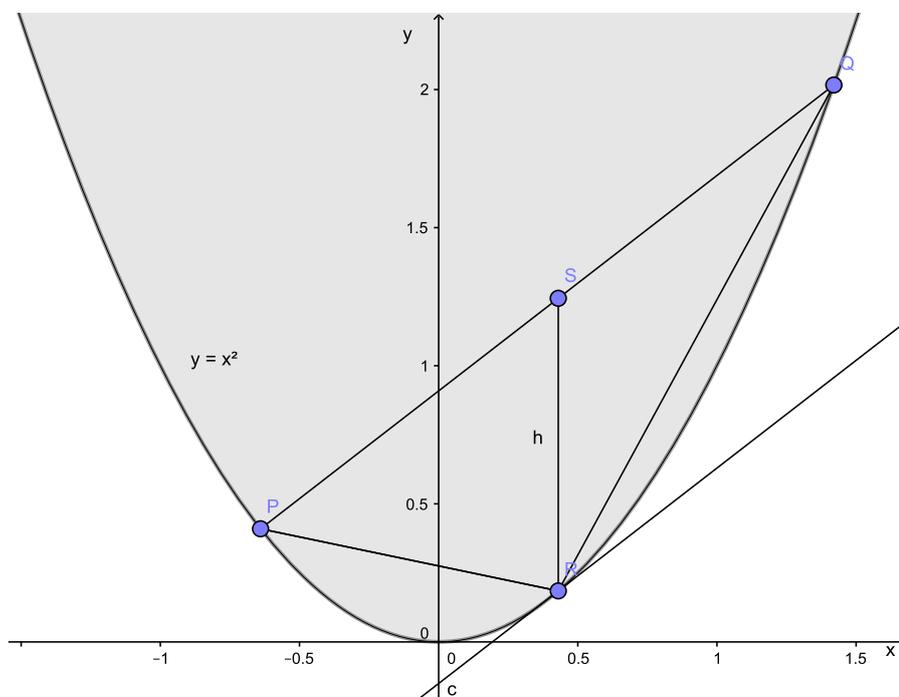


Aufgabe 9.1 (18 Punkte) Auf der Parabel mit der Gleichung $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$, sind zwei Punkte $P = (a, ca^2)$ und $Q = (b, cb^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, gegeben. Der Scheitelpunkt R zu P und Q ist durch die Bedingung gegeben, dass die Steigung der Parabel im Punkt R gleich der Steigung der Geraden durch P und Q ist.



- Zeigen Sie, dass die Gerade durch P und Q durch die Gleichung $y = xc(a + b) - cab$ gegeben ist.
- Zeigen Sie, dass gilt: $R = \left(\frac{a+b}{2}, c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$.
(Hinweis: Die Steigung der Parabel an der Stelle x ist durch $2cx$ gegeben.)
- Zeigen Sie: $h = \frac{1}{4}c(b - a)^2$ (die Strecke h verläuft parallel zur y -Achse, siehe Bild).
- Folgern Sie daraus: $A(\Delta PQR) = \frac{1}{8}c(b - a)^3$.
- Zeigen Sie: Ist R' bzw. R'' der Scheitelpunkt zu P und R bzw. R und Q ist, so gilt

$$A(\Delta PRR') = A(\Delta RQR'') = \frac{1}{8}A(\Delta PQR).$$

Aufgabe 9.2 (18 Punkte) Es seien $w_1 = \frac{1+i}{1-i}$, $w_2 = \frac{1}{1-i}$.

- Bestimmen Sie die Polardarstellung von w_1 bzw. w_2 .
- Lösen Sie die beiden Gleichungen $z^5 = w_1$ bzw. $z^5 = w_2$ nach z .
Skizzieren Sie die Lösungsmengen.

Aufgabe 9.3 (18 Punkte) Betrachten Sie die Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0. \quad (*)$$

- a) Sei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$. Berechnen Sie $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$. Skizzieren Sie den Graphen von f . Wie viele reelle Lösungen hat $(*)$?

Im Folgenden wollen wir die Nullstellen berechnen.

- b) Substituieren Sie $y = x + \alpha$ für ein geeignetes α um die Gleichung in die Form

$$y^3 = py + q \quad (**)$$

zu bringen.

- c) Verwenden Sie die Cardanische Formel (Satz (4.21) der VL) um eine Lösung y von $(**)$ zu bestimmen. Ihre Lösung sollte den Wurzelausdruck $\sqrt[3]{1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}}$ enthalten.

d) Zeigen Sie $\left(-1 + \sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3 = 1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}$

- e) Nutzen Sie dies, um Ihr Ergebnis aus (c) zu vereinfachen. Welcher Lösung x von $(*)$ entspricht das?

- f) Berechnen Sie jetzt die anderen beiden Lösungen von $(*)$.

Aufgabe# 9.4 Bestimmen Sie die Mengen μ_1, \dots, μ_8 , d.h. bestimmen Sie alle n -ten Einheitswurzeln für $n = 1, \dots, 8$.

Aufgabe# 9.5 Finden und skizzieren Sie alle Lösungen folgender Gleichungen

a) $z^3 = \sqrt{3} + i$,

b) $z^6 = -8i$.

Aufgabe# 9.6 Finden Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Aufgabe# 9.7 Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 12x - 18 = 0.$$

Hinweis: $(2 - i)^3 = 2 + 11i$.

Aufgaben mit # werden **nicht** korrigiert und müssen **nicht** abgegeben werden.