Aufgaben zum Thema **1-II Aussagenlogik**.

Aufgabe 1-II.1 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $0 < 1 \vee 1 \geq 2$,

b) $0 > 1 \wedge 1 \leq 2$,

c) $0 < 1 \Rightarrow 1 \leq 2$,

d) $0 > 1 \Leftrightarrow 1 \geq 2$.

Bilden Sie die Negationen der obigen Aussagen. Sorgen Sie dafür, dass in den Negationen das Zeichen $\neg$ nicht mehr vorkommt.

Aufgabe 1-II.2 Beweisen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass die folgenden Aussagen immer wahr sind.

a) $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$, (*Widerspruchsbeweis: Variante 1*)

b) $\big[\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\big] \Rightarrow A$, (*Widerspruchsbeweis: Variante 2*)

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, (*Kontraposition*)

d) $\big[(A \vee B) \vee C\big] \Leftrightarrow \big[A \vee (B \vee C)\big]$, (*Assoziativität der Disjunktion*)

e) $\big[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)\big] \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C)$. (*Ringschluss*)

Die hier genannten Äquivalenzen und Implikationen haben eigene Namen, weil sie bei vielen mathematischen Beweisen Anwendung finden. Bei Interesse informieren Sie sich über die genannten Begriffe.

Aufgabe 1-II.3 Es seien A und B beliebige Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz der Aussagen (1) $A \subseteq B$, (2) $A \cap B = A$, (3) $A \cup B = B$, (4) $A \setminus B = \varnothing$

a) mit mengentheoretischen Umformungen,

b) mit einer Wahrheitsfatel.
Hinweis: Schreiben Sie zuerst jede der mengentheoretischen Aussagen (i), $i \in \{1,2,3,4\}$ als eine logische mit Hilfe der elementaren Aussagen $\mathcal{A}$ "$x \in A$" und $\mathcal{B}$ "$x \in B$" und der logischen Junktoren. So wird zum Beispiel $A \subseteq B$ zu $x \in A \Rightarrow x \in B$ bzw. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $A \cup B = A \cap B$ zu $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.

Musterlösung zu Aufgabe 1-II.2c) .

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
+	+	+	−	−	+	+
+	−	−	+	−	−	+
−	+	+	−	+	+	+
−	−	+	+	+	+	+

Da die grünen Spalten identisch sind, sind die entsprechenden Aussagen äquivalent. □