Biostatistik, WS 2010/2011

Exponential- und Logarithmusfunktion

Matthias Birkner

http://www.mathematik.uni-mainz.de/~birkner/Biostatistik1011/

5.11.2010

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Inhalt

Inhalt

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$,

also ist ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$a^m a^n =$

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$,

also ist ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$,

also ist $(m, n \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R},\ a, b \neq 0)$:

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n =$$

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$,

also ist ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}} \cdots \underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}}}_{n \text{ mal}} = a^{mn}$$

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$,

also ist ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}} \cdots \underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}}}_{n \text{ mal}} = a^{mn}$$

$$a^n b^n =$$

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$,

also ist ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}} \cdots \underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}}}_{n \text{ mal}} = a^{mn}$$

$$a^n b^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ mal}} = \underbrace{(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ mal}} = (ab)^n$$

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$,

also ist ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}} \cdots \underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}}}_{n \text{ mal}} = a^{mn}$$

$$a^n b^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ mal}} = \underbrace{(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ mal}} = (ab)^n$$

Man setzt $a^0 := 1$, $a^{-1} := \dfrac{1}{a}$, damit gelten obige Rechenregeln auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$,

also ist ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

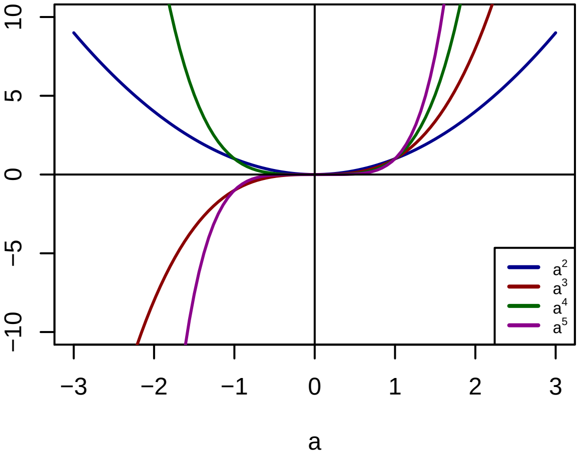
$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}} \cdots \underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}}}_{n \text{ mal}} = a^{mn}$$

$$a^n b^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ mal}} = \underbrace{(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ mal}} = (ab)^n$$

Man setzt $a^0 := 1$, $a^{-1} := \dfrac{1}{a}$, damit gelten obige Rechenregeln auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.

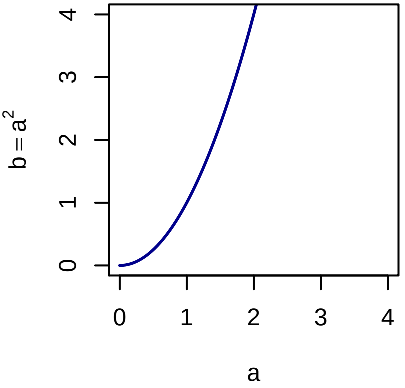
Bsp.: $(a^{-5})^{-2} = \left(\left(\dfrac{1}{a}\right)^5\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{a^5}\right)^{-2} = (a^5)^2 = a^{10} = a^{(-5)(-2)}$

Potenzfunktionen



Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $a \mapsto a^n$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$, d.h. $a^n > b^n$ für $a > b \geq 0$.

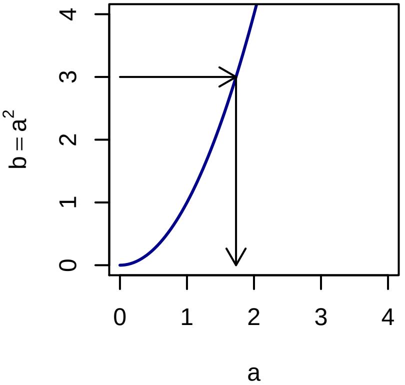
Wurzelfunktionen



Die Umkehrfunktion von $a \mapsto a^n$ (für $a \geq 0$) ist die n-te Wurzel: $\sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Man schreibt $b^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{b}$.

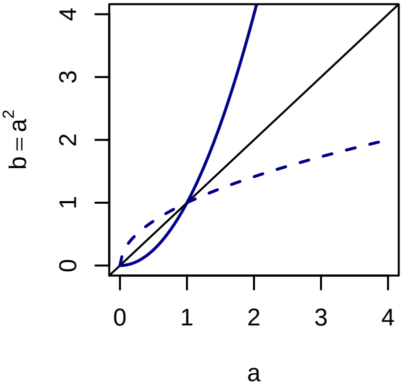
Wurzelfunktionen

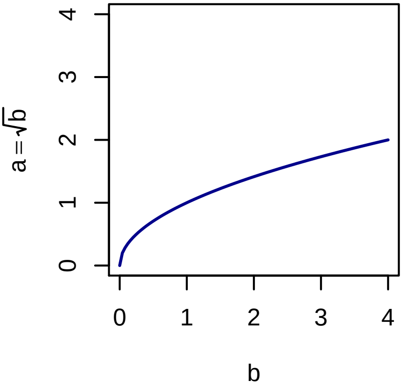


Die Umkehrfunktion von $a \mapsto a^n$ (für $a \geq 0$) ist die n-te Wurzel: $\sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Man schreibt $b^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{b}$.

Wurzelfunktionen

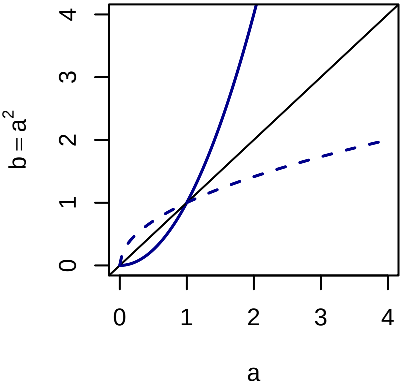


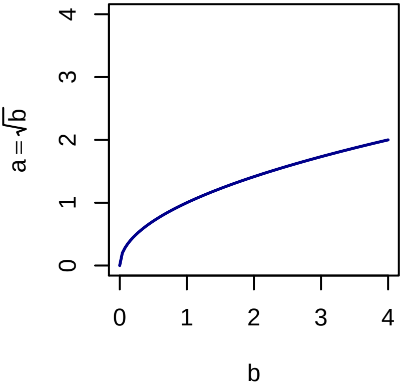


Die Umkehrfunktion von $a \mapsto a^n$ (für $a \geq 0$) ist die n-te Wurzel:
$\sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Man schreibt $b^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{b}$.

Wurzelfunktionen





Die Umkehrfunktion von $a \mapsto a^n$ (für $a \geq 0$) ist die n-te Wurzel:
$\sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Man schreibt $b^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{b}$.

Bem.: Für $b < 0$ ist $b^{\frac{1}{n}}$ keine reelle Zahl (jedenfalls wenn n gerade ist).

Potenzrechenregeln: Gebrochene Exponenten sind ok

$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Für $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ setzt man $b^p = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$

Potenzrechenregeln: Gebrochene Exponenten sind ok

$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Für $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ setzt man $b^p = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$

Die „alten" Potenzrechenregeln gelten weiter, wenn man statt ganzzahliger Exponenten rationale zulässt, beispielsweise ist

$$(*) \qquad (b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Potenzrechenregeln: Gebrochene Exponenten sind ok

$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Für $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ setzt man $b^p = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$

Die „alten" Potenzrechenregeln gelten weiter, wenn man statt ganzzahliger Exponenten rationale zulässt, beispielsweise ist

$$(*) \qquad (b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

denn $\left(\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^{nm} = \left(\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m = (b)^m$,
d.h. die rechte Seite in $(*)$ erfüllt die Definition der linken Seite.

Exponentialfunktionen (Motivation)

Erinnerung:
Geometrische Folgen: $1 = a^0, a = a^1, a^2, a^3, \ldots$

Exponentialfunktionen (Motivation)

Erinnerung:
Geometrische Folgen: $1 = a^0, a = a^1, a^2, a^3, \ldots$

Beispiel: Die Höhe der Schaumkrone in einem frisch eingeschenkten Bierglas betrage 5cm und nehme (gleichmäßig) pro Minute um 30% ab.

Zeit [Min]	0	1	2	3	4
Höhe [cm]	5	$5 \cdot 0{,}7$ $= 3{,}5$	$5 \cdot 0{,}7^2$ $= 2{,}45$	$5 \cdot 0{,}7^3$ $= 1{,}715$	$5 \cdot 0{,}7^4$ $\doteq 1{,}2$

Exponentialfunktionen (Motivation)

Erinnerung:
Geometrische Folgen: $1 = a^0, a = a^1, a^2, a^3, \dots$

Beispiel: Die Höhe der Schaumkrone in einem frisch eingeschenkten Bierglas betrage 5cm und nehme (gleichmäßig) pro Minute um 30% ab.

Zeit [Min]	0	1	2	3	4
Höhe [cm]	5	$5 \cdot 0{,}7$	$5 \cdot 0{,}7^2$	$5 \cdot 0{,}7^3$	$5 \cdot 0{,}7^4$
		$= 3{,}5$	$= 2{,}45$	$= 1{,}715$	$\doteq 1{,}2$

Frage: Wie hoch ist die Schaumkrone nach 40 Sekunden?

Exponentialfunktionen (Motivation)

Erinnerung:
Geometrische Folgen: $1 = a^0, a = a^1, a^2, a^3, \ldots$

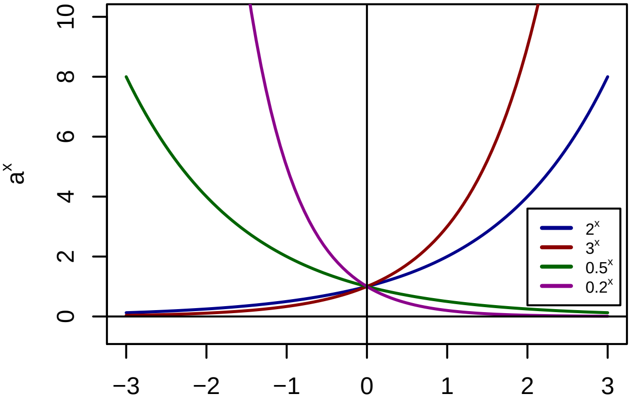
Beispiel: Die Höhe der Schaumkrone in einem frisch eingeschenkten Bierglas betrage 5cm und nehme (gleichmäßig) pro Minute um 30% ab.

Zeit [Min]	0	1	2	3	4
Höhe [cm]	5	$5 \cdot 0{,}7$ $= 3{,}5$	$5 \cdot 0{,}7^2$ $= 2{,}45$	$5 \cdot 0{,}7^3$ $= 1{,}715$	$5 \cdot 0{,}7^4$ $\doteq 1{,}2$

Frage: Wie hoch ist die Schaumkrone nach 40 Sekunden?
Wir erwarten pro Sekunde eine Abnahme um den Faktor $(0{,}7)^{\frac{1}{60}}$, denn 1 Minute = 60 Sekunden und $\left((0{,}7)^{\frac{1}{60}}\right)^{60} = 0{,}7$.
Demnach: $5 \cdot \left((0{,}7)^{\frac{1}{60}}\right)^{40} = 5 \cdot 0{,}7^{\frac{2}{3}} \doteq 3{,}94$ [cm].
Allgemein: Höhe nach x Minuten: $h(x) = 5 \cdot 0{,}7^x$
(für $x \in \mathbb{R}$ beliebig, in dieser Anwendung ist nur $x \geq 0$ sinnvoll)

Exponentialfunktionen

Für $a > 0$ ist die Funktion $f(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert (und $a^x > 0$).



a^x ist monoton wachsend für $a > 1$, fallend für $a < 1$.

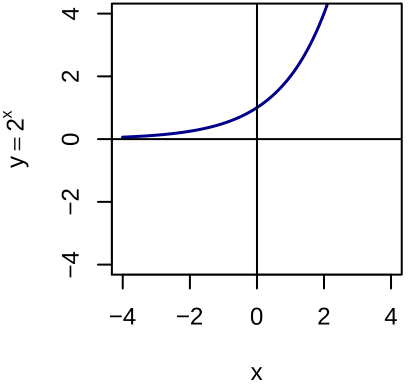
Bemerkung: Die Mathematiker sprechen von einer „stetigen Fortsetzung" der Funktion a^x, die zunächst nur für rationale x erklärt war, auf $x \in \mathbb{R}$.

Rechenregeln für allgemeine Exponentialausdrücke

Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ (beliebig) gilt

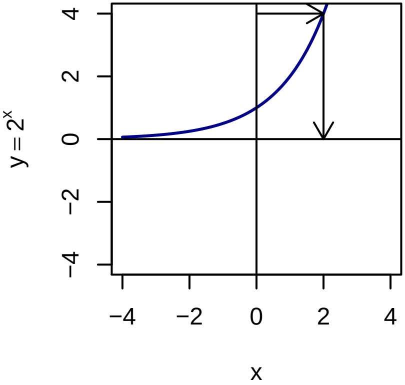
$$
\begin{aligned}
a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\
a^0 &= 1 \\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\
(a^x)^y &= a^{xy} \\
a^x b^x &= (ab)^x
\end{aligned}
$$

Logarithmusfunktion(en) als Umkehrung von Exponentialfunktion(en)



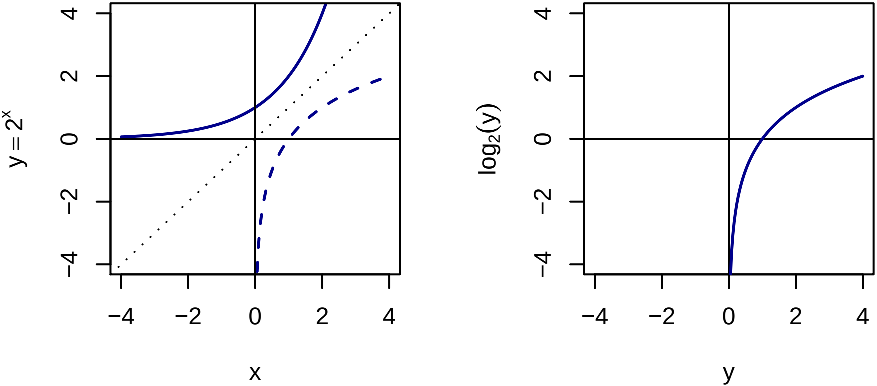
Die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$ (für $a \geq 0$) ist der Logarithmus (zur Basis a): $\log_a y$ ist dasjenige x mit $a^x = y$

Logarithmusfunktion(en) als Umkehrung von Exponentialfunktion(en)



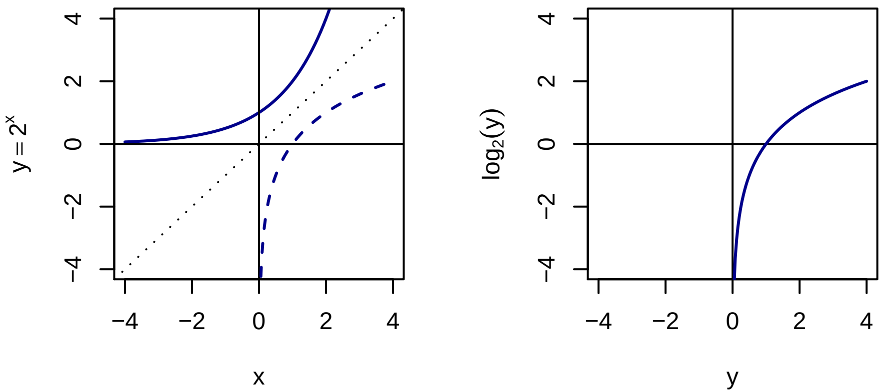
Die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$ (für $a \geq 0$) ist der Logarithmus (zur Basis a): $\log_a y$ ist dasjenige x mit $a^x = y$

Logarithmusfunktion(en) als Umkehrung von Exponentialfunktion(en)



Die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$ (für $a \geq 0$) ist der Logarithmus (zur Basis a): $\log_a y$ ist dasjenige x mit $a^x = y$

Logarithmusfunktion(en) als Umkehrung von Exponentialfunktion(en)



Die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$ (für $a \geq 0$) ist der Logarithmus (zur Basis a): $\log_a y$ ist dasjenige x mit $a^x = y$

Beispiel: $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$

Logarithmus: Rechenregeln

Für $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \log_a(x) + \log_a(y) &= \log_a(x \cdot y), \quad x, y > 0 \\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_a(x), \quad x > 0 \\ \log_a(x^y) &= y \log_a(x), \quad x > 0, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logarithmus: Rechenregeln

Für $a > 0$ gilt

$$(*) \qquad \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y), \quad x, y > 0$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x), \quad x > 0$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x), \quad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

denn beispielsweise

$$a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y,$$

d.h. die linke Seite von $(*)$ erfüllt die Definition der rechten Seite.

Logarithmus: Rechenregeln

Für $a > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad \log_a(x) + \log_a(y) &= \log_a(x \cdot y), \quad x, y > 0 \\
\log_a\left(\tfrac{1}{x}\right) &= -\log_a(x), \quad x > 0 \\
\log_a(x^y) &= y \log_a(x), \quad x > 0, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

denn beispielsweise

$$a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y,$$

d.h. die linke Seite von $(*)$ erfüllt die Definition der rechten Seite.

Bemerkung (Umrechnung der Basis): $a, b > 0, x > 0$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Logarithmus: Rechenregeln

Für $a > 0$ gilt

$$(*) \qquad \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y), \quad x, y > 0$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x), \quad x > 0$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x), \quad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

denn beispielsweise

$$a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y,$$

d.h. die linke Seite von $(*)$ erfüllt die Definition der rechten Seite.

Bemerkung (Umrechnung der Basis): $a, b > 0, x > 0$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

denn $b = a^{\log_a(b)}$, also $b^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(b)\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(x)} = x$

Eulersche Zahl und natürlicher Logarithmus

Leonhard Euler, 1707–1783

Die *Eulersche Zahl* $e = e^1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718282\ldots$ spielt in der Mathematik eine besondere Rolle.

Man schreibt häufig $e^x = \exp(x)$ und nennt dies *die* Exponentialfunktion.

Ihre Umkehrfunktion, $\log_e(x)$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird oft $\ln(x)$ geschrieben.

(Wir werden später sehen, was so bemerkenswert „natürlich“an $e = \exp(1)$ ist.)

Inhalt

Exponentielles Wachstum, „Malthusscher Parameter“

Thomas Robert Malthus
1766–1834

An Essay on the Principle of Population, 1798

$N(t)$ = Populationsgröße zur Zeit t

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

α = Wachstumsparameter oder „Malthusscher Parameter“,
es ist $\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = N(0)\frac{e^{\alpha(t+h)}-e^{\alpha t}}{h} = N(0)e^{\alpha t}\frac{e^{\alpha h}-1}{h} \approx \alpha N(t)$
(sofern h klein), d.h. Änderung ist proportional zur aktuellen Anzahl.

Modell plausibel, wenn $N(0)$ (halbwegs) groß und es keine Ressourcenbeschränkung gibt.

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

Beispiel: Eine Hefekultur bestehe zur Zeit $t = 0$ [h] aus 1000 Zellen, $\alpha = 0{,}17$

Wieviele Zellen enthält die Kultur nach 2 Stunden?

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

Beispiel: Eine Hefekultur bestehe zur Zeit $t = 0$ [h] aus 1000 Zellen, $\alpha = 0{,}17$

Wieviele Zellen enthält die Kultur nach 2 Stunden?

$N(2) = 1000 \cdot e^{0{,}17 \cdot 2} \doteq 1405$

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

Beispiel: Eine Hefekultur bestehe zur Zeit $t = 0$ [h] aus 1000 Zellen, $\alpha = 0{,}17$

Wieviele Zellen enthält die Kultur nach 2 Stunden?

$N(2) = 1000 \cdot e^{0{,}17 \cdot 2} \doteq 1405$

Wie lange muss man warten, bis sich die Kultur verdoppelt hat?

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

Beispiel: Eine Hefekultur bestehe zur Zeit $t = 0$ [h] aus 1000 Zellen, $\alpha = 0{,}17$

Wieviele Zellen enthält die Kultur nach 2 Stunden?

$N(2) = 1000 \cdot e^{0{,}17 \cdot 2} \doteq 1405$

Wie lange muss man warten, bis sich die Kultur verdoppelt hat?

Bestimme t_2 so, dass $N(t_2) = N(0)e^{0{,}17 \cdot t_2} = 2N(0)$ gilt, d.h. $e^{0{,}17 \cdot t_2} = 2$ oder $t_2 = \frac{\ln(2)}{0{,}17} \doteq 4{,}1$.

Inhalt

1. Exponential- und Logarithmusfunktion
   - Potenzen und Rechenregeln
   - Anwendung
   - Mehr zur Eulerschen Zahl und „natürliche“ Exponentialfunktion

Was ist so bemerkenswert an e?

Eulersche Zahl $e \doteq 2{,}718282\ldots$

(Taylor-)Reihe der Exponentialfunktion („Exponentialreihe“)

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

man kürzt ab $n! := 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$ (sprich: „n-Fakultät“) und vereinbart $0! := 1$, z.B.

$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, \ldots$, also

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exkurs:

Geometrische Summenformel: Für $n = 1, 2, 3, \dots$ und $a \neq 1$ ist

$1 + a + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, denn

$$\begin{aligned}
&(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n) \cdot (1 - a) \\
&= 1 + a + a^2 + a^3 \cdots + a^{n-1} + a^n \\
&\quad - a - a^2 - a^3 - a^4 - \cdots - a^n - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}
\end{aligned}$$

Geometrische Reihe: Für $|a| < 1$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a^n &= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}
\end{aligned}$$

(Für $|a| \geq 1$ konvergiert die Reihe nicht.)

Exkurs: Warum konvergiert die Exponentialreihe?

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Betrachte Quotienten aufeinanderfolgender Summanden: $\frac{\frac{x^1}{1!}}{\frac{x^0}{0!}} = \frac{x}{1}$,

$$\frac{\frac{x^2}{2!}}{\frac{x^1}{1!}} = \frac{1!}{2!}x = \frac{x}{2}, \frac{\frac{x^3}{3!}}{\frac{x^2}{2!}} = \frac{2!}{3!}x = \frac{x}{3}, \ldots, \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!}x = \frac{x}{n}, \ldots$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $2n_0 - 1 < |x| \leq 2n_0$, dann ist für $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \underbrace{\left|\frac{\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}}{\frac{x^{n_0}}{n_0!}}\right| \cdot \left|\frac{\frac{x^{n_0+2}}{(n_0+2)!}}{\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}}\right| \cdot \cdots \cdot \left|\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\right|}_{n-n_0 \text{ Faktoren, jeder } \leq \frac{1}{2}} \leq \left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 2^{n_0} \left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Also: (Bem.: Wir haben gerade das Quotientenkriterium benutzt/bewiesen.)

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq 2^{n_0} \left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$$

exp ist seine eigene Ableitung:
Erinnerung/Vorschau: Ableitung, Steigung einer Funktion
$f(x) = x^n$, so ist $f'(x) = nx^{n-1}$
Wenn summandenweises Ableiten erlaubt ist (was hier der Fall ist):

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)' \\
&= 0 + \frac{1x^0}{1!} + \frac{2x^1}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots \\
&= 0 + 1 + \frac{2x^1}{2 \cdot 1!} + \frac{3x^2}{3 \cdot 2!} + \frac{4x^3}{4 \cdot 3!} + \cdots \\
&= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \exp(x)
\end{aligned}$$

Dies ist der Grund, warum $e^x = \exp(x)$ die „natürlichste“ Exponentialfunktion ist, ihre Umkehrfunktion heißt daher auch „natürlicher Logarithmus“.)

Leonhard Euler, 1707–1783