Ist das Viereck  $ABCD$  eben (flach)?  
(*Hinweis:* In einem ebenen Viereck schneiden sich die Diagonalen.)