Aufgaben zum Thema **1-IV Prinzip von Inklusion und Exklusion**.

Aufgabe 1-IV.1 Jeder US-Amerikaner unterstützt mindestens eine der beiden Großparteien: die Demokraten und die Republikaner. Von 1000 befragten US-Amerikanern unterstützen 549 die Demokraten und 499 die Republikaner. Wie viele der befragten US-Amerikanern unterstützen beide Parteien?

Aufgabe 1-IV.2

a) Das bekannte "Sieb des Eratosthenes" erlaubt es, alle Primzahlen $\leq n$ aus der Kenntnis aller Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ zu bestimmen. Das Inklusions/Exklusions-Prinzip erlaubt es, die Anzahl der Prinzahlen zu bestimmen, ohne diese explizit zu finden.

   (i) Finden Sie die Anzahl der Primzahlen ≤ 20 mit Hilfe der Primzahlen 2 und 3.

   (ii) Finden Sie die Anzahl der Primzahlen ≤ 40 mit Hilfe $2, 3$ und 5.

   (iii) Finden Sie die Anzahl der Primzahlen ≤ 100 mit Hilfe $2, 3, 5$ und 7.

b) Wieviele natürliche Zahlen $\leq 10^4$ sind weder Quadrate, noch dritte, noch fünfte Potenzen?

Aufgabe 1-IV.3

a) Eine Befragung von 50 Studierenden der Mathematik lieferte folgendes Ergebnis:

   · 22 Studierenden belegten Analysis,
   · 25 Elementarmathematik
   · 9 Analysis und Elementarmathematik,
   · 17 Analysis und Lineare Algebra,
   · 44 Elementarmathematik oder Lineare Algebra,
   · 44 Analysis oder Lineare Algebra,
   · 4 keine der drei genannten Vorlesungen.

   Gab es Studierenden, die Analysis und Elementarmathematik, aber nicht Lineare Algebra belegten?

b) Es ist bekannt, dass 60% aller Studierenden eines Jahrgangs die Vorlesung Elementarmathematik besuchen, 65% die Vorlesung Lineare Algebra und 50% die Vorlesung Analysis, außerdem besuchen 45% jeweils zwei davon. Welchen Prozentsatz erhält man höchstens für die Anzahl der Studierenden, die alle drei Vorlesungen besuchen?

Musterlösung zu Aufgabe 1-IV.2b)(ii). Wir definieren die Mengen

$$\begin{aligned}
&M = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 40\},\\
&M_2 = \{x \in M \mid x \text{ teilbar durch } 2\},\\
&M_3 = \{x \in M \mid x \text{ teilbar durch } 3\},\\
&M_5 = \{x \in M \mid x \text{ teilbar durch } 5\}.
\end{aligned}$$

$M \setminus (M_2 \cup M_3 \cup M_5)$ ist die Menge aller Zahlen ≤ 40, die weder durch 2 noch durch 3, noch durch 5 teilbar sind. Alle diese Zahlen, außer 1, sind Primzahlen, außerdem sind 2, 3 und 5 selbst in dieser Menge nicht enthalten. Somit ist die gesuchte Anzahl der Primzahlen $|M \setminus (M_2 \cup M_3 \cup M_5)| + 3 - 1$.
Nach dem Prinzip von Inklusion und Exklusion gilt

$$|M_2 \cup M_3 \cup M_5| = |M_2| + |M_3| + |M_5| - |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_5| - |M_3 \cap M_5| + |M_2 \cap M_3 \cap M_5|,$$

wobei

$$\begin{aligned}
&|M_2| = \left\lfloor \tfrac{40}{2} \right\rfloor = 20,\\
&|M_3| = \left\lfloor \tfrac{40}{3} \right\rfloor = 13,\\
&|M_5| = \left\lfloor \tfrac{40}{5} \right\rfloor = 8,\\
&|M_2 \cap M_3| = |\{x \in M \mid x \text{ teilbar durch 2 und 3}\}| = |\{x \in M \mid x \text{ teilbar durch } 6\}| =\\
&\left\lfloor \tfrac{40}{6} \right\rfloor = 6, \text{ und analog}\\
&|M_2 \cap M_5| = \left\lfloor \tfrac{40}{10} \right\rfloor = 4,\\
&|M_3 \cap M_5| = \left\lfloor \tfrac{40}{15} \right\rfloor = 2,\\
&|M_2 \cap M_3 \cap M_5| = \left\lfloor \tfrac{40}{30} \right\rfloor = 1,
\end{aligned}$$

Somit ist

$$|M_2 \cup M_3 \cup M_5| = 20 + 13 + 8 - 6 - 4 - 2 + 1 = 30,$$

und die Anzahl der Primzahlen ≤ 40 ist $40 - 30 + 3 - 1 = 12$. $\square$