Lineare Algebra und Geometrie I – SS 2020 Thema **1-III**

Prof. Dr. Felix Leinen, Dr. Anton Malevich

Aufgaben zum Thema **1-III vollständige Induktion**.

Aufgabe 1-III.1 Beweisen Sie:

a) Die Zahl $n^2 + n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade.

b) $n^2 \geq 2n + 2$ für alle $n \geq 3$.

c) $1 + x^n \leq (1 + x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$.

d) Die Zahl $n^2 - 1$ ist für alle ungerade $n \geq 3$ durch 8 teilbar.

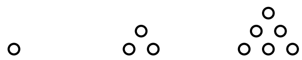
Aufgabe 1-III.2

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$ für alle $n \geq 1$.

b) Zeigen Sie, dass $n(n + 1)(2n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist. Benutzen Sie dabei Teil a) nicht.

c) Zeigen Sie, dass $2n^3 + 4n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 1-III.3 Dreieckszahlen



a) Betrachten Sie die sogenannten Dreieckszahlen D_n: $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $\ldots$ Zeigen Sie, dass $D_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ ist.

b) Berechnen Sie 1^3, $1^3 + 2^3$, $1^3 + 2^3 + 3^3$, etc. Stellen Sie eine Vermutung über das Verhältnis zu den Zahlen D_n auf.

c) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Musterlösung zu Aufgabe 1-III.2b). Wir bemerken zuerst, dass gilt:

$$n(n + 1)(2n + 1) = (n^2 + n)(2n + 1) = 2n^3 + 3n^2 + n.$$

IA) $n = 0$: $2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 0 = 0$ ist teilbar durch 6. ✓

IV) Es gelte die Aussage, d.h. es sei $2n^3 + 3n^2 + n$ teilbar durch 6, für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}$.

IS) $n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned}
&2(n + 1)^3 + 3(n + 1)^2 + (n + 1)\\
=&2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1\\
=&2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\\
=&\underbrace{(2n^3 + 3n^2 + n)}_{\text{teilbar durch 6 nach IV}} + 6(n^2 + 2n + 1)
\end{aligned}$$

Der gesamte Ausdruck ist teilbar durch 6, denn die erste Klammer ist teilbar durch 6 nach IV und die zweite ist ein Vielfaches von 6. ✓ □