

DR. ANTON MALEVICH

Aufgabe 7.1 Es seien $z_1 = -\frac{8}{1+i} - \frac{6-2i}{1-i}$, $z_2 = \frac{4i+2}{3i} - \frac{1}{i}$.

Stellen Sie die Zahlen z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$.

Aufgabe 7.2 Geometrie der komplexen Multiplikation

- a) Es gibt genau zwei Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $z^2 = i$. Zeichnen Sie die beiden in der komplexen Zahlenebene und berechnen Sie diese.
- b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:
 - (i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$,
 - (ii) $B = \{z^2 : z \in A\}$,
 - (iii) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$,
 - (iv) $D = \{\frac{6+8i}{5} \cdot z : z \in C\}$.

Aufgabe 7.3 Polardarstellung

- a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polardarstellung:

$$1 + i\sqrt{3}, \quad \frac{2-i}{3-i} - \frac{1+8i}{5(1+3i)}.$$

- b) Schreiben Sie $1 + i$ und $1 - i$ in Polardarstellung.
Zeigen Sie, dass $(1 + i)^n + (1 - i)^n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

- c#) Es seien $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$, $w \neq 0$, zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass

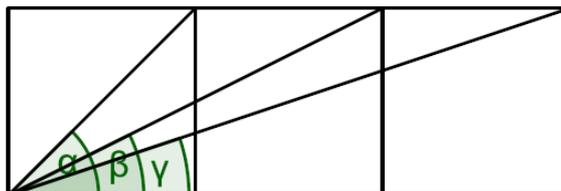
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \psi) + i \sin(\phi - \psi)).$$

Was bedeutet dies geometrisch für $z = 1$?

- d) Schreiben Sie die Zahl $z = \frac{(-2+2i)^7}{(1+i\sqrt{3})^5}$ in Polardarstellung.

Aufgabe 7.4 Trigonometrie

- a) Berechnen Sie $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ für $\alpha = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$. Verwenden Sie dafür nur die Definition von Cosinus und Sinus mittels des Einheitskreises, sowie elementare Eigenschaften von Dreiecken!
- b) Verwenden Sie die Verdopplungsformel für den Cosinus um $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{3} + 2}$ zu zeigen.
- c) In der folgenden Zeichnung sind die drei Quadrate gleich groß. Zeigen Sie $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ mit Verwendung komplexer Zahlen.



Aufgabe# 7.5 Es seien $z_1 = -\frac{1-i}{2+i} - \frac{3+i}{4}$, $z_2 = \frac{(1+i)^2}{2} - \frac{6+5i}{i^3}$.

Stellen Sie die Zahlen z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + ib$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, dar. Berechnen Sie zudem $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1 \cdot z_2|$ und $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$.

Aufgabe# 7.6 Skizzieren Sie die Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$, wobei

- $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq 1\}$,
- $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 1\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + |\operatorname{Im}(z)|^2 \leq 1\}$,
- $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z - 1| \leq 4\}$ und $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{3-4i}{z-1+2i} \right| < 5 \right\}$.
- $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - (2 + 2i)|\} = |z - (-2 - 2i)|$.

Aufgabe# 7.7 Zeigen Sie, dass alle komplexe Zahlen vom Betrag 1 und ungleich -1 als

$$\frac{1 + ix}{1 - ix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden können.

Stellen Sie konkret die Zahlen 1 , i und $-i$ in dieser form dar!

Aufgabe# 7.8 Beweisen Sie das Additionstheorem für den Tangens unter Benutzung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.