Hinweise zu den Beispielaufgaben zum Thema **Vektorräume**

Aufgabe 3.1 Endliche Körper

a) Konstruieren Sie die Verknüpfungstafeln für die Körper $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_5$.

b) Es sei $K = \{0, 1, a, b\}$. Wie sollen die Veknüpfungstafeln für K aussehen, damit es zu einem Körper wird? (*Hinweis:* Denken Sie an Sudoku.)

Hinweise.

b)

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

□

Aufgabe 3.2 Es seien ein K-Vektorraum V und eine Teilmenenge U von V gegeben. Zeigen Sie, dass U kein Unterraum von V ist.

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{\,(x, y) \mid y = 2x + 1\}$,

b) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{\,(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$,

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{\,(x, y, z) \mid x + 2y + 3z - 4 = 0\}$,

d) $V = \mathbb{Q}^3$, $U = \{\,(x, y, z) \mid (x + y)z$ ist eine ganze Zahl$\}$,

e) $\cancel{V = \mathbb{Q}^3, U = \{\,(a, \frac{b}{2} + \frac{1}{3}, a + \frac{b}{2} - \frac{c}{3}) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\},}$

f) $V = \mathbb{F}_2^3$, $U = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,0,1), (1,0,1), (0,1,0), (1,1,0)\}$,

g) $V = \mathbb{F}_5^3$, $U = \{\,(k_1, k_2, k_3) \mid k_1 + 2k_2 + k_3 \neq 4\}$,

h) $V = \mathbb{F}_3^4$, $U = \{\,(k_1, k_2, k_3, k_4) \mid$ unter k_i gibt es maximal zwei Einsen$\}$,

i) $V = \mathbb{F}_p^5$, p Primzahl, $U = \{\,(k_1, \ldots, k_5) \mid$ mindestens zwei Koordinaten sind Null$\}$,

j) $V = C(-1, 1) = \{\, f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f$ ist stetig$\}$, $U = \{\, f \mid f(0) \neq 0\}$,

k) $V = C(-1, 1)$, $U = \{\, f \mid f(0) \leq |f(-1) + f(1)|\}$.

Hinweise. Wird es keine geben: es ist wichtig, selbst zu probieren! □

Aufgabe 3.3 Es seien ein K-Vektorraum V und ein Unterraum U von V gegeben. Finden Sie jeweils eine Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset U$ mit $U = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Ist Ihre Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset U$ die kleinstmögliche solche Menge (d.h. eine Basis von U)?

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{\, (x, y) \mid y = 2x\}$,

b) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{\, (x, y, y - x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$,

c) $V = \mathbb{Q}^3$, $U = \{\, (x, y, z) \mid 2x + 4y - 3z = 0\}$,

d) $V = \mathbb{Q}^4$, $U = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_4 = x_3 - x_2 = 0\}$,

e) $V = \mathbb{Q}^3$, $U = \big\langle (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (1, 2, 3), (0, 1, 1) \big\rangle$,

f) $V = \mathbb{F}_2^3$, $U = \big\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\big\}$,

g) $V = \mathbb{F}_5^3$, $U = \{\, (k_1, k_2, k_3) \mid k_3 = 3k_1 + 4k_2\}$,

h) $V = \mathbb{F}_3^3$, $U = \{\, (2a + 2b + c, b + 2c, a + b + 2c) \mid a, b, c \in \mathbb{F}_3\}$,

i) $V = \mathbb{F}_2^5$, $U = \{\, (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \mid \text{unter } k_i \text{ gibt es ungerade Anzahl von Nullen}\}$,

j) **I**nternational **S**tandard **B**ook **N**umbers (ISBN-10):
$V = \mathbb{F}_{11}^{10}$, $U = \left\{ (k_1, \ldots, k_{10}) \mid \sum_{i=1}^{10} i k_i = 0 \right\}$.

Hinweise. Wir geben hier jeweils eine Basis B an.

a) $B = \{(1, 2)\}$,

b) $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$,

c) $B = \big\{(1, 0, \frac{2}{3}), (0, 1, \frac{4}{3})\big\}$,

d) $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0)\}$,

e) $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$,

f) $B = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$,

g) $B = \{(1, 0, 3), (0, 1, 4)\}$,

h) $B = \{(1, 2, 2), (0, 1, 0)\}$,

i) Es gilt $U = \{\, (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \mid k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 0\}$,
also ist $B = \{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\}$,

j) $B = \{(9, 1, 0, \ldots, 0), (8, 0, 1, 0, \ldots, 0), (7, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, 1)\}$.

$\square$