Biostatistik, WS 2010/2011

Deskriptive Statistik

Matthias Birkner

http://www.mathematik.uni-mainz.de/~birkner/Biostatistik1011/

19.11.2010

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Inhalt

It is easy to lie with statistics.

Andrejs Dunkels

It is easy to lie with statistics.
It is hard to tell the truth without it.

Andrejs Dunkels

Was ist Statistik?

Die Natur ist voller Variabilität.

Was ist Statistik?

Die Natur ist voller Variabilität.

Wie geht man mit variablen Daten um?

Was ist Statistik?

Die Natur ist voller Variabilität.

Wie geht man mit variablen Daten um?

Es gibt eine mathematische Theorie des Zufalls:

die Stochastik.

IDEE DER STATISTIK

Variabilität

durch

Zufall

modellieren.

IDEE DER STATISTIK

Variabilität

(Erscheinung der Natur)

durch

Zufall

modellieren.

IDEE DER STATISTIK

Variabilität

(Erscheinung der Natur)

durch

Zufall

(mathematische Abstraktion)

modellieren.

Statistik

=

Datenanalyse

mit Hilfe

stochastischer Modelle

Inhalt

Beispiel

Daten aus einer Diplomarbeit aus 2001 am Forschungsinstitut Senckenberg, Frankfurt am Main

Crustaceensektion

Leitung: Dr. Michael Türkay

Charybdis acutidens TÜRKAY 1985

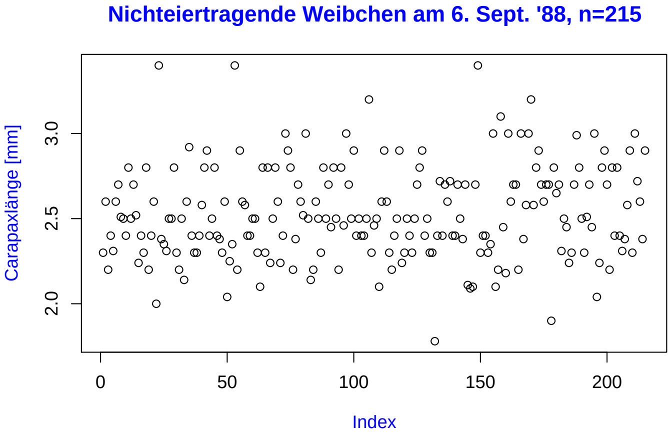
Der Springkrebs

Galathea intermedia

Helgoländer Tiefe Rinne, Fang vom 6.9.1988

Carapaxlänge (mm): Nichteiertragende Weibchen ($n = 215$)

2,9	3,0	2,9	2,5	2,7	2,9	2,9	3,0
3,0	2,9	3,4	2,8	2,9	2,8	2,8	2,4
2,8	2,5	2,7	3,0	2,9	3,2	3,1	3,0
2,7	2,5	3,0	2,8	2,8	2,8	2,7	3,0
2,6	3,0	2,9	2,8	2,9	2,9	2,3	2,7
2,6	2,7	2,5	.	.	.	.	.

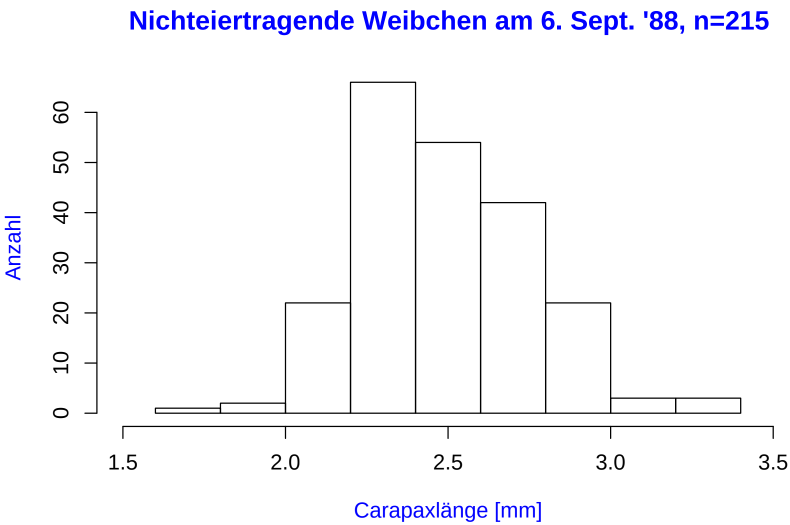


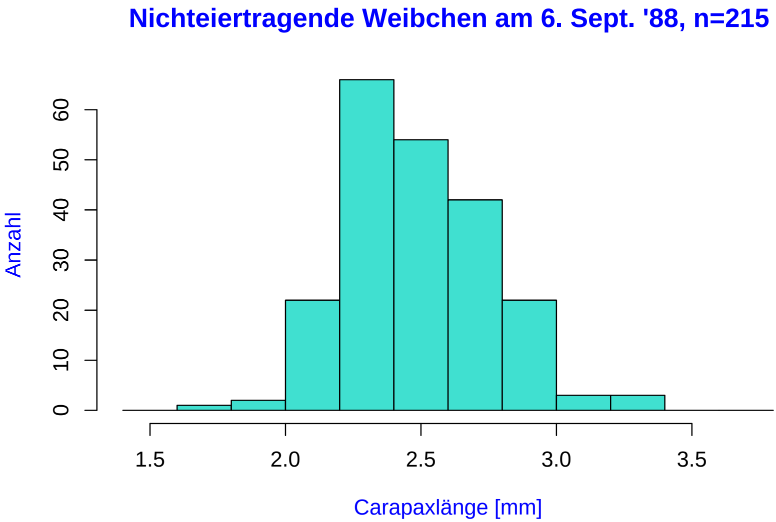
Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Carapaxlänge [mm]
2.0
2.5
3.0
0
50
100
150
200
Index

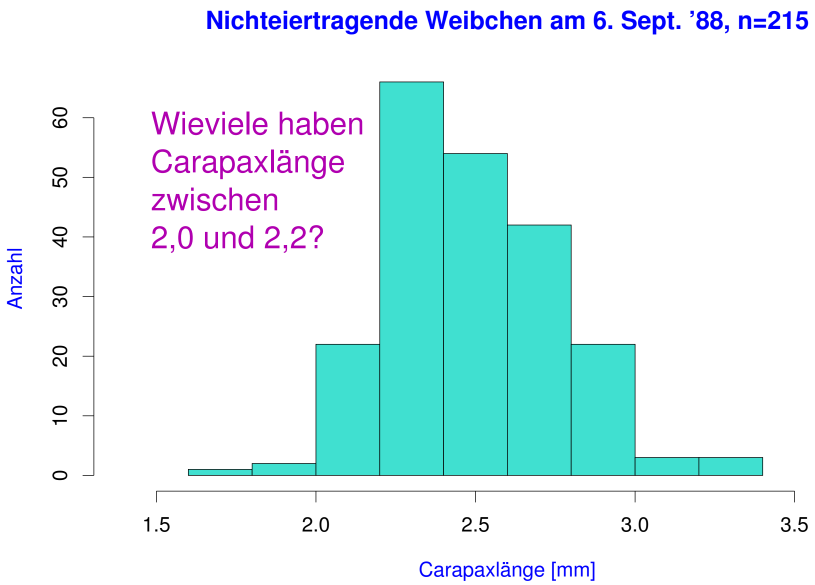
Inhalt

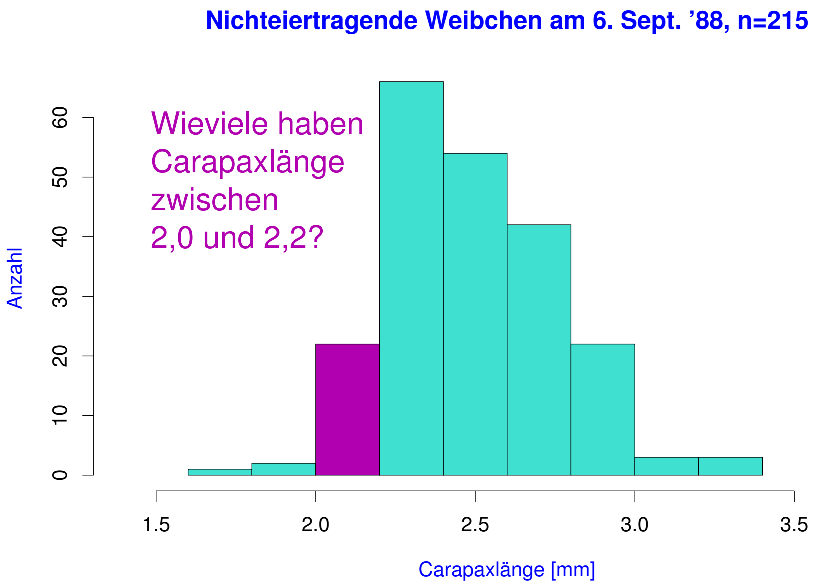
Eine Möglichkeit der graphischen Darstellung:

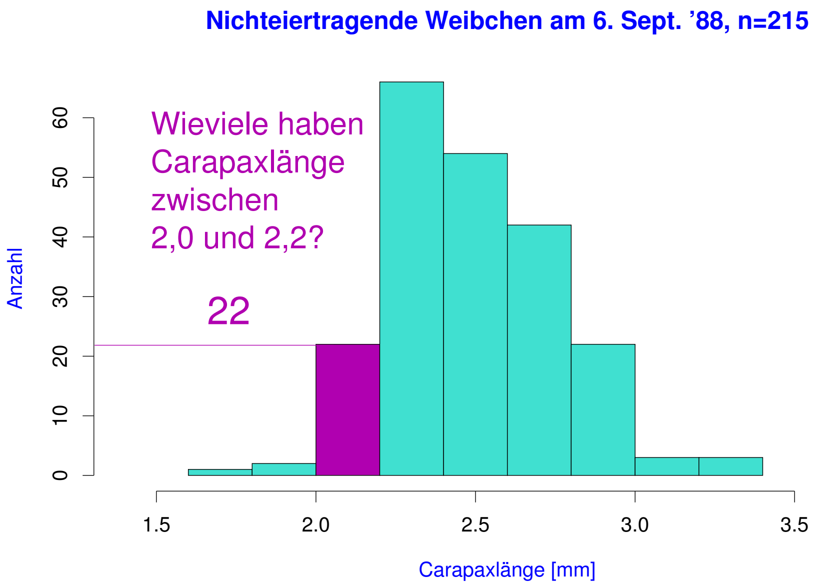
das Histogramm


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

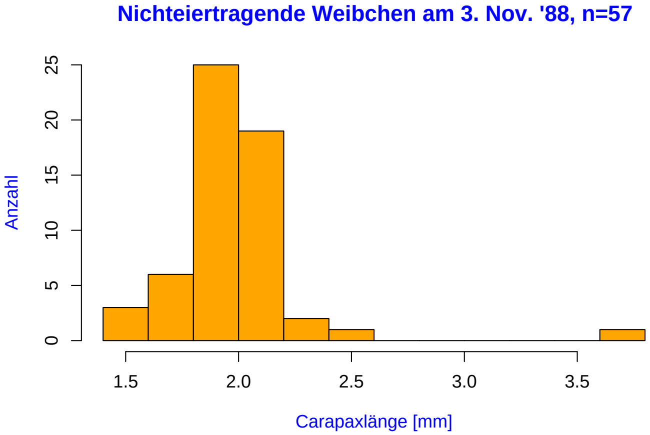

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Wieviele haben
Carapaxlänge
zwischen
2,0 und 2,2?
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

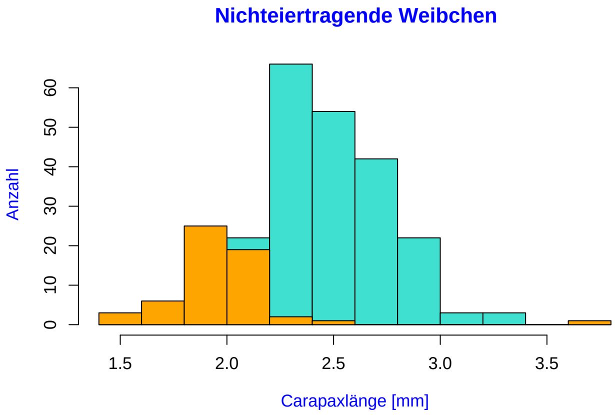

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Wieviele haben
Carapaxlänge
zwischen
2,0 und 2,2?
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Wieviele haben Carapaxlänge zwischen 2,0 und 2,2?
22
Anzahl
0
10
20
30
40
50
60
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

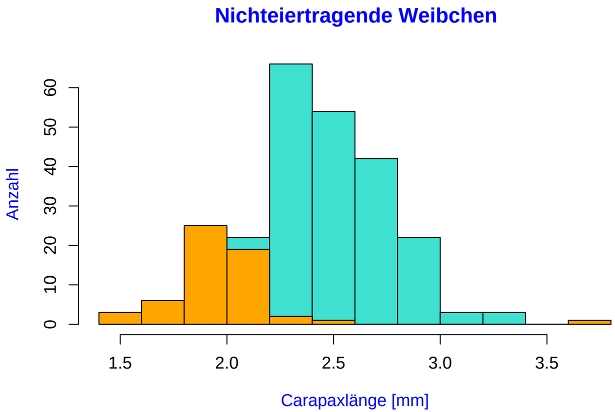
Analoge Daten zwei Monate später (3.11.88):


Nichteiertragende Weibchen am 3. Nov. '88, n=57
Anzahl
0
5
10
15
20
25
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

Vergleich der beiden Verteilungen



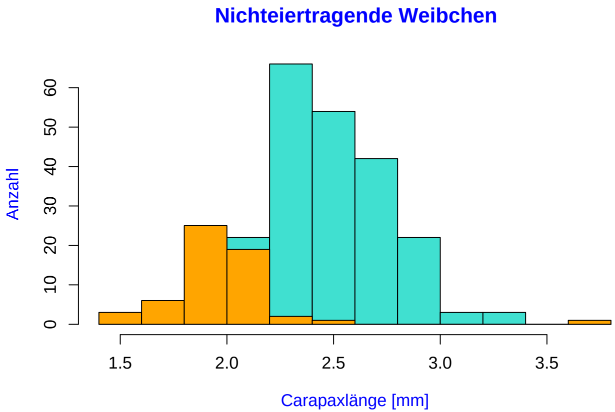
Vergleich der beiden Verteilungen



Problem: ungleiche Stichprobenumfänge:

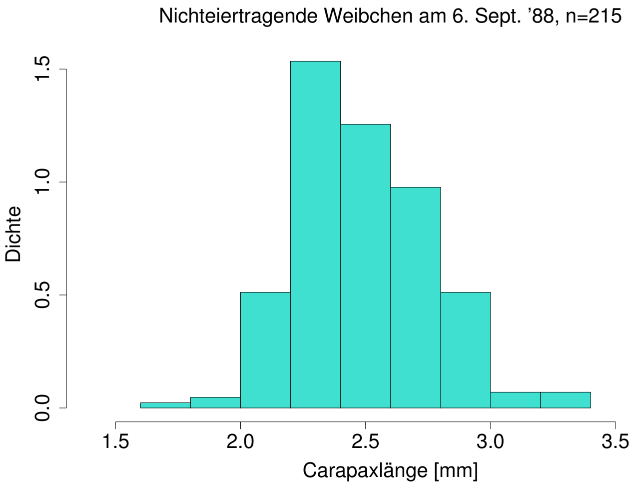
6.Sept: $n = 215$
3.Nov : $n = 57$

Vergleich der beiden Verteilungen

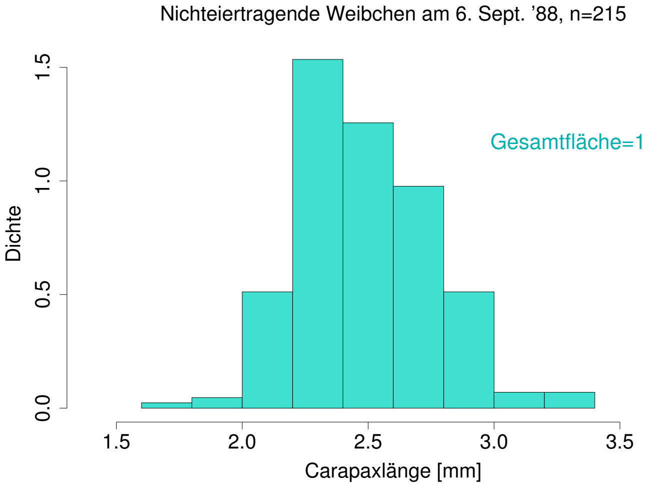


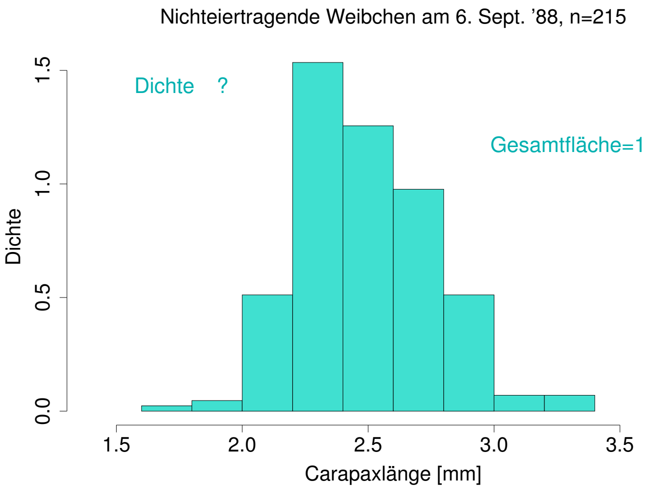
Problem: ungleiche Stichprobenumfänge: 6.Sept: $n = 215$
3.Nov : $n = 57$

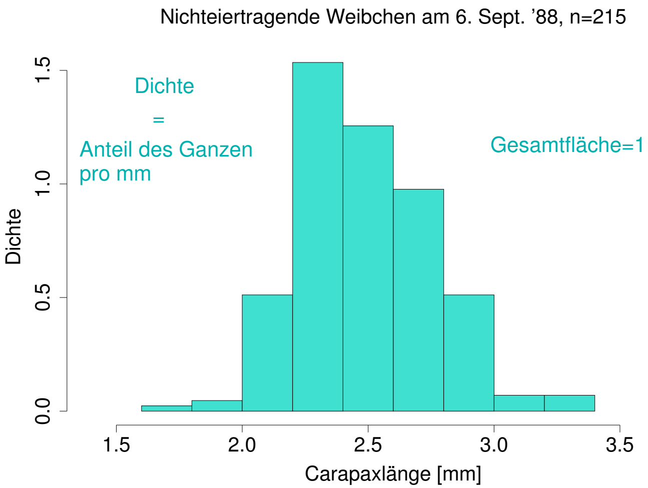
Idee: stauche vertikale Achse so, dass Gesamtfläche = 1.

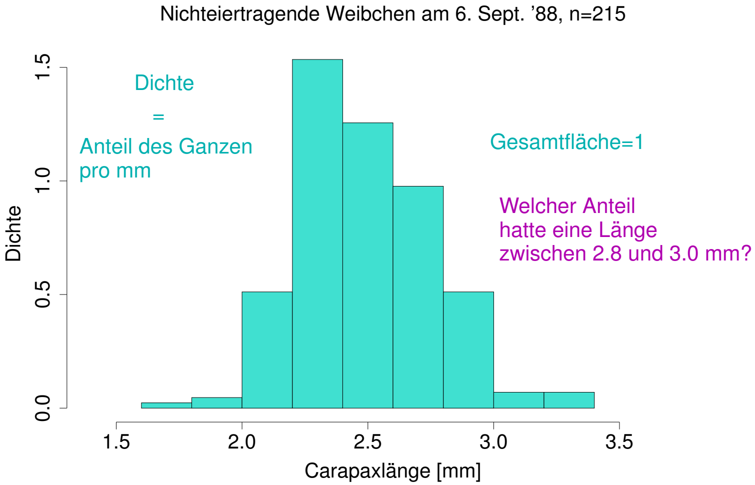

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

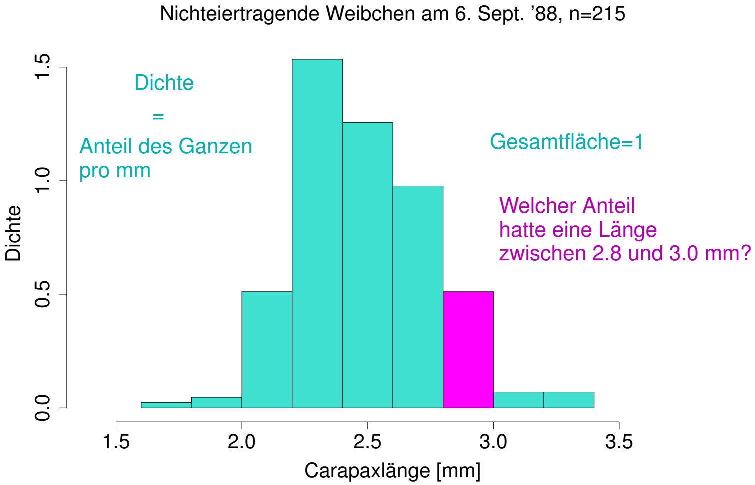
Die neue
vertikale Koordinate
ist jetzt eine
Dichte
(engl. density).

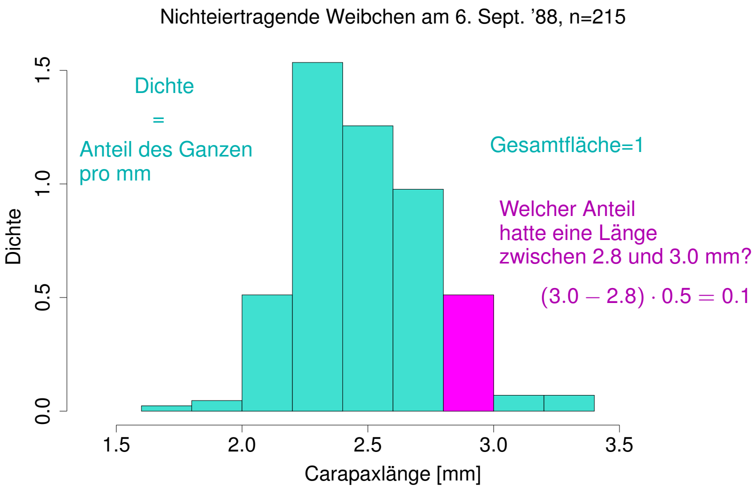

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
Gesamtfläche=1
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

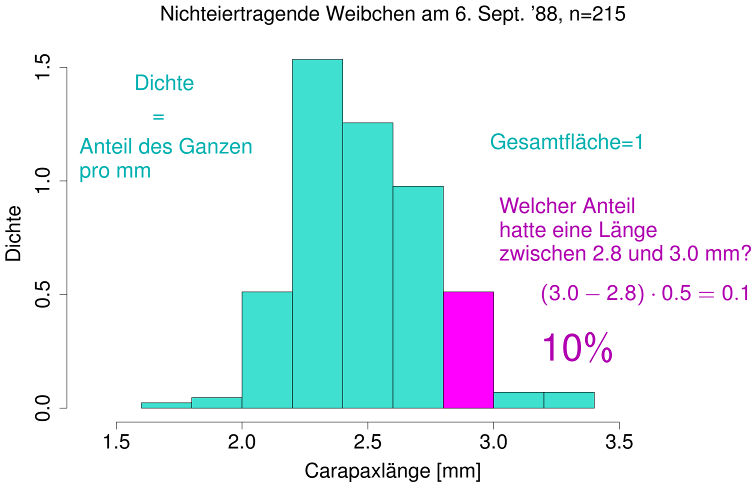

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Dichte ?
Gesamtfläche=1
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. ’88, n=215
Dichte
=
Anteil des Ganzen pro mm
Gesamtfläche=1
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Dichte
=
Anteil des Ganzen pro mm
Gesamtfläche=1
Welcher Anteil hatte eine Länge zwischen 2.8 und 3.0 mm?
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Dichte
=
Anteil des Ganzen
pro mm
Gesamtfläche=1
Welcher Anteil
hatte eine Länge
zwischen 2.8 und 3.0 mm?
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Dichte
=
Anteil des Ganzen pro mm
Gesamtfläche=1
Welcher Anteil hatte eine Länge zwischen 2.8 und 3.0 mm?
$(3.0 - 2.8) \cdot 0.5 = 0.1$
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

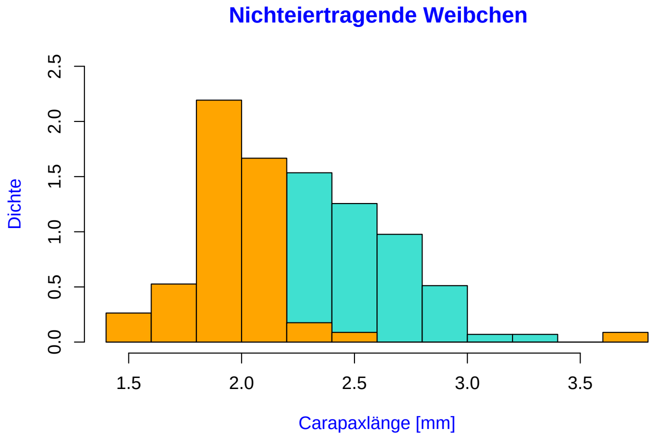

Nichteiertragende Weibchen am 6. Sept. '88, n=215
Dichte
=
Anteil des Ganzen pro mm
Gesamtfläche=1
Welcher Anteil hatte eine Länge zwischen 2.8 und 3.0 mm?
$(3.0 - 2.8) \cdot 0.5 = 0.1$
10%
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

Die beiden Histogramme sind jetzt vergleichbar

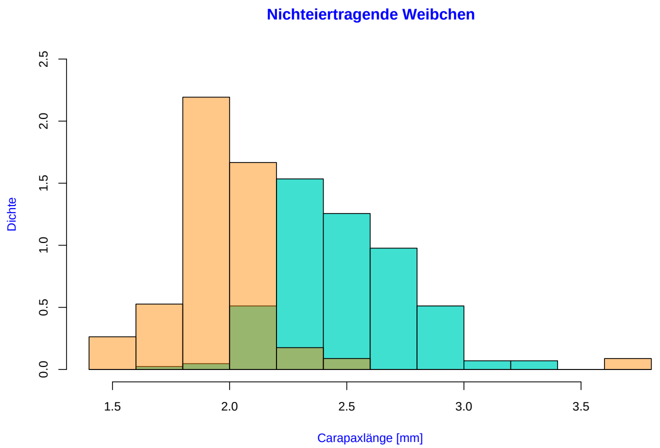
Die beiden Histogramme sind jetzt vergleichbar

(sie haben dieselbe Gesamtfläche).

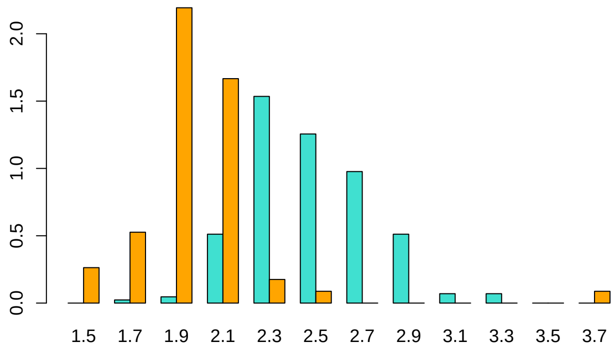
Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



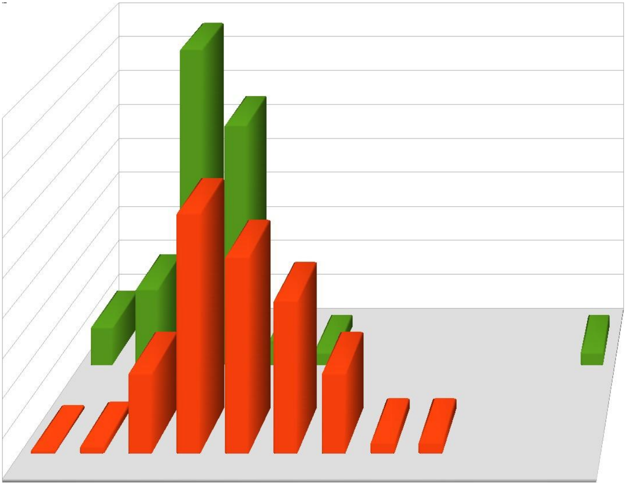
Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



Ratschlag

Beeindrucken Sie Jung und Alt mit total abgefahrenen 3D-Plots!

Ratschlag

Wenn Sie Schauwerbegestalter(in) sind:

Beeindrucken Sie Jung und Alt mit total abgefahrenen 3D-Plots!

Ratschlag

Wenn Sie Schauwerbegestalter(in) sind:

Beeindrucken Sie Jung und Alt mit total abgefahrenen 3D-Plots!

Wenn Sie Wissenschaftler(in) werden wollen:

Ratschlag

Wenn Sie Schauwerbegestalter(in) sind:

Beeindrucken Sie Jung und Alt mit total abgefahrenen 3D-Plots!

Wenn Sie Wissenschaftler(in) werden wollen:

Bevorzugen Sie einfache und klare 2D-Darstellungen.

Problem

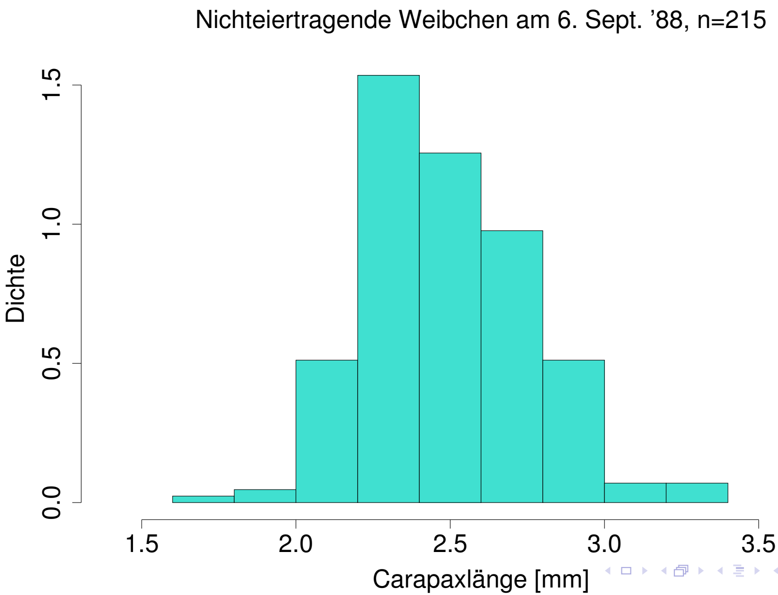
Histogramme kann man nicht ohne weiteres in demselben Graphen darstellen,

Problem

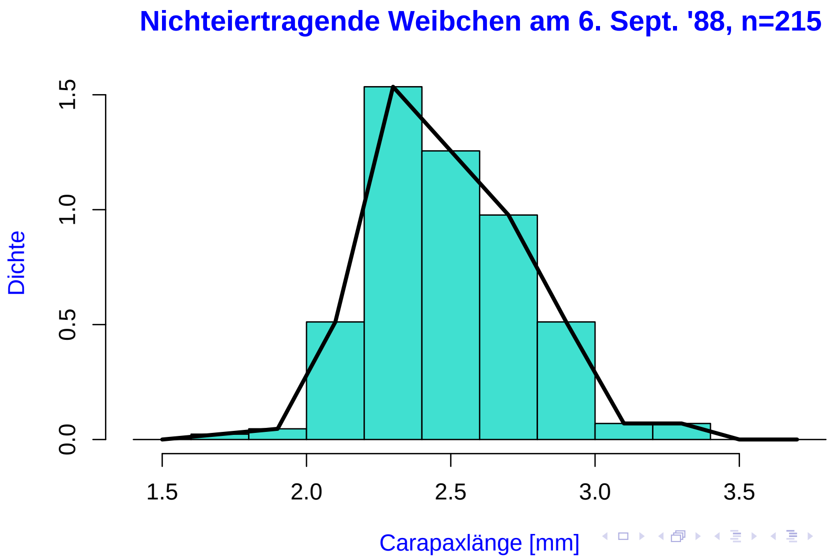
Histogramme kann man nicht ohne weiteres
in demselben Graphen
darstellen,

weil sie einander
überdecken würden.

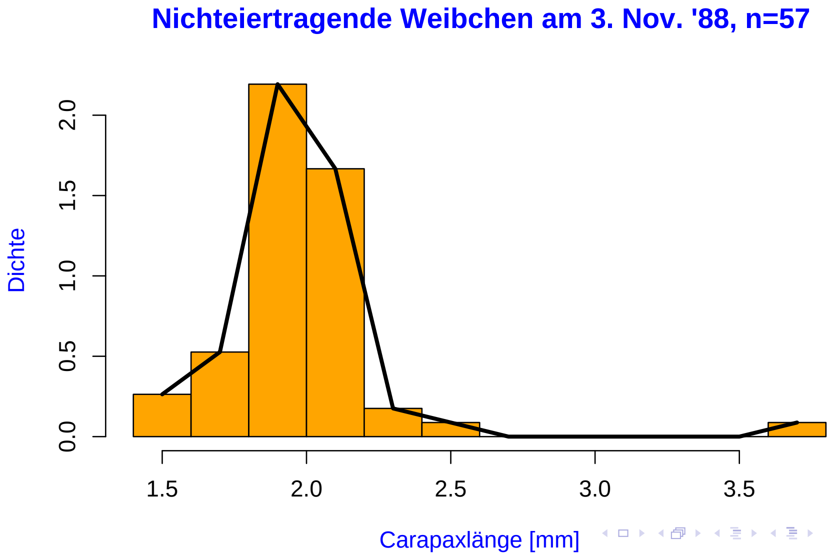
Einfache und klare Lösung: Dichtepolygone



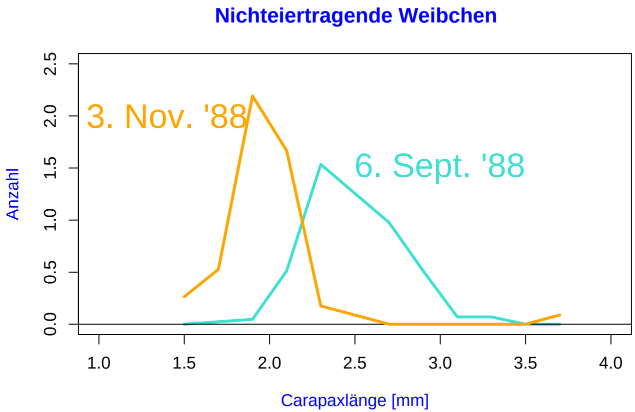
Einfache und klare Lösung: Dichtepolygone



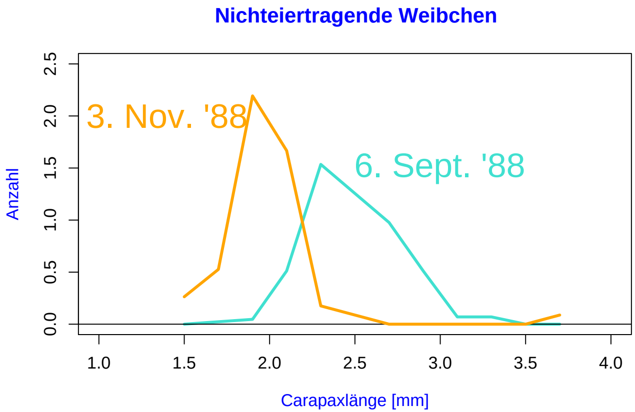
Einfache und klare Lösung: Dichtepolygone



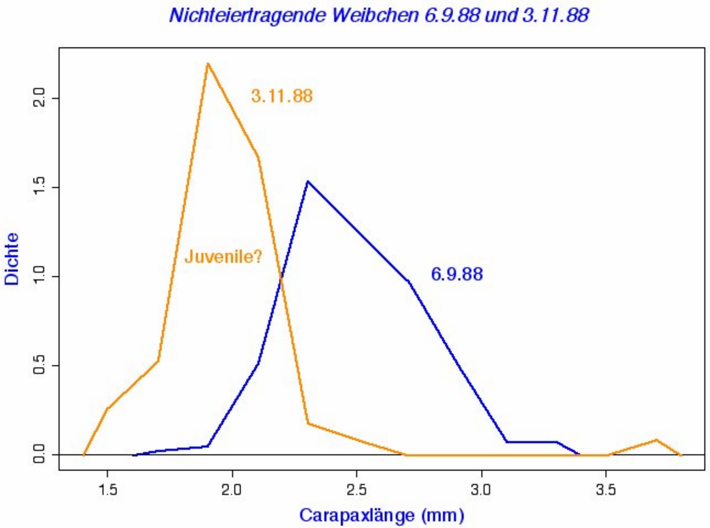
Zwei und mehr Dichtepolygone in einem Plot

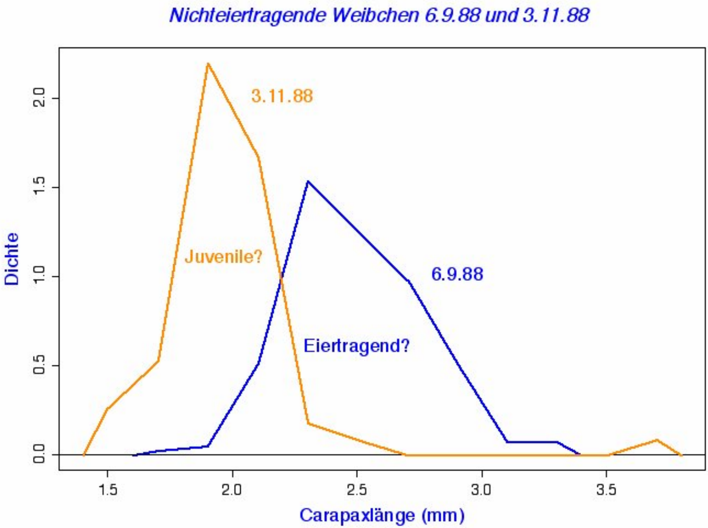


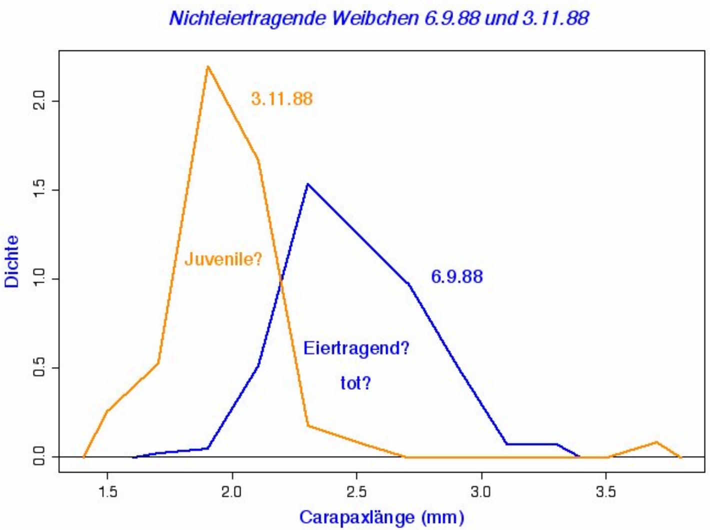
Zwei und mehr Dichtepolygone in einem Plot



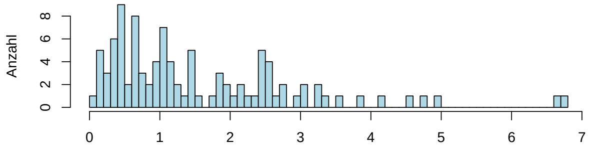
Biologische Interpretation der Verschiebung?


Nichteiertragende Weibchen 6.9.88 und 3.11.88
3.11.88
Juvenile?
6.9.88
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge (mm)

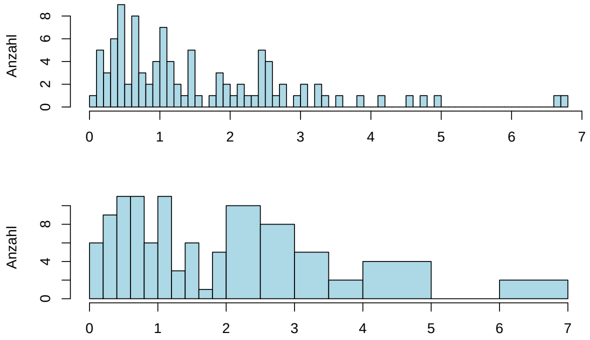

Nichteiertragende Weibchen 6.9.88 und 3.11.88
3.11.88
Juvenile?
6.9.88
Eiertragend?
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge (mm)


Nichteiertragende Weibchen 6.9.88 und 3.11.88
3.11.88
Juvenile?
6.9.88
Eiertragend?
tot?
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge (mm)

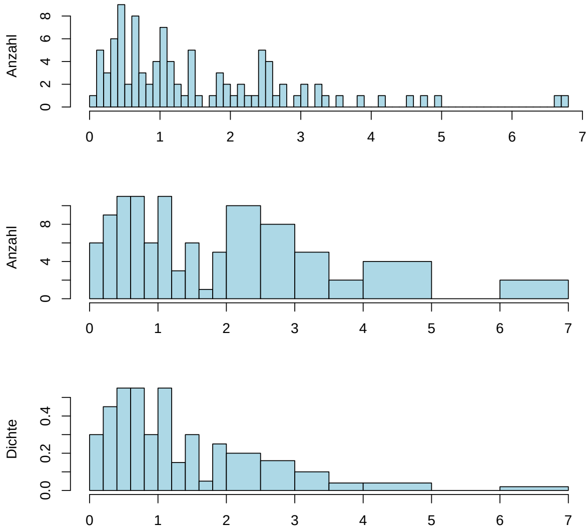
Anzahl vs. Dichte



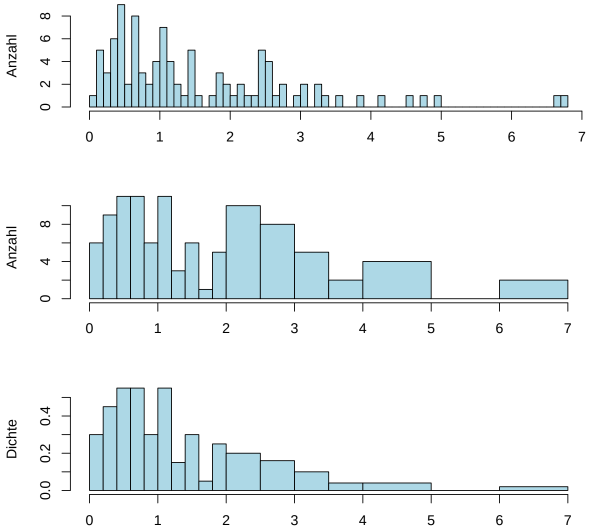
Anzahl vs. Dichte



Anzahl vs. Dichte

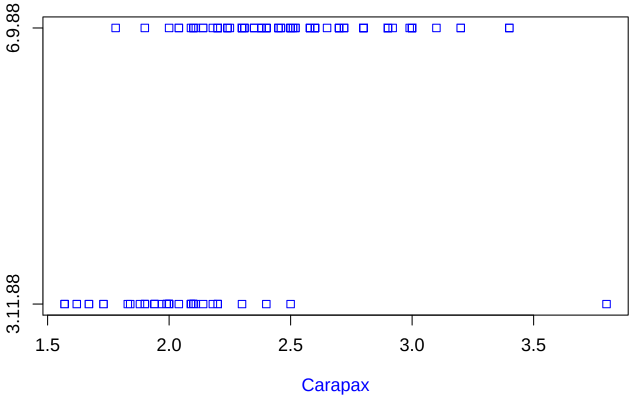


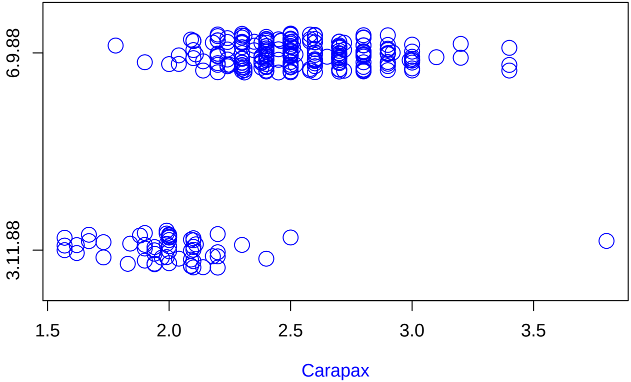
Anzahl vs. Dichte

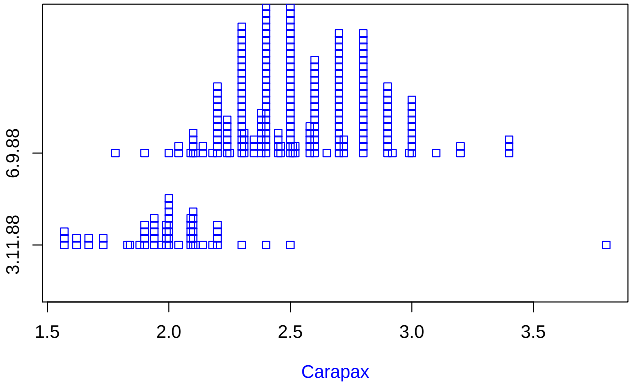


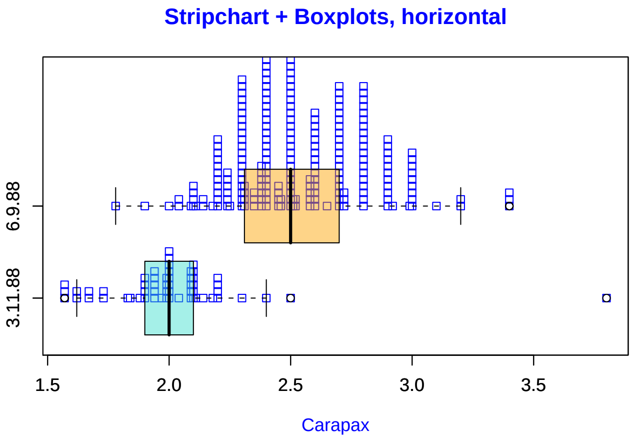
Also: Bei Histogrammen mit ungleichmäßiger Unterteilung immer Dichten verwenden!

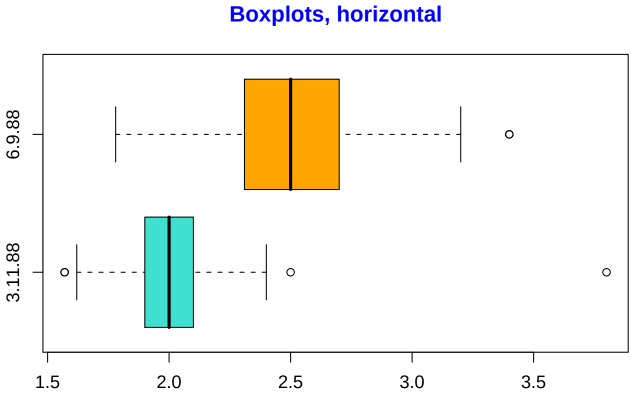
Inhalt


6.9.88
3.11.88
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapax

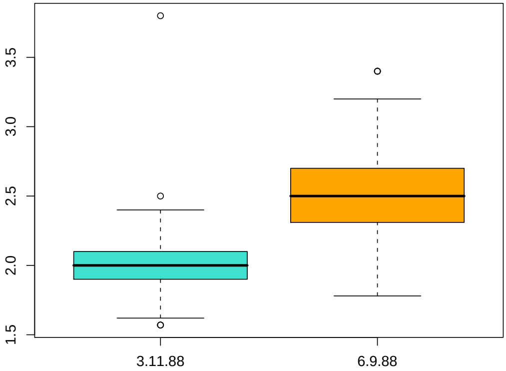

6.9.88
3.11.88
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapax


6.9.88
3.11.88
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapax


Stripchart + Boxplots, horizontal
6.9.88
3.11.88
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapax


Boxplots, horizontal
6.9.88
3.11.88
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5

Boxplots, vertikal



Histogramme und Dichtepolygone
geben
ein ausführliches Bild
eines Datensatzes.

Histogramme und Dichtepolygone
geben
ein ausführliches Bild
eines Datensatzes.

Manchmal zu ausführlich.

Inhalt

Zu viel Information erschwert den Überblick

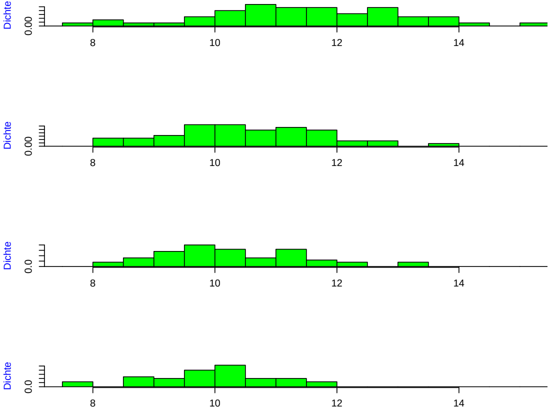
Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum

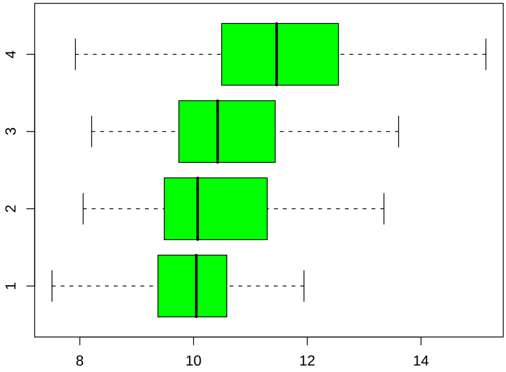
Zu viel Information erschwert den Überblick

Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum

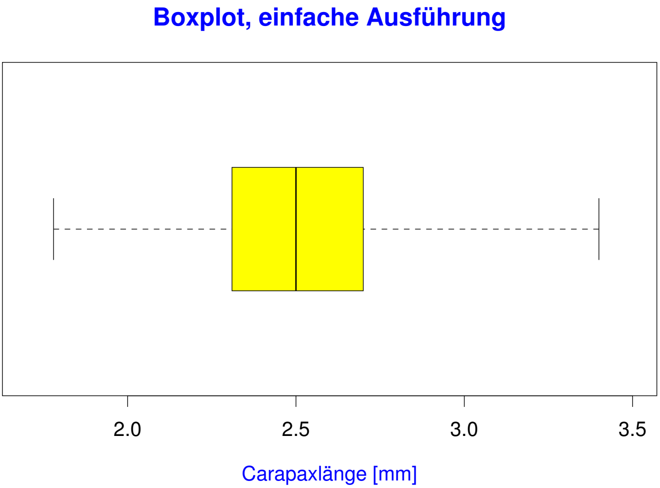
Wald?

Beispiel:
Vergleich von mehreren Gruppen

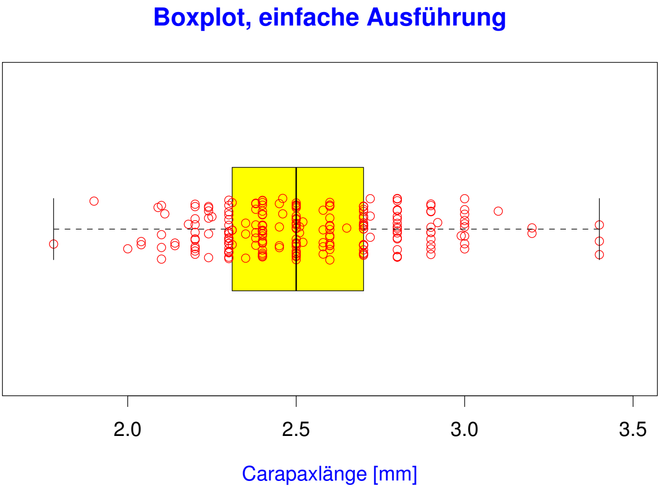

Dichte
0.00
8
10
12
14
Dichte
0.00
8
10
12
14
Dichte
0.0
8
10
12
14
Dichte
0.0
8
10
12
14


4
3
2
1
8
10
12
14

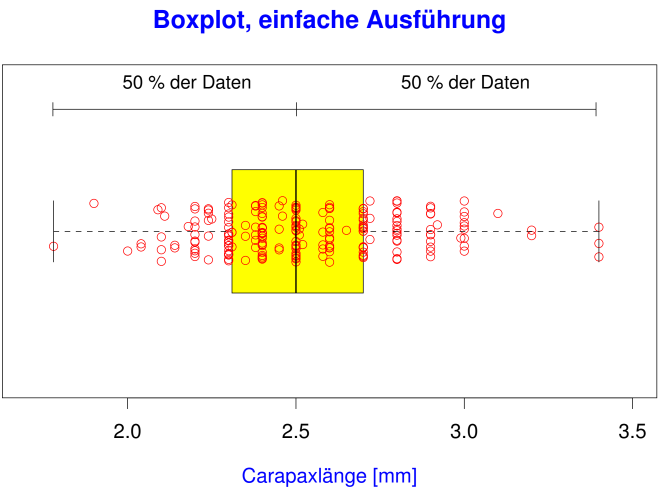
Der Boxplot



Der Boxplot



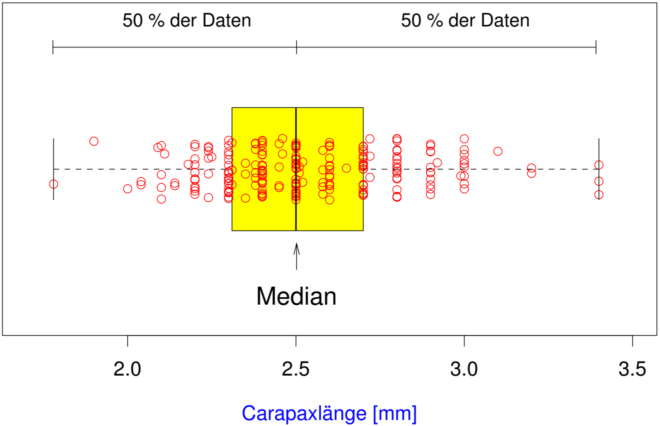
Der Boxplot



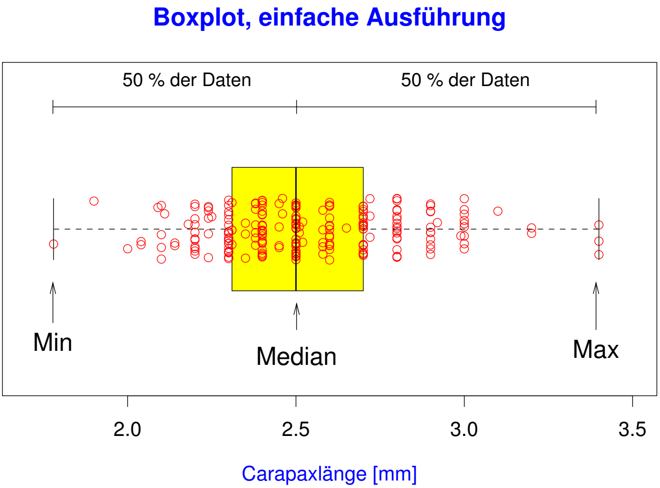
Boxplot, einfache Ausführung
50 % der Daten
50 % der Daten
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

Der Boxplot

Boxplot, einfache Ausführung

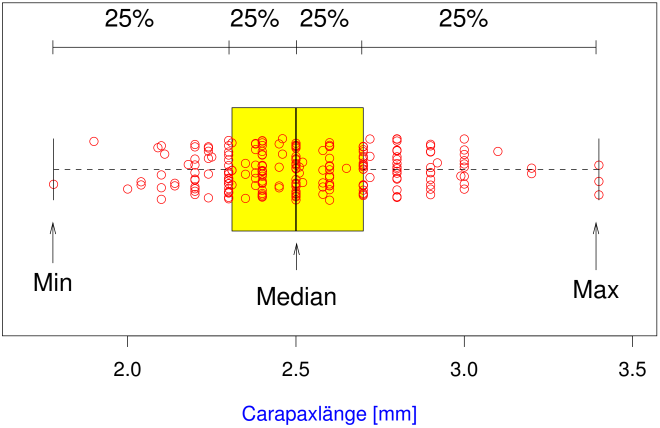


Der Boxplot

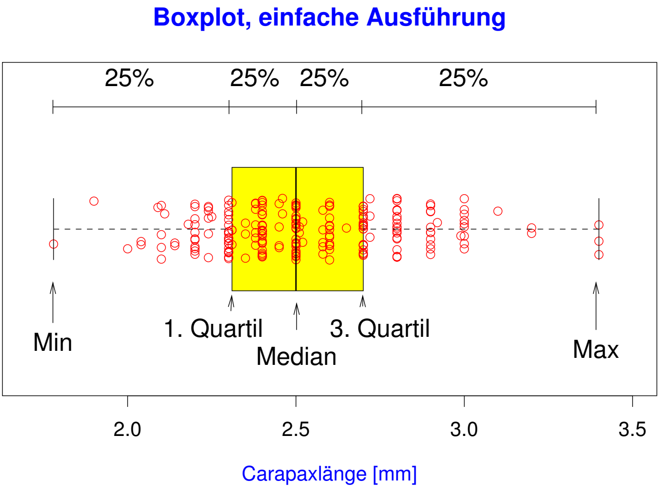

Boxplot, einfache Ausführung
50 % der Daten
50 % der Daten
Min
Median
Max
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

Der Boxplot

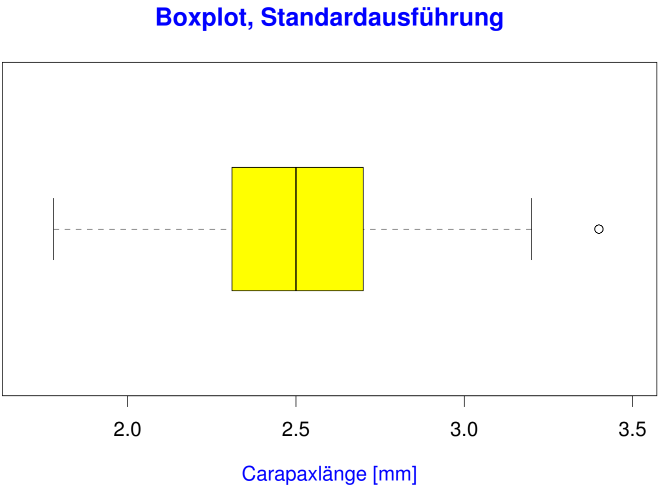
Boxplot, einfache Ausführung



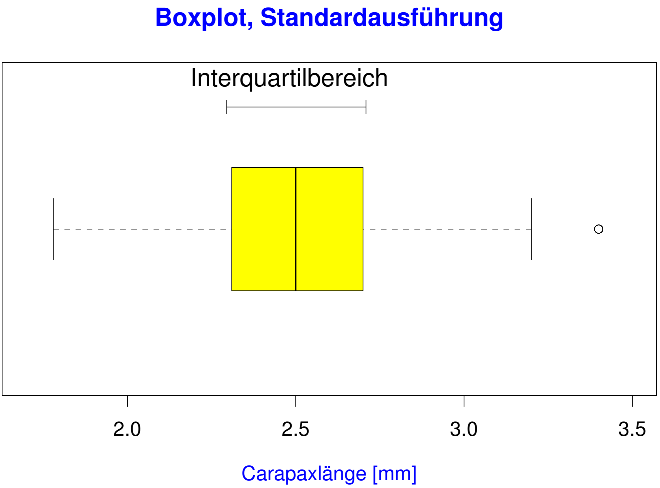
Der Boxplot


Boxplot, einfache Ausführung
25%
25%
25%
25%
Min
1. Quartil
Median
3. Quartil
Max
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

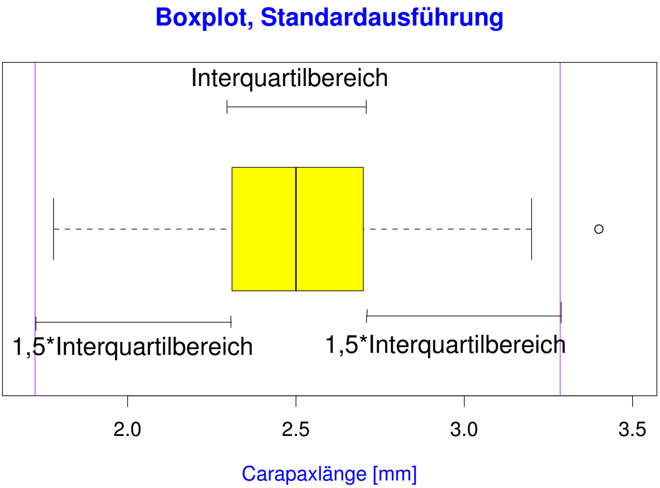
Der Boxplot



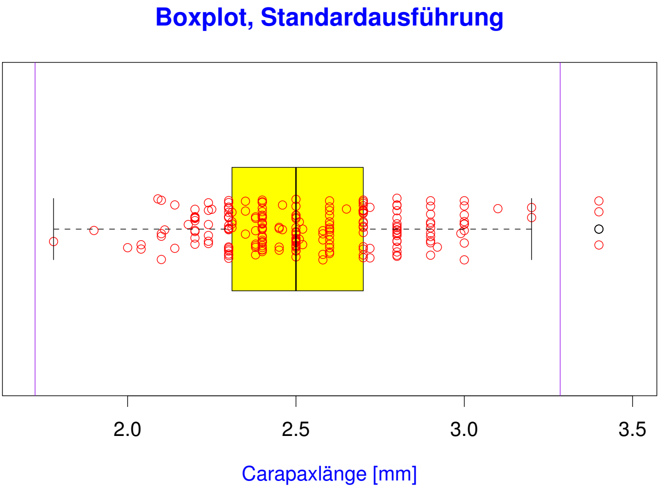
Der Boxplot


Boxplot, Standardausführung
Interquartilbereich
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

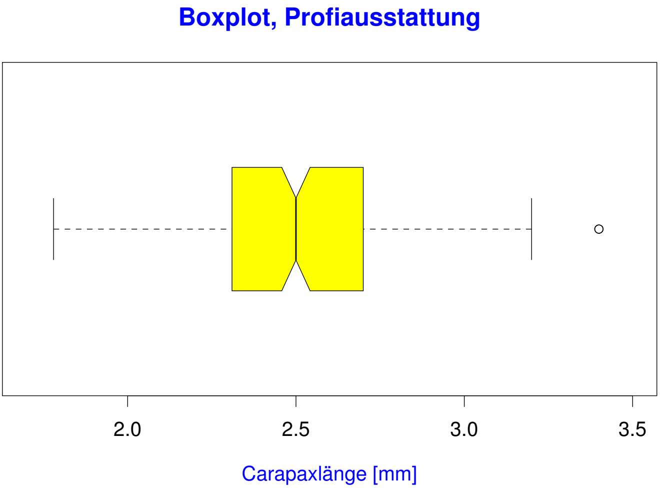
Der Boxplot


Boxplot, Standardausführung
Interquartilbereich
1,5*Interquartilbereich
1,5*Interquartilbereich
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

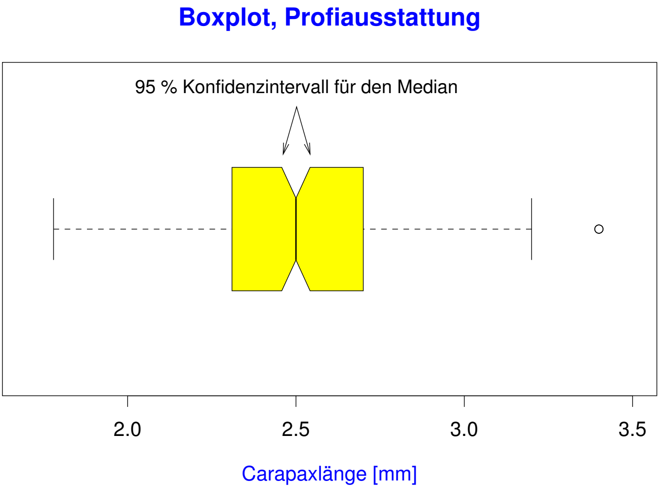
Der Boxplot



Der Boxplot



Der Boxplot


Boxplot, Profiausstattung
95 % Konfidenzintervall für den Median
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]

Inhalt

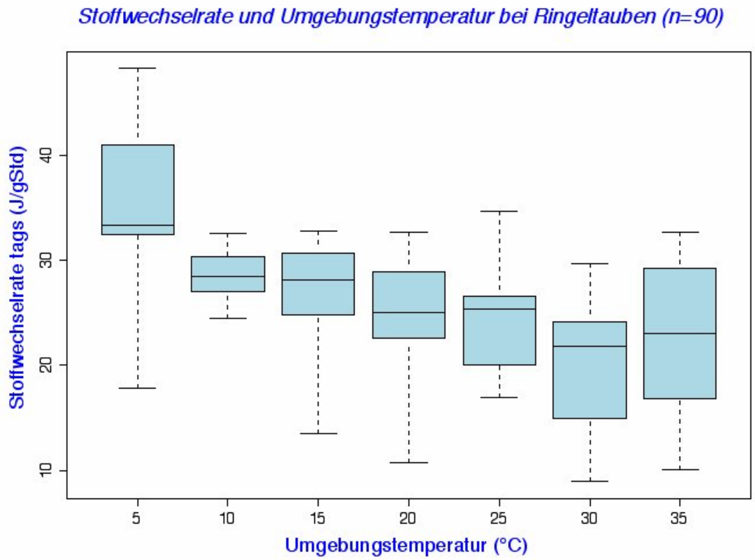
Beispiel:

Die Ringeltaube

Palumbus palumbus

Wie hängt die Stoffwechselrate bei der Ringeltaube von der Umgebungstemperatur ab?

Daten
aus dem
AK Stoffwechselphysiologie
Prof. Prinzinger
Universität Frankfurt


Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

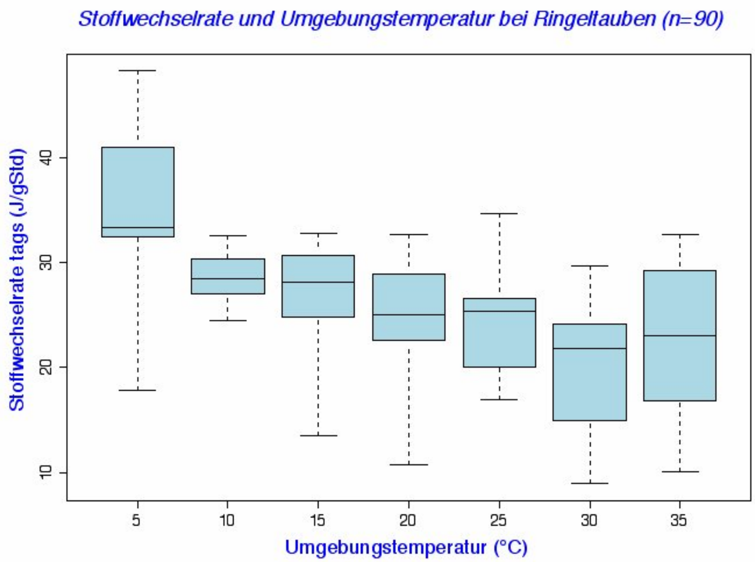
Klar:

Stoffwechselrate

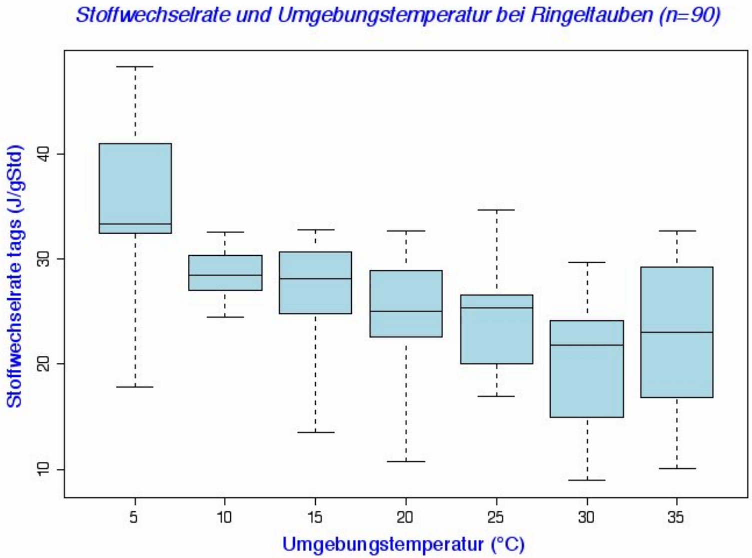
höher

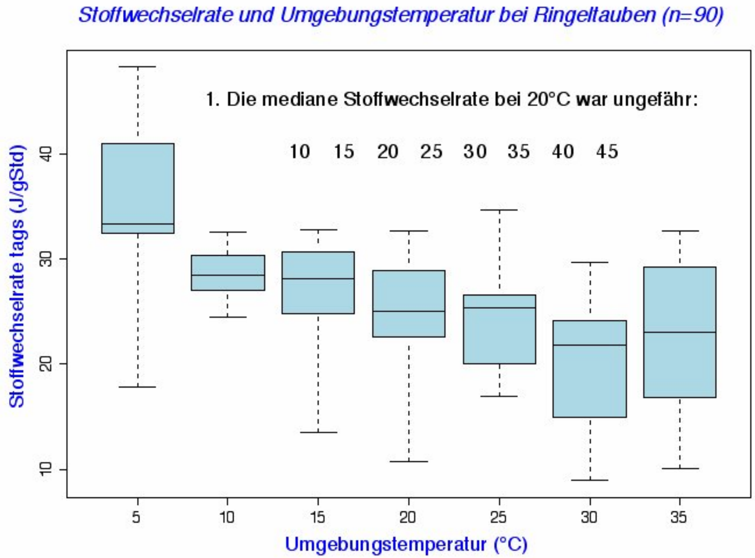
bei

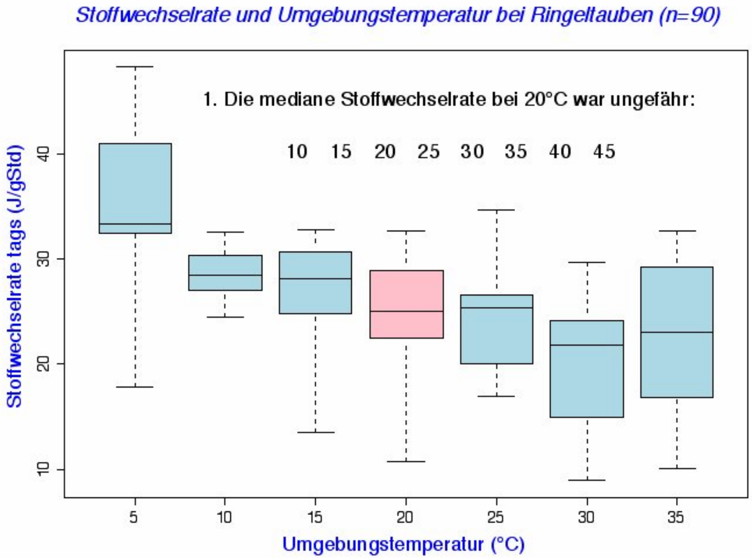
tiefen Temperaturen

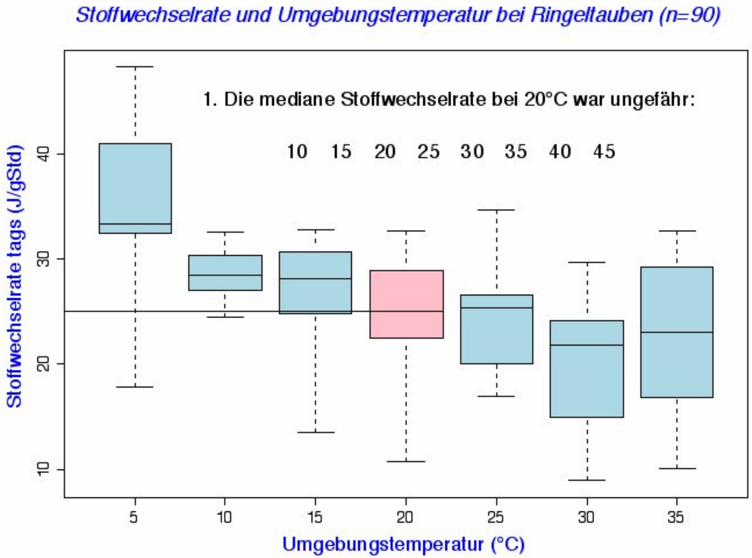

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

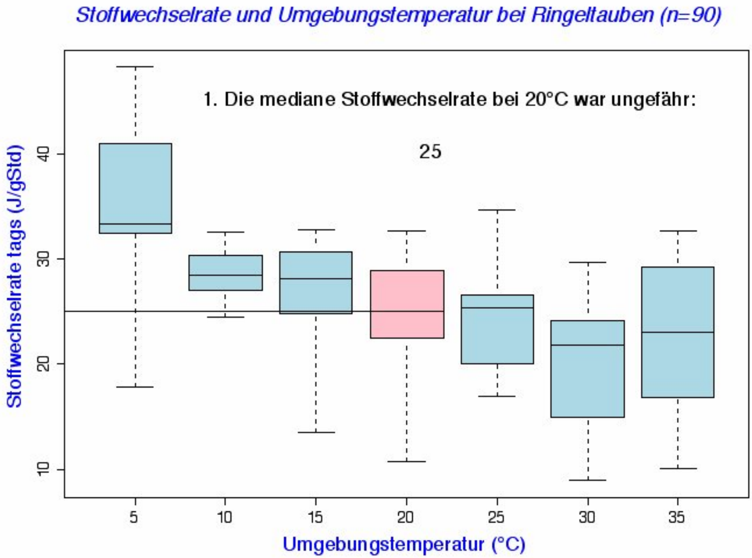
Vermutung:
Bei hohen Temperaturen
nimmt die Stoffwechselrate
wieder zu
(Hitzestress).

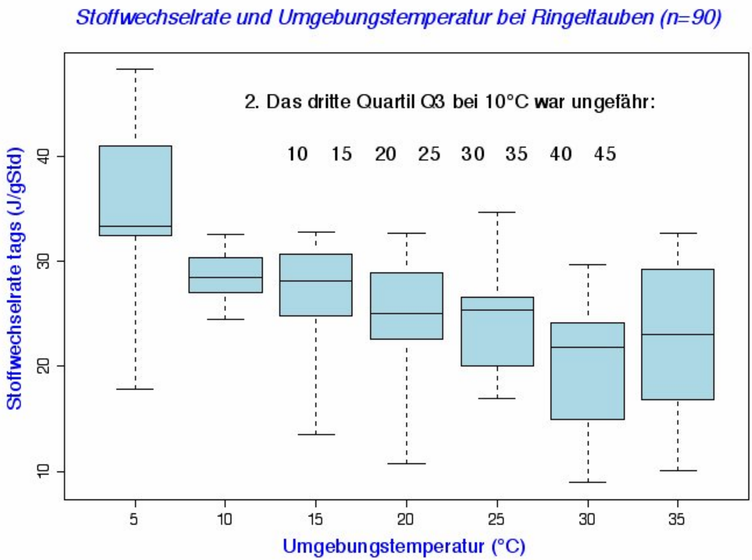

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

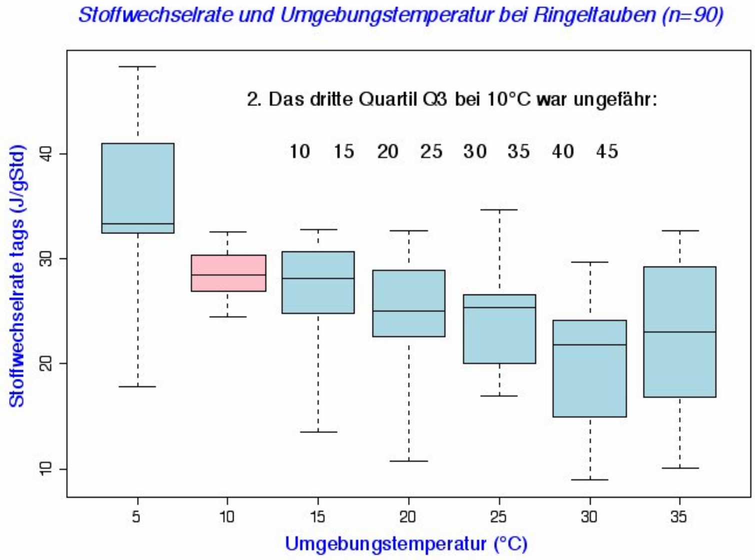

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
1. Die mediane Stoffwechselrate bei 20°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

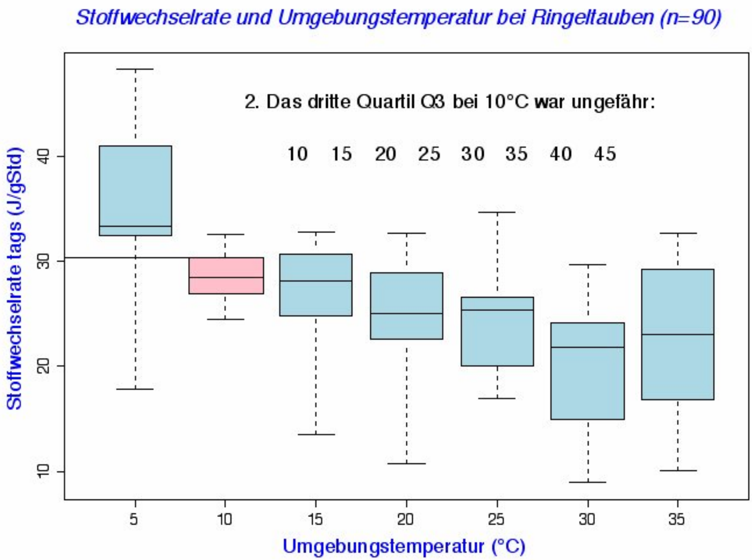

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
1. Die mediane Stoffwechselrate bei 20°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

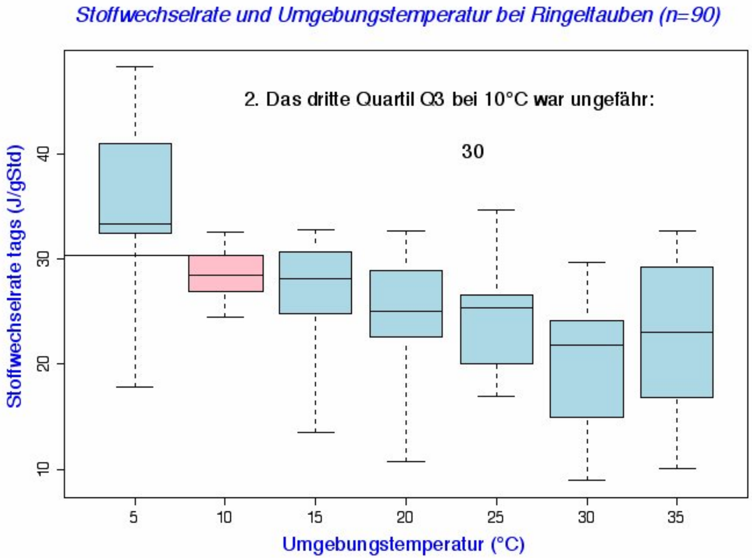

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
1. Die mediane Stoffwechselrate bei 20°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

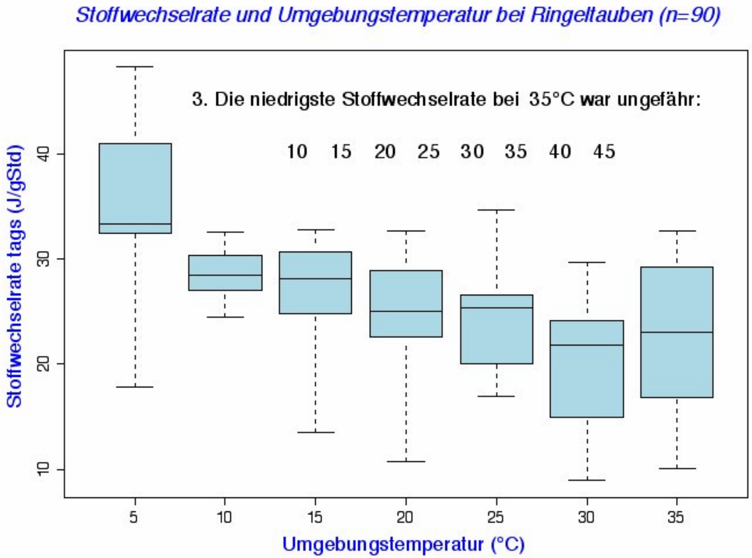

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
1. Die mediane Stoffwechselrate bei 20°C war ungefähr:
25
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

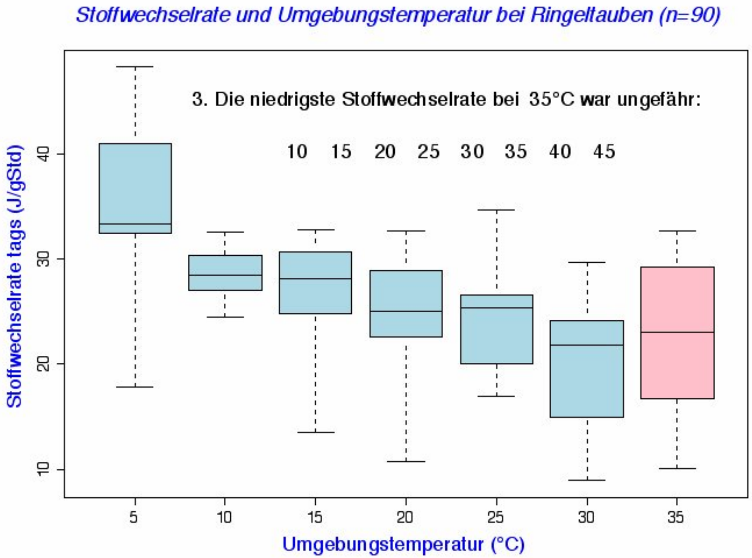

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
2. Das dritte Quartil Q3 bei 10°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

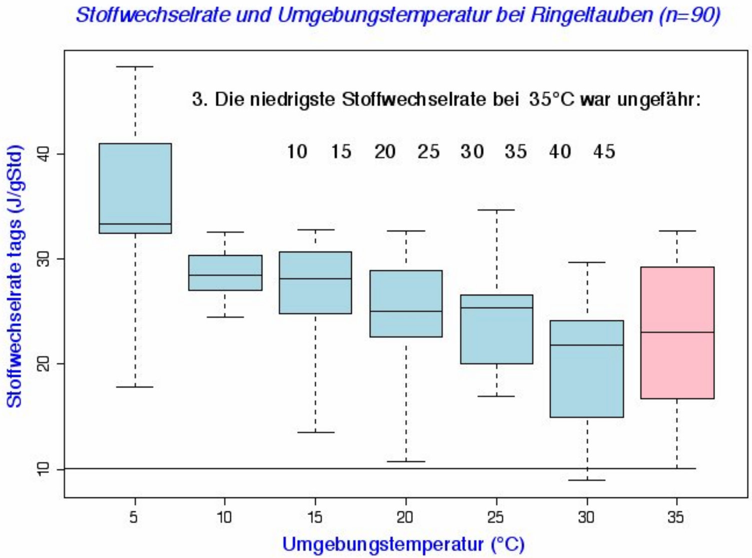

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
2. Das dritte Quartil Q3 bei 10°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)


Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
2. Das dritte Quartil Q3 bei 10°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

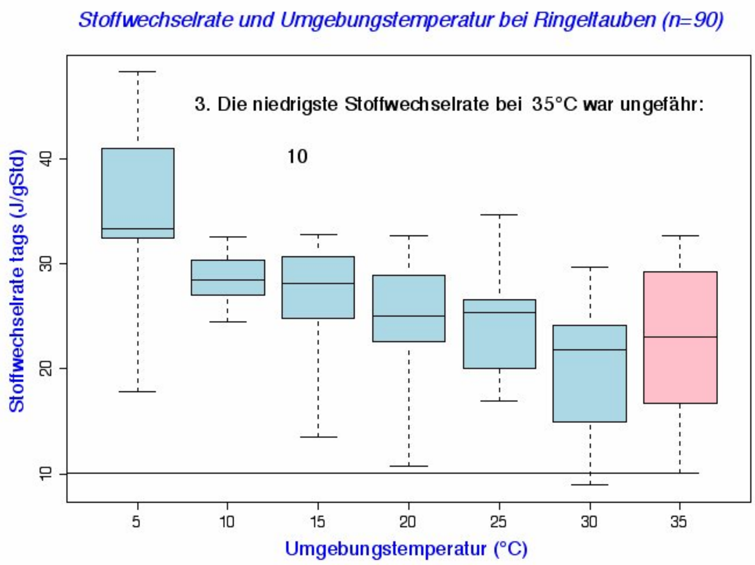

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
2. Das dritte Quartil Q3 bei 10°C war ungefähr:
30
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)


Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
3. Die niedrigste Stoffwechselrate bei 35°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)


Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
3. Die niedrigste Stoffwechselrate bei 35°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)



Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
3. Die niedrigste Stoffwechselrate bei 35°C war ungefähr:
10 15 20 25 30 35 40 45
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

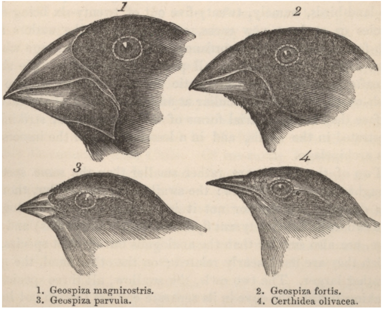

Stoffwechselrate und Umgebungstemperatur bei Ringeltauben (n=90)
3. Die niedrigste Stoffwechselrate bei 35°C war ungefähr:
10
Stoffwechselrate tags (J/gStd)
10
20
30
40
5
10
15
20
25
30
35
Umgebungstemperatur (°C)

Inhalt

Charles Robert Darwin (1809-1882)

Charles Robert Darwin (1809-1882)

Darwin-Finken



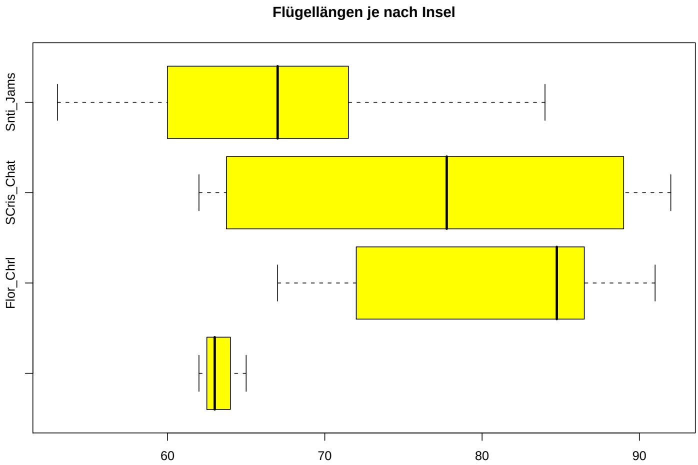
http:
//darwin-online.org.uk/graphics/Zoology_Illustrations.html

Darwins Finken-Sammlung

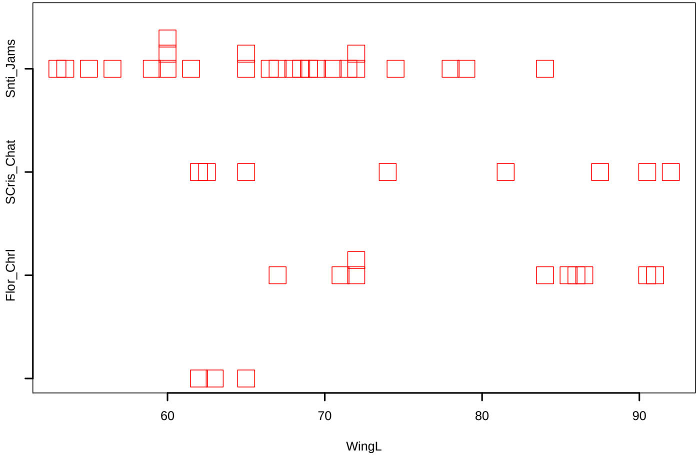
Sulloway, F.J. (1982) The Beagle collections of Darwin's Finches (Geospizinae). *Bulletin of the British Museum (Natural History), Zoology series* **43**: 49-94.

- http://datadryad.org/repo/handle/10255/dryad.154

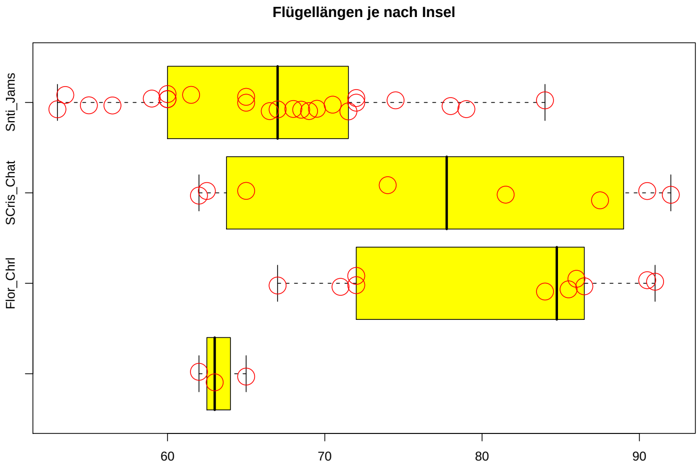
Flügellängen der Darwin-Finken



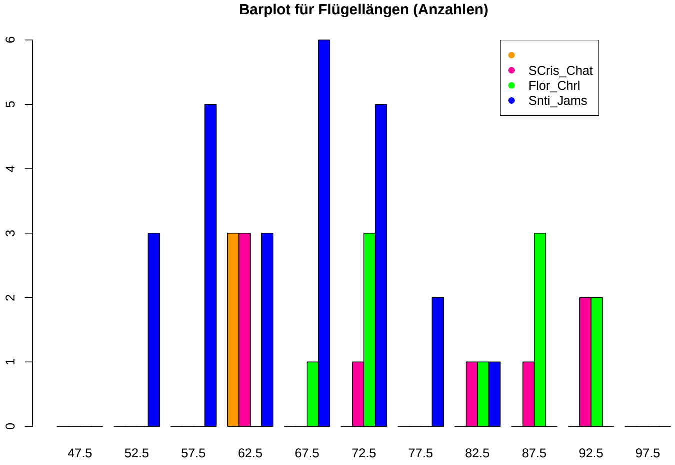
Flügellängen der Darwin-Finken



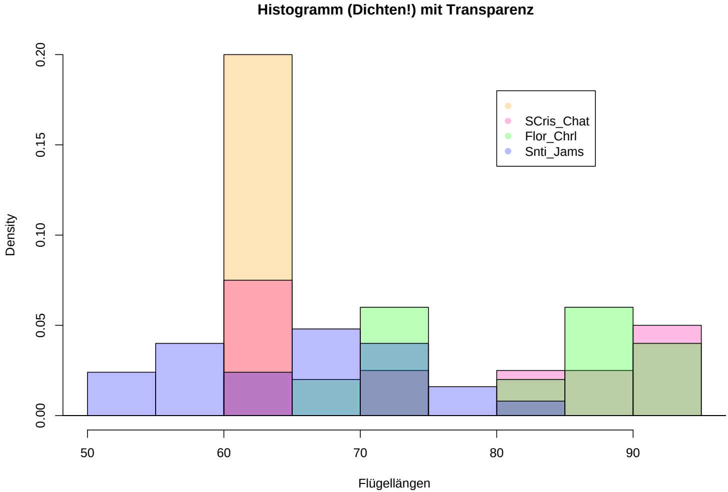
Flügellängen der Darwin-Finken



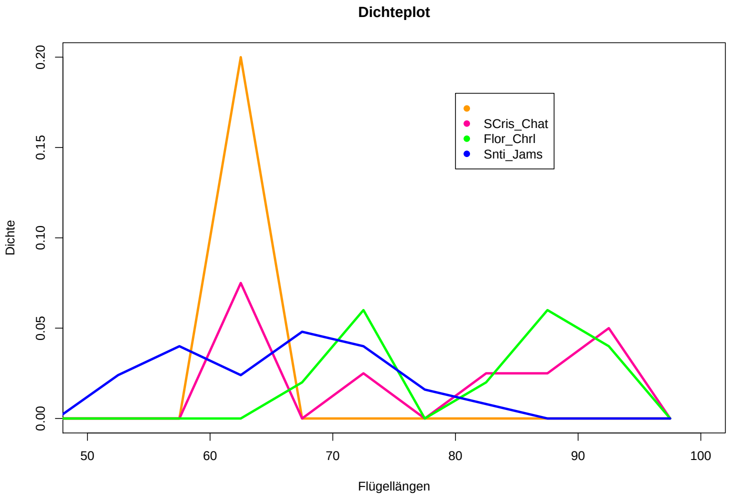
Flügellängen der Darwin-Finken

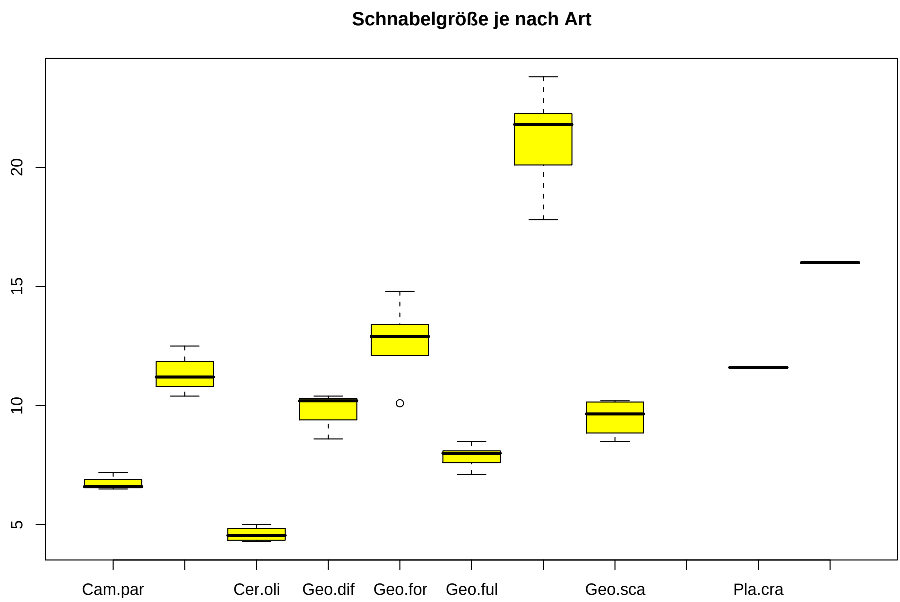


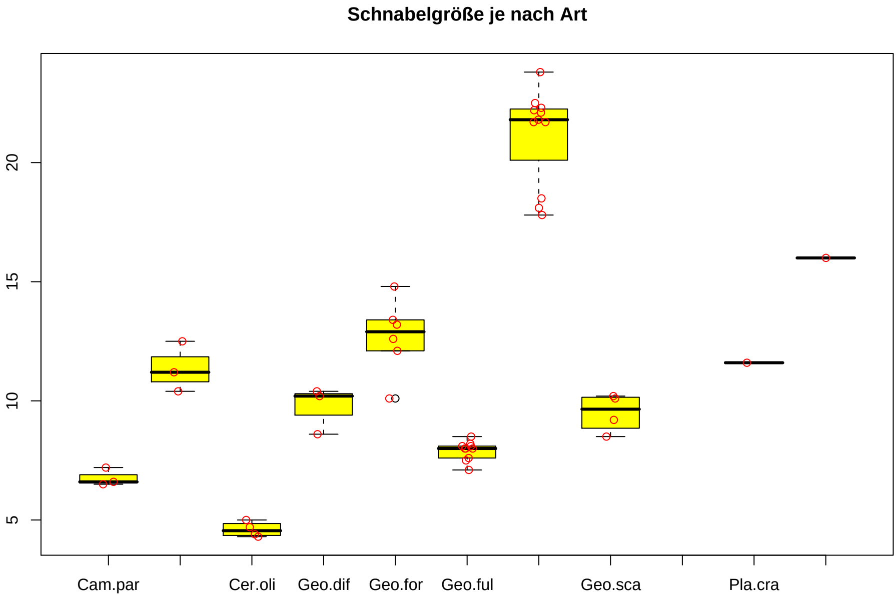
Flügellängen der Darwin-Finken



Flügellängen der Darwin-Finken




Schnabelgröße je nach Art
5
10
15
20
Cam.par
Cer.oli
Geo.dif
Geo.for
Geo.ful
Geo.sca
Pla.cra


Schnabelgröße je nach Art
5
10
15
20
Cam.par
Cer.oli
Geo.dif
Geo.for
Geo.ful
Geo.sca
Pla.cra

Fazit

1. Histogramme erlauben einen detailierten Blick auf die Daten

Fazit

1. Histogramme erlauben einen detailierten Blick auf die Daten
2. Dichtepolygone erlauben Vergleiche zwischen vielen Verteilungen

Fazit

1. Histogramme erlauben einen detailierten Blick auf die Daten
2. Dichtepolygone erlauben Vergleiche zwischen vielen Verteilungen
3. Boxplot können große Datenmengen vereinfacht zusammenfassen

Fazit

1. Histogramme erlauben einen detailierten Blick auf die Daten
2. Dichtepolygone erlauben Vergleiche zwischen vielen Verteilungen
3. Boxplot können große Datenmengen vereinfacht zusammenfassen
4. Bei kleinen Datenmengen eher Stripcharts verwenden

Fazit

1. Histogramme erlauben einen detailierten Blick auf die Daten
2. Dichtepolygone erlauben Vergleiche zwischen vielen Verteilungen
3. Boxplot können große Datenmengen vereinfacht zusammenfassen
4. Bei kleinen Datenmengen eher Stripcharts verwenden
5. Vorsicht mit Tricks wie 3D oder halbtransparenten Farben

Fazit

1. Histogramme erlauben einen detailierten Blick auf die Daten
2. Dichtepolygone erlauben Vergleiche zwischen vielen Verteilungen
3. Boxplot können große Datenmengen vereinfacht zusammenfassen
4. Bei kleinen Datenmengen eher Stripcharts verwenden
5. Vorsicht mit Tricks wie 3D oder halbtransparenten Farben
6. Jeder Datensatz ist anders; keine Patentrezepte

Inhalt

Es ist oft möglich,
das Wesentliche
an einer Stichprobe

mit ein paar Zahlen
zusammenzufassen.

Wesentlich:

1. Wie groß?

2. Wie variabel?

Wesentlich:

1. Wie groß?

Lageparameter

2. Wie variabel?

Wesentlich:

1. Wie groß?

Lageparameter

2. Wie variabel?

Streuungsparameter

Eine Möglichkeit
kennen wir schon
aus dem Boxplot:

Lageparameter

Der Median

Lageparameter

Der Median

Streuungsparameter

Lageparameter

Der Median

Streuungsparameter

Der Quartilabstand ($Q_3 - Q_1$)

Inhalt

Der Median:

die Hälfte der Beobachtungen sind kleiner,

die Hälfte sind größer.

Der Median:

die Hälfte der Beobachtungen sind kleiner,
die Hälfte sind größer.

Der Median ist
das 50%-Quantil
der Daten.

Die Quartile

Das erste Quartil, Q_1:

Die Quartile

Das erste Quartil, Q_1:
ein Viertel der Beobachtungen
sind kleiner,
drei Viertel sind größer.

Die Quartile

Das erste Quartil, Q_1:
ein Viertel der Beobachtungen
sind kleiner,
drei Viertel sind größer.

Q_1 ist das
25%-Quantil
der Daten.

Die Quartile

Das dritte Quartil, Q_3:

Die Quartile

Das dritte Quartil, Q_3:
drei Viertel der Beobachtungen
sind kleiner,
ein Viertel sind größer.

Die Quartile

Das dritte Quartil, Q_3:
drei Viertel der Beobachtungen
sind kleiner,
ein Viertel sind größer.

Q_3 ist das
75%-Quantil
der Daten.

Inhalt

Am häufigsten werden benutzt:

Lageparameter

Der Mittelwert $\overline{x}$

Am häufigsten werden benutzt:

Lageparameter

Der Mittelwert $\overline{x}$

Streuungsparameter

Die Standardabweichung s

Der Mittelwert

(engl. *mean*)

NOTATION:

Wenn die Beobachtungen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

heißen,

schreibt man oft

$$\overline{x}$$

für den Mittelwert.

DEFINITION:

$$\text{Mittelwert} = \frac{\text{Summe der Messwerte}}{\text{Anzahl der Messwerte}}$$

DEFINITION:

$$\text{Mittelwert} = \frac{\text{Summe}}{\text{Anzahl}}$$

DEFINITION:

Der Mittelwert von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Formel:

DEFINITION:

Der Mittelwert von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Formel:

$$\overline{x} \;=\; (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$$

DEFINITION:

Der Mittelwert von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Formel:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

Beispiel:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 1$$

Beispiel:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 1$$

$$\overline{x} = \text{Summe}/\text{Anzahl}$$

Beispiel:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 1$$

$$\overline{x} = \text{Summe}/\text{Anzahl}$$

$$\overline{x} = (3 + 0 + 2 + 3 + 1)/5$$

Beispiel:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 1$$

$$\overline{x} = \text{Summe}/\text{Anzahl}$$

$$\overline{x} = (3 + 0 + 2 + 3 + 1)/5$$

$$\overline{x} = 9/5$$

Beispiel:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 1$$

$$\overline{x} = \text{Summe}/\text{Anzahl}$$

$$\overline{x} = (3 + 0 + 2 + 3 + 1)/5$$

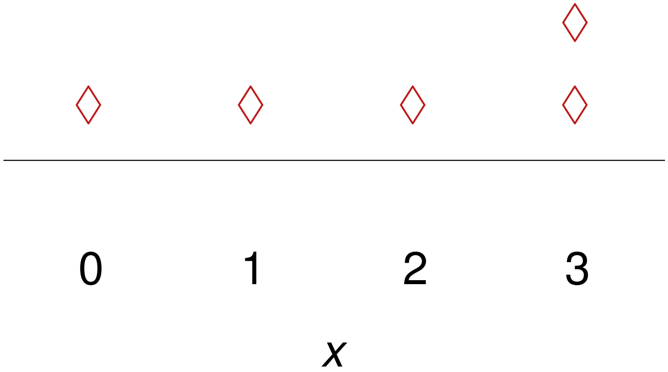
$$\overline{x} = 9/5$$

$$\overline{x} = 1{,}8$$

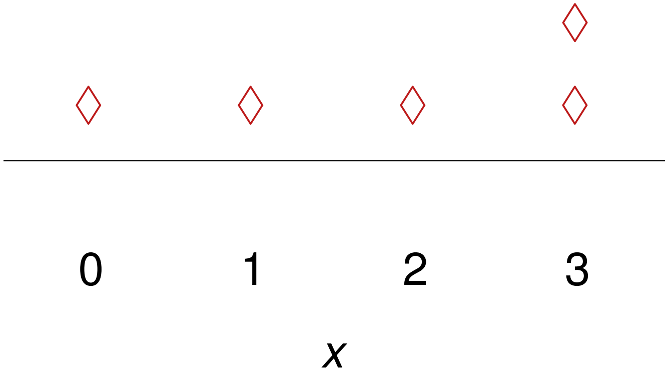
Geometrische Bedeutung des Mittelwerts:

Der Schwerpunkt

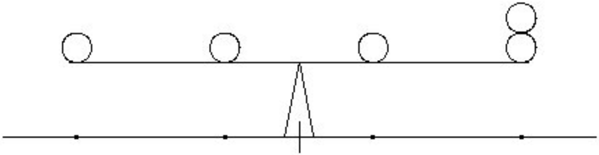
Wir stellen uns die Beobachtungen als gleich schwere Gewichte auf einer Waage vor:



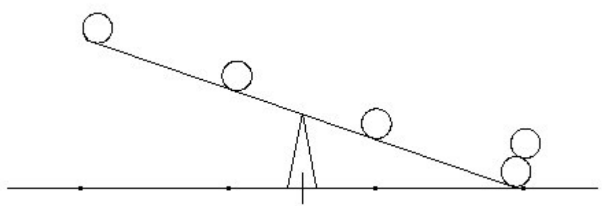
Wo muß der Drehpunkt sein, damit die Waage im Gleichgewicht ist?



$$m = 1{,}5\ ?$$

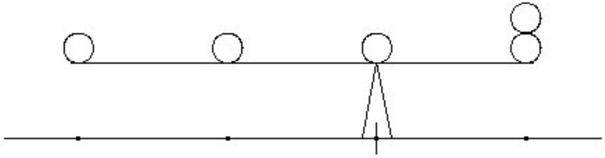


$$m = 1{,}5\ ?$$

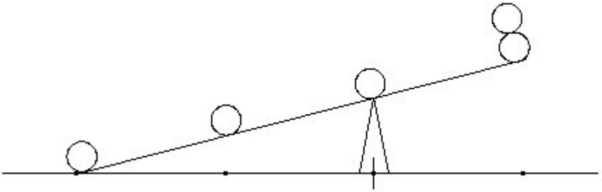


zu klein

$$m = 2\ ?$$

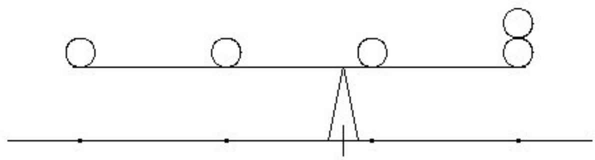


$$m = 2\ ?$$

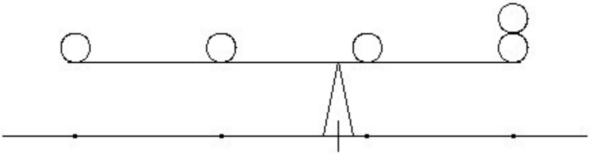


zu groß

$$m = 1{,}8\ ?$$



$$m = 1{,}8\ ?$$



richtig

Beispiel: *Galathea intermedia*

„Rundlichkeit“

:=

Abdominalbreite / Carapaxlänge

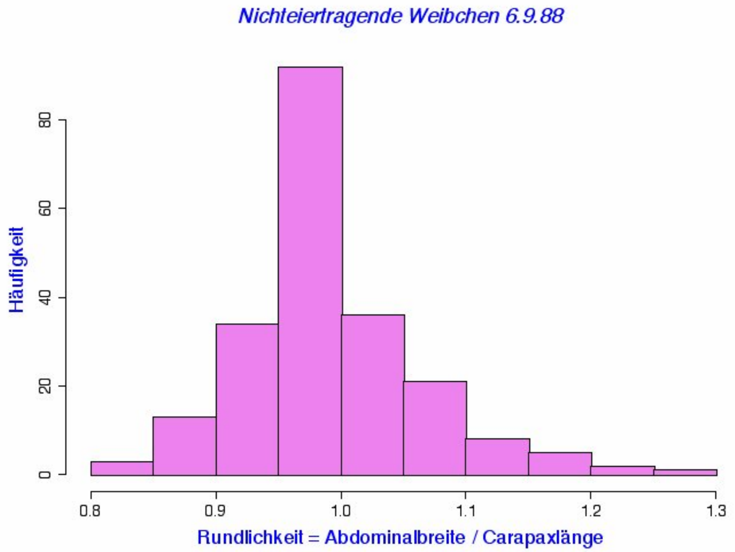
Beispiel: *Galathea intermedia*

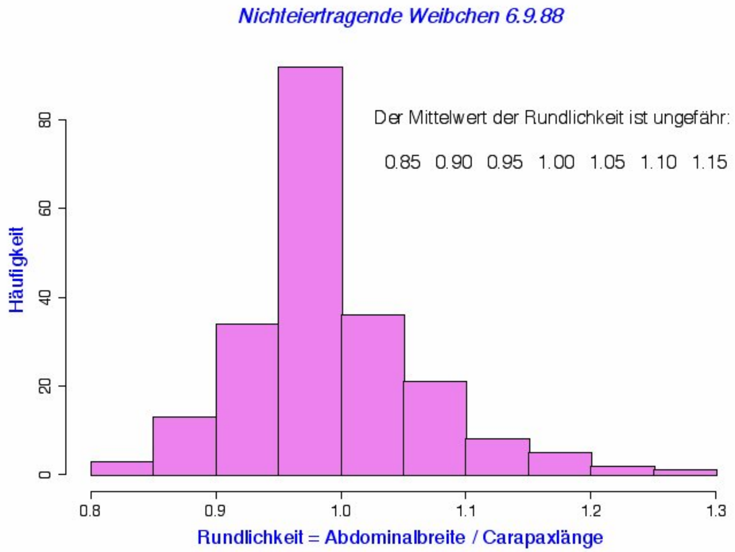
„Rundlichkeit“

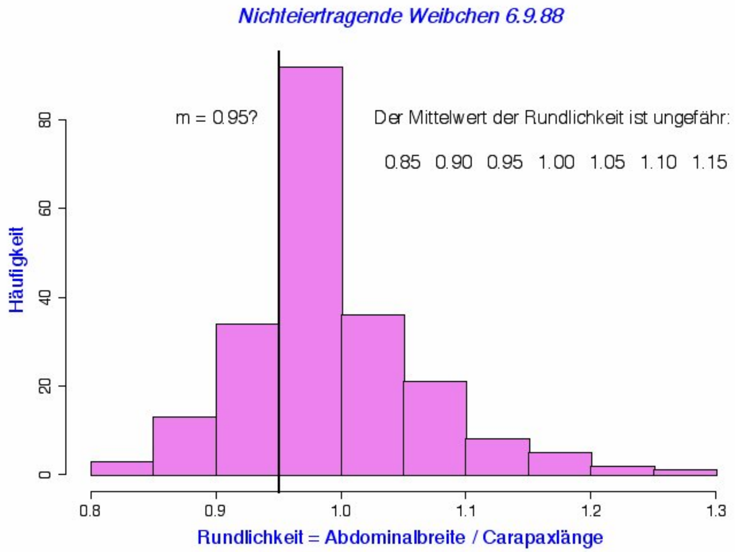
:=

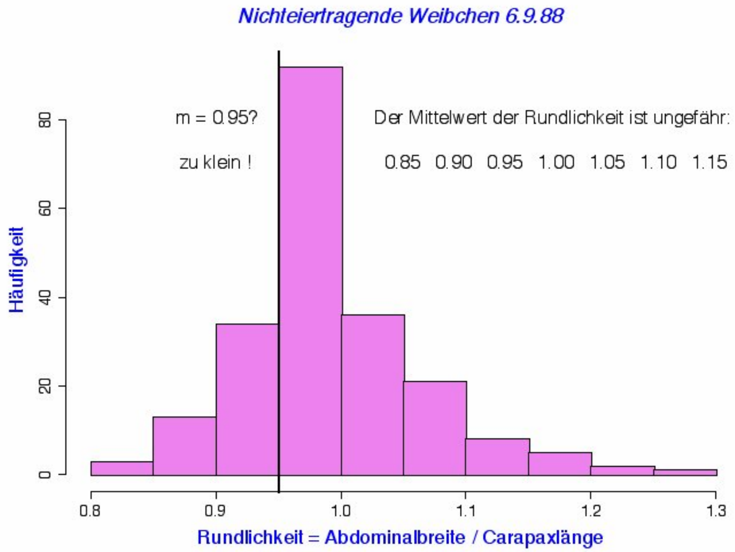
Abdominalbreite / Carapaxlänge

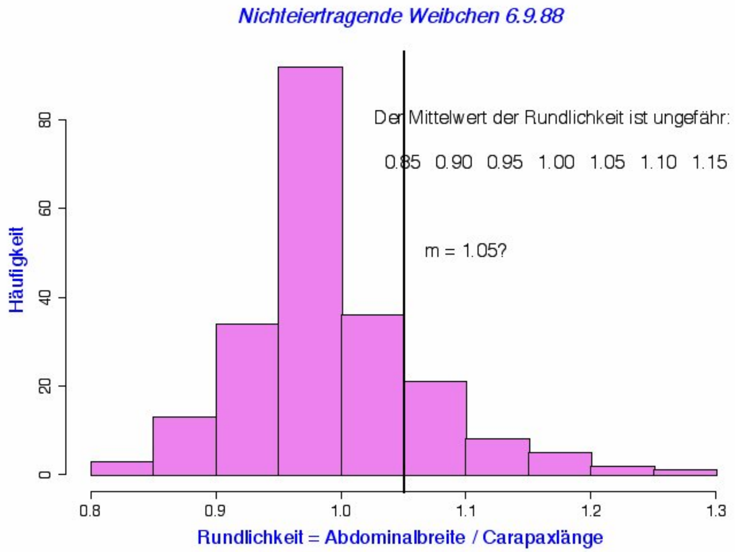
Vermutung:
Rundlichkeit nimmt
bei Geschlechtsreife zu

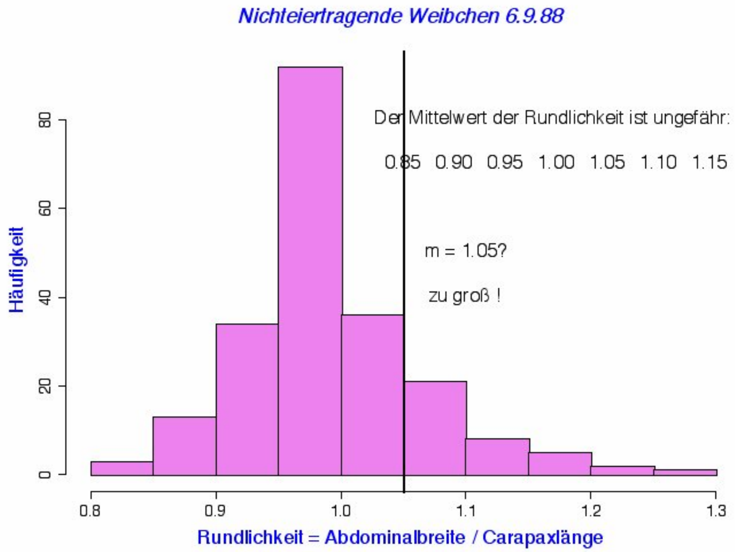

Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

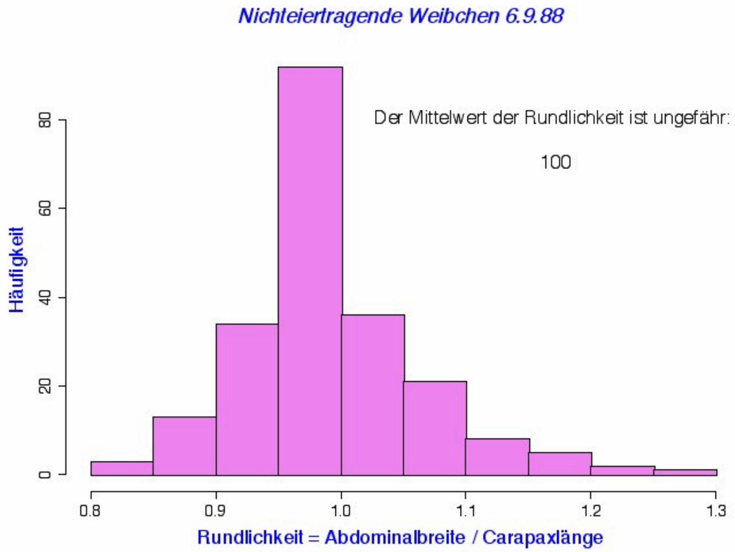

Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
Der Mittelwert der Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10 1.15
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

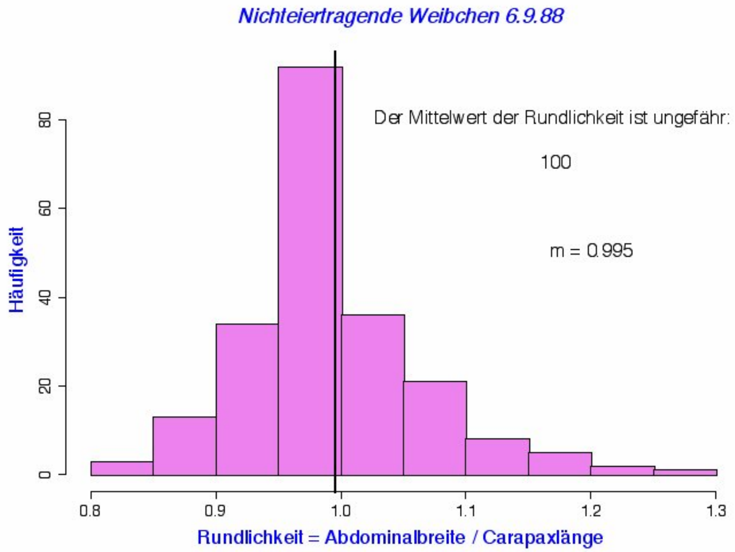

Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
m = 0.95?
Der Mittelwert der Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10 1.15
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge


Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
m = 0.95?
zu klein !
Der Mittelwert der Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10 1.15
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge


Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
Der Mittelwert der Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10 1.15
m = 1.05?
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge


Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
Der Mittelwert der Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10 1.15
m = 1.05?
zu groß !
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

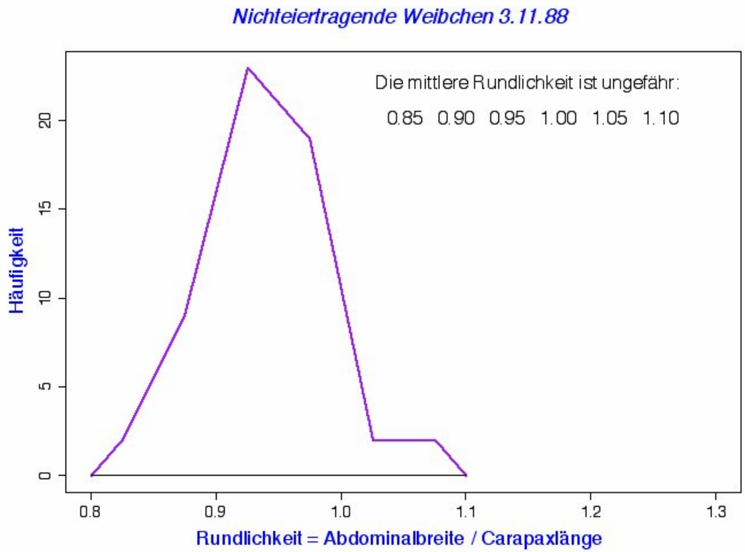

Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
Der Mittelwert der Rundlichkeit ist ungefähr:
100
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

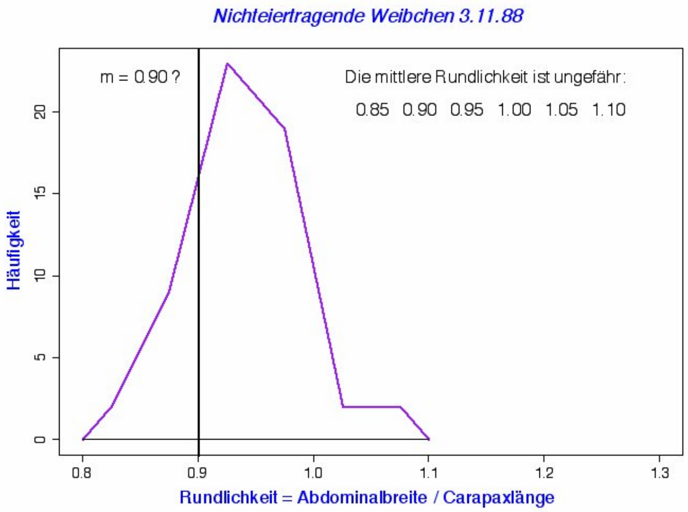


Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
Der Mittelwert der Rundlichkeit ist ungefähr:
100
m = 0.995
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

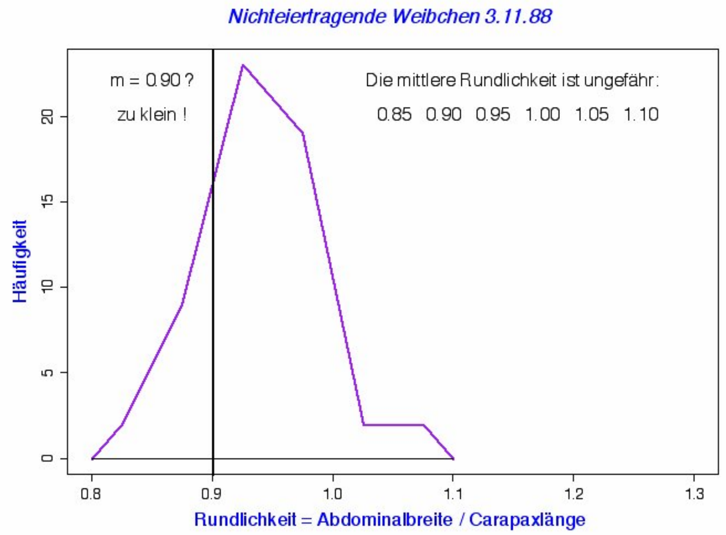
Beispiel:

3.11.88

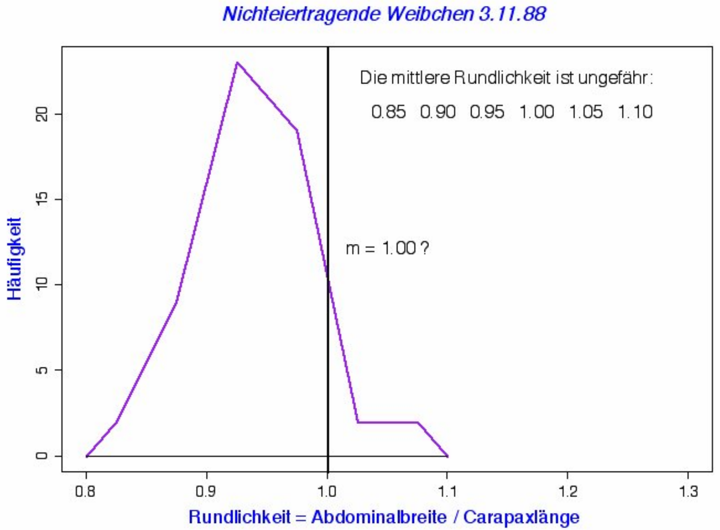

Nichteiertragende Weibchen 3.11.88
Die mittlere Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10
Häufigkeit
0
5
10
15
20
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

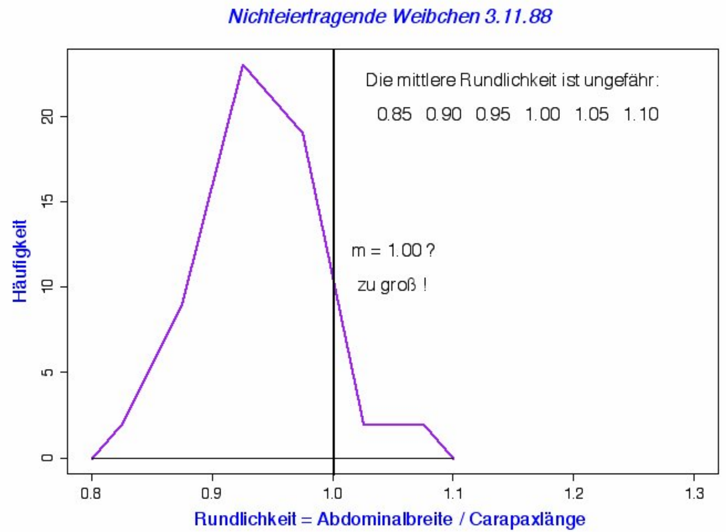


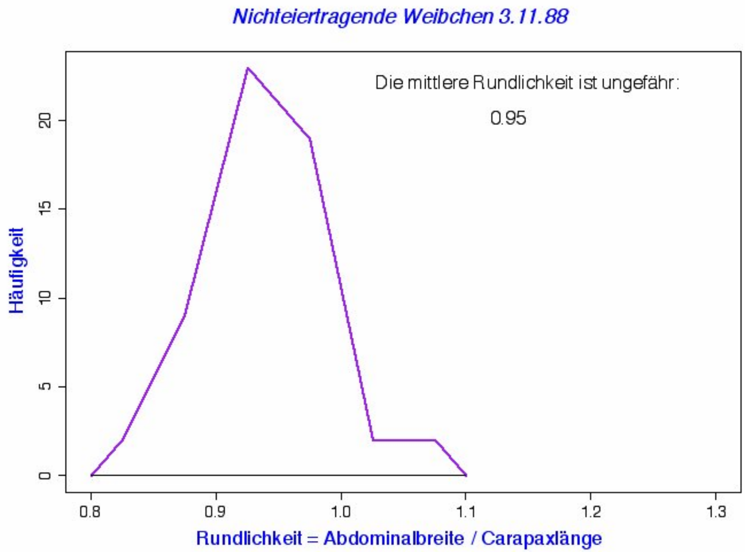
Nichteiertragende Weibchen 3.11.88
m = 0.90 ?
Die mittlere Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10
Häufigkeit
0
5
10
15
20
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

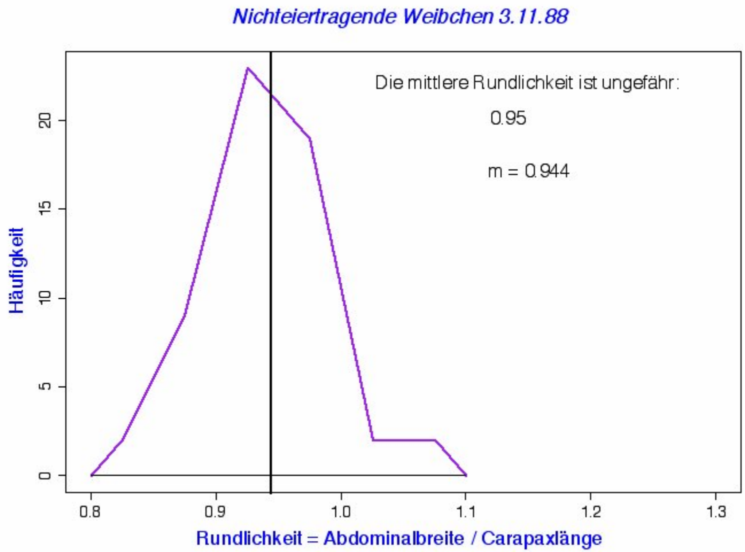


Nichteiertragende Weibchen 3.11.88
m = 0.90 ?
zu klein !
Die mittlere Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10
Häufigkeit
0
5
10
15
20
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge


Nichteiertragende Weibchen 3.11.88
Die mittlere Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10
m = 1.00 ?
Häufigkeit
0
5
10
15
20
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge


Nichteiertragende Weibchen 3.11.88
Die mittlere Rundlichkeit ist ungefähr:
0.85 0.90 0.95 1.00 1.05 1.10
m = 1.00 ?
zu groß !
Häufigkeit
0
5
10
15
20
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

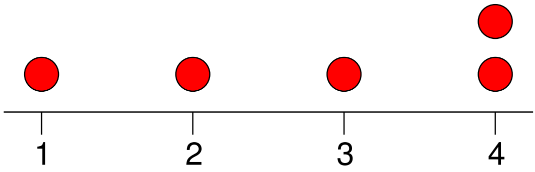

Nichteiertragende Weibchen 3.11.88
Die mittlere Rundlichkeit ist ungefähr:
0.95
Häufigkeit
0
5
10
15
20
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

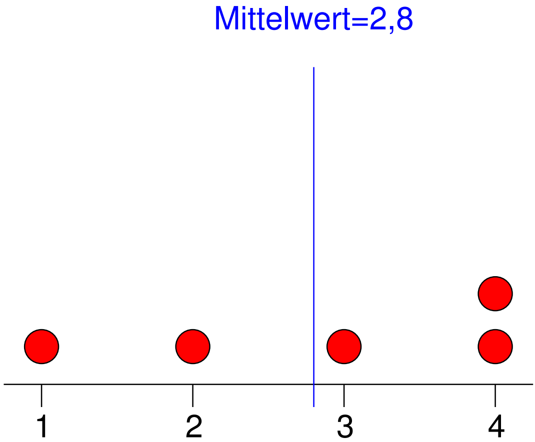

Nichteiertragende Weibchen 3.11.88
Die mittlere Rundlichkeit ist ungefähr:
0.95
m = 0.944
Häufigkeit
0
5
10
15
20
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

Die Standardabweichung

Die Standardabweichung

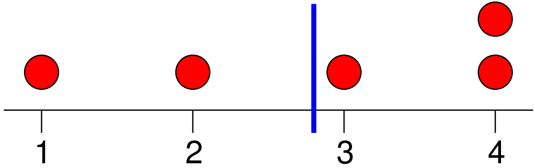
Wie weit weicht
eine typische Beobachtung
vom
Mittelwert
ab ?


1
2
3
4

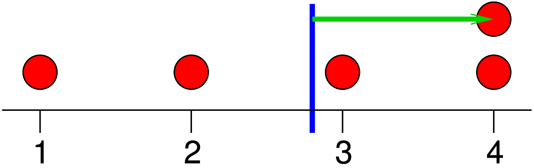

Mittelwert=2,8
1
2
3
4

typische

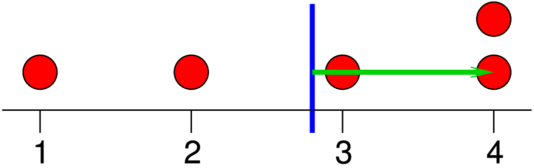
Abweichung =?



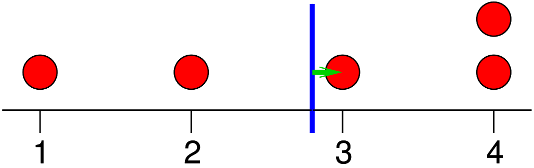
Abweichung $= 4 - 2{,}8 = 1{,}2$



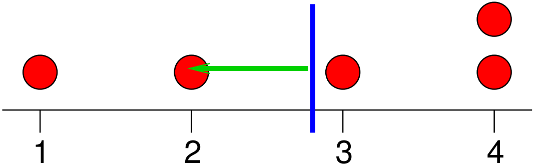
Abweichung $= 4 - 2{,}8 = 1{,}2$



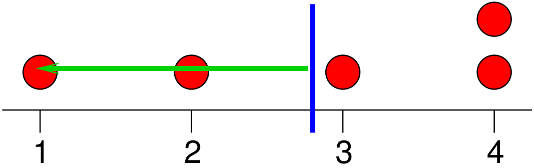
Abweichung $= 3 - 2{,}8 = 0{,}2$



Abweichung = 2 – 2,8 = –0,8



Abweichung = 1 – 2,8 = –1,8



Die Standardabweichung σ ("sigma")
[auch *SD* von engl. *standard deviation*]
ist ein

etwas komisches

gewichtetes Mittel
der Abweichungsbeträge

Die Standardabweichung σ (“sigma”)
[auch *SD* von engl. *standard deviation*]
ist ein

etwas komisches

gewichtetes Mittel
der Abweichungsbeträge

und zwar

$$\sigma = \sqrt{\text{Summe}(\text{Abweichungen}^2)/n}$$

Die Standardabweichung von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Formel:

Die Standardabweichung von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Formel:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

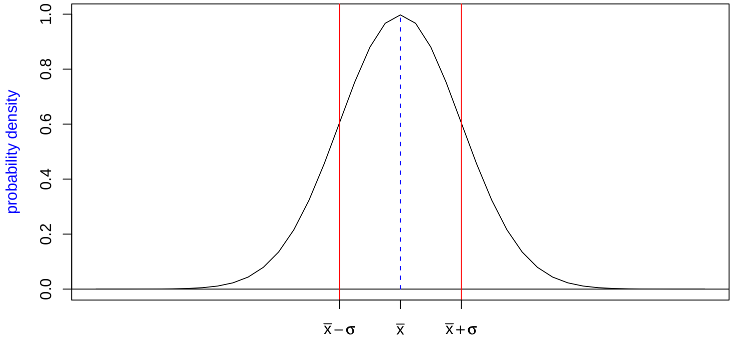
Die Standardabweichung von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Formel:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

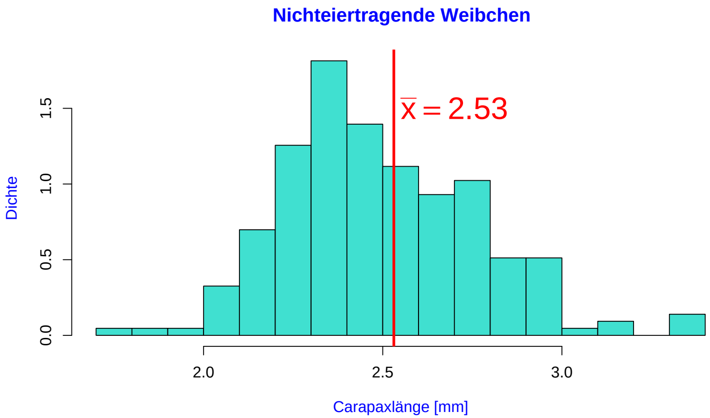
$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ heißt Varianz.

Faustregel für die Standardabweichung

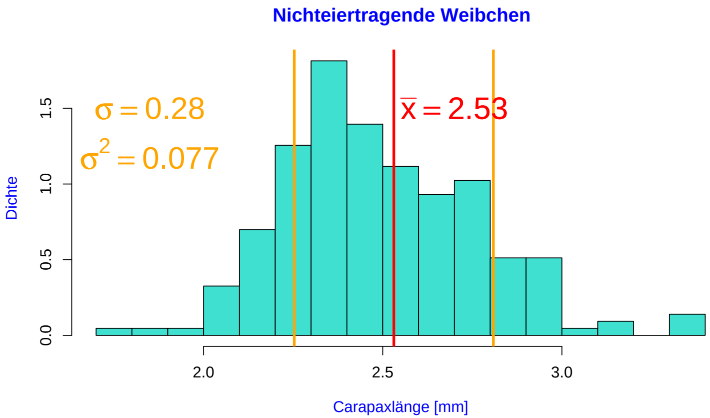
Bei ungefähr glockenförmigen (also eingipfligen und symmetrischen) Verteilungen liegen ca. 2/3 der Verteilung zwischen $\overline{x} - \sigma$ und $\overline{x} + \sigma$.



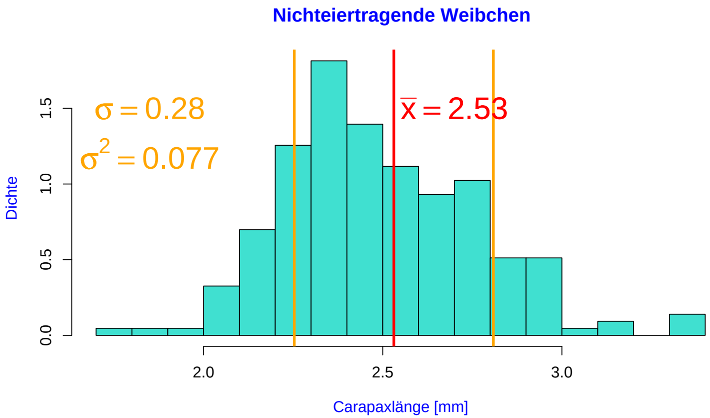
Standardabweichung der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88



Standardabweichung der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88



Standardabweichung der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88



Hier liegt der Anteil zwischen $\overline{x} - \sigma$ und $\overline{x} + \sigma$ bei 72%.

Varianz der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88

Alle Carapaxlängen im Meer: $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$.

Varianz der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88

Alle Carapaxlängen im Meer: $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$.
Carapaxlängen in unserer Stichprobe: $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_{n=215})$

Varianz der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88

Alle Carapaxlängen im Meer: $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$.
Carapaxlängen in unserer Stichprobe: $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_{n=215})$
Stichprobenvarianz:

$$\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{215}(S_i - \overline{S})^2 \approx 0{,}0768$$

Varianz der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88

Alle Carapaxlängen im Meer: $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$.
Carapaxlängen in unserer Stichprobe: $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \dots, S_{n=215})$
Stichprobenvarianz:

$$\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{215} (S_i - \overline{S})^2 \approx 0{,}0768$$

Können wir 0,0768 als Schätzwert für die Varianz σ_X^2 in der ganzen Population verwenden?

Varianz der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88

Alle Carapaxlängen im Meer: $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$.
Carapaxlängen in unserer Stichprobe: $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \dots, S_{n=215})$
Stichprobenvarianz:

$$\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{215} (S_i - \overline{S})^2 \approx 0{,}0768$$

Können wir 0,0768 als Schätzwert für die Varianz σ_X^2 in der ganzen Population verwenden?
Ja, können wir machen.

Varianz der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88

Alle Carapaxlängen im Meer: $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$.
Carapaxlängen in unserer Stichprobe: $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \dots, S_{n=215})$
Stichprobenvarianz:

$$\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{215} (S_i - \overline{S})^2 \approx 0{,}0768$$

Können wir 0,0768 als Schätzwert für die Varianz $\sigma_{\mathcal{X}}^2$ in der ganzen Population verwenden?
Ja, können wir machen. Allerdings ist $\sigma_{\mathcal{S}}^2$ im Durchschnitt um den Faktor $\frac{n-1}{n}$ $(= 214/215 \approx 0,995)$ kleiner als $\sigma_{\mathcal{X}}^2$

Varianzbegriffe

Varianz in der Population: $\sigma_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2$

Stichprobenvarianz: $\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2$

Varianzbegriffe

Varianz in der Population: $\sigma_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2$

Stichprobenvarianz: $\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2$
korrigierte Stichprobenvarianz:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_{\mathcal{S}}^2$$

Varianzbegriffe

Varianz in der Population: $\sigma_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2$

Stichprobenvarianz: $\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2$

korrigierte Stichprobenvarianz:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{n}{n-1}\sigma_{\mathcal{S}}^2 \\ &= \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2 \end{aligned}$$

Varianzbegriffe

Varianz in der Population: $\sigma_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2$

Stichprobenvarianz: $\sigma_{\mathcal{S}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2$

korrigierte Stichprobenvarianz:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{n}{n-1}\sigma_{\mathcal{S}}^2 \\ &= \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2 \end{aligned}$$

Mit “Standardabweichung von $\mathcal{S}$” ist meistens das korrigierte s gemeint.

Beispiel

Die Daten

x	1	3	0	5	1

$\overline{x} = ?$

						Summe
x	1	3	0	5	1	10

$\overline{x} = 10/5 = 2$

						Summe
x	1	3	0	5	1	10
$x - \overline{x}$						

$\overline{x} = 10/5 = 2$

						Summe
x	1	3	0	5	1	10
$x - \overline{x}$	-1	1	-2	3	-1	0

$\overline{x} = 10/5 = 2$

						Summe
x	1	3	0	5	1	10
$x - \overline{x}$	-1	1	-2	3	-1	0
$(x - \overline{x})^2$						

$\overline{x} = 10/5 = 2$

						Summe
x	1	3	0	5	1	10
$x - \overline{x}$	-1	1	-2	3	-1	0
$(x - \overline{x})^2$	1	1	4	9	1	16

$\overline{x} = 10/5 = 2$

						Summe
x	1	3	0	5	1	10
$x - \overline{x}$	-1	1	-2	3	-1	0
$(x - \overline{x})^2$	1	1	4	9	1	16

$$s^2 = \text{Summe}\left((x - \overline{x})^2\right)/(n-1)$$

$\overline{x} = 10/5 = 2$

						Summe
x	1	3	0	5	1	10
$x - \overline{x}$	-1	1	-2	3	-1	0
$(x - \overline{x})^2$	1	1	4	9	1	16

$$\begin{aligned} s^2 &= \text{Summe}((x - \overline{x})^2)/(n-1) \\ &= 16/(5-1) \end{aligned}$$

$\overline{x} = 10/5 = 2$

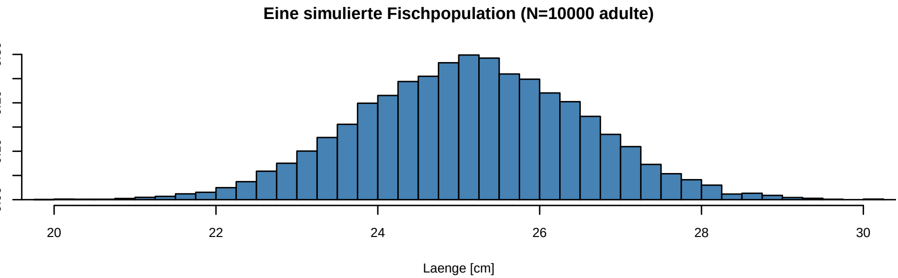
						Summe
x	1	3	0	5	1	10
$x - \overline{x}$	-1	1	-2	3	-1	0
$(x - \overline{x})^2$	1	1	4	9	1	16

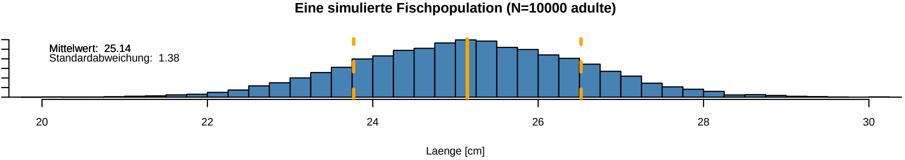
$$\begin{aligned} s^2 &= \text{Summe}((x - \overline{x})^2)/(n-1) \\ &= 16/(5-1) = 4 \end{aligned}$$

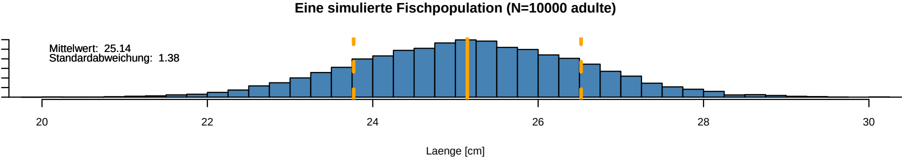
$\overline{x} = 10/5 = 2$

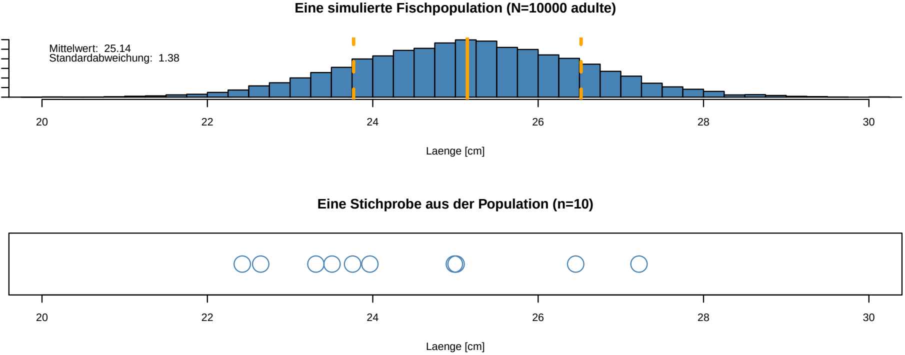
						Summe
x	1	3	0	5	1	10
$x - \overline{x}$	-1	1	-2	3	-1	0
$(x - \overline{x})^2$	1	1	4	9	1	16

$$\begin{aligned} s^2 &= \text{Summe}\left((x-\overline{x})^2\right)/(n-1) \\ &= 16/(5-1) = 4 \\ s &= 2 \end{aligned}$$

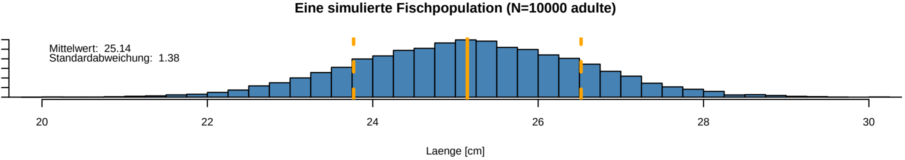

Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

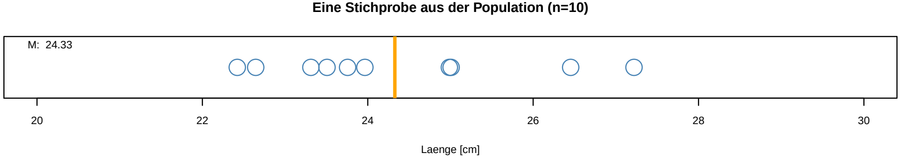

Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

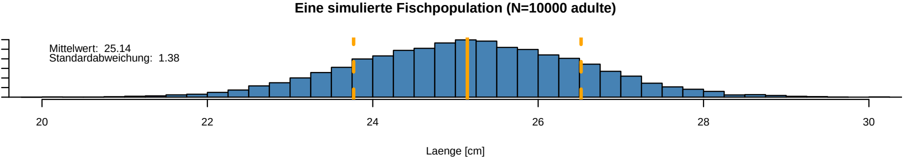

Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

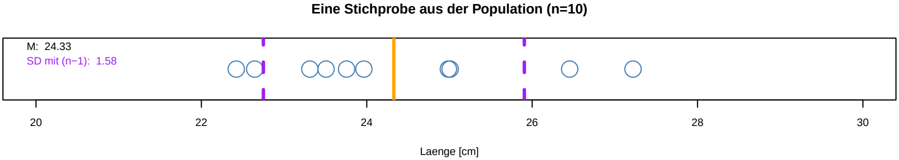


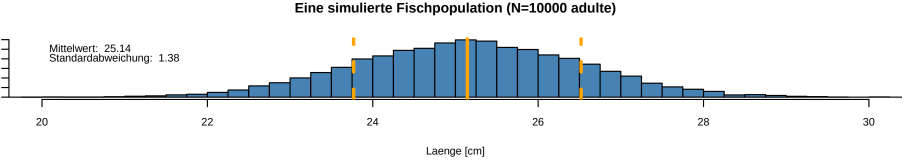
Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]
Eine Stichprobe aus der Population (n=10)
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

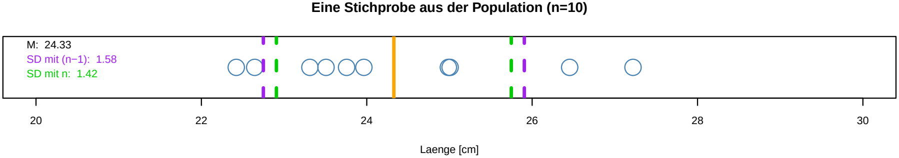

Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

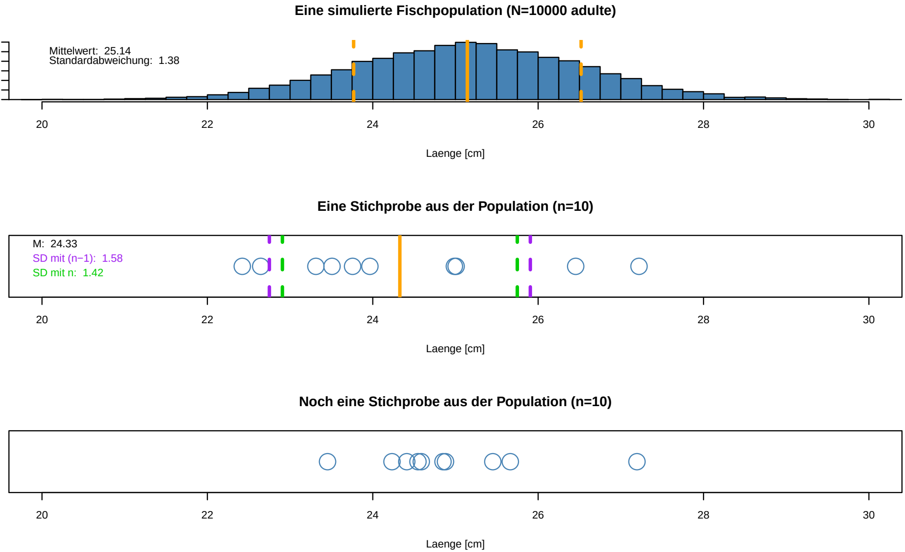

Eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.33
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

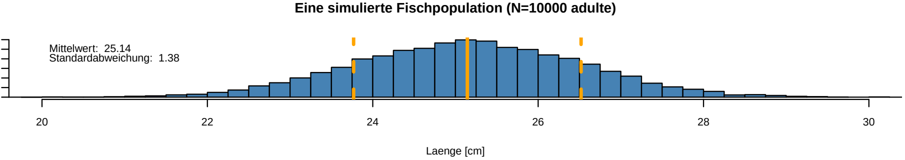

Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]


Eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.33
SD mit (n−1): 1.58
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

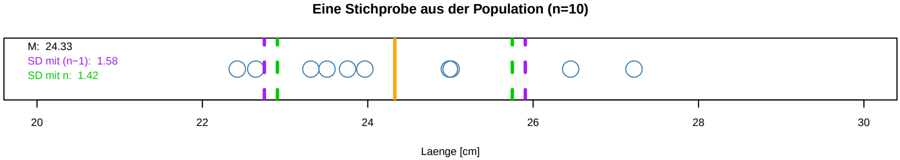

Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]


Eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.33
SD mit (n−1): 1.58
SD mit n: 1.42
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

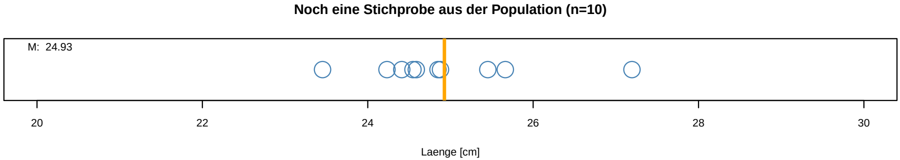

Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]
Eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.33
SD mit (n−1): 1.58
SD mit n: 1.42
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]
Noch eine Stichprobe aus der Population (n=10)
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]



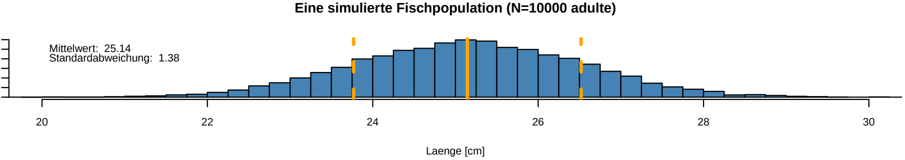
Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]



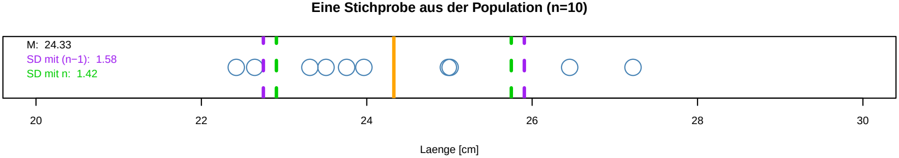
Eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.33
SD mit (n−1): 1.58
SD mit n: 1.42
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]



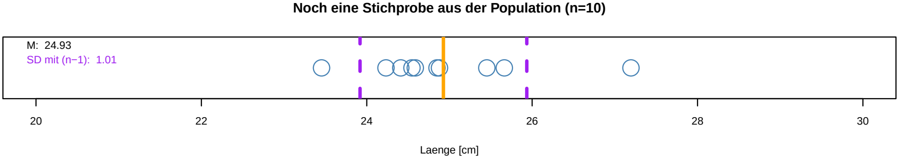
Noch eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.93
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]



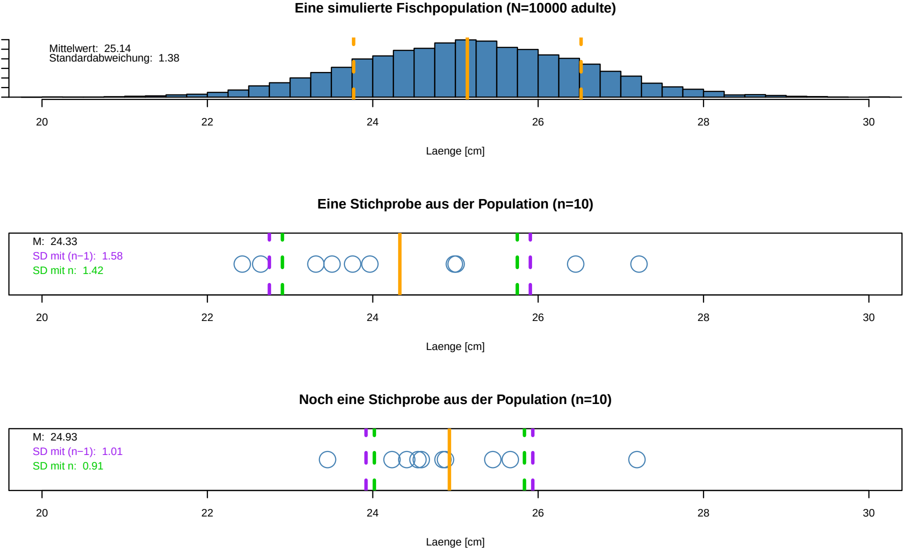
Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

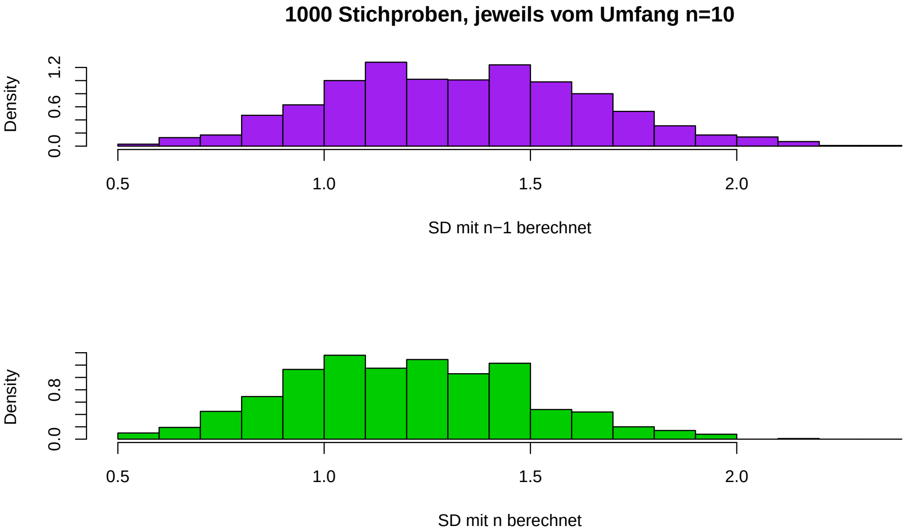


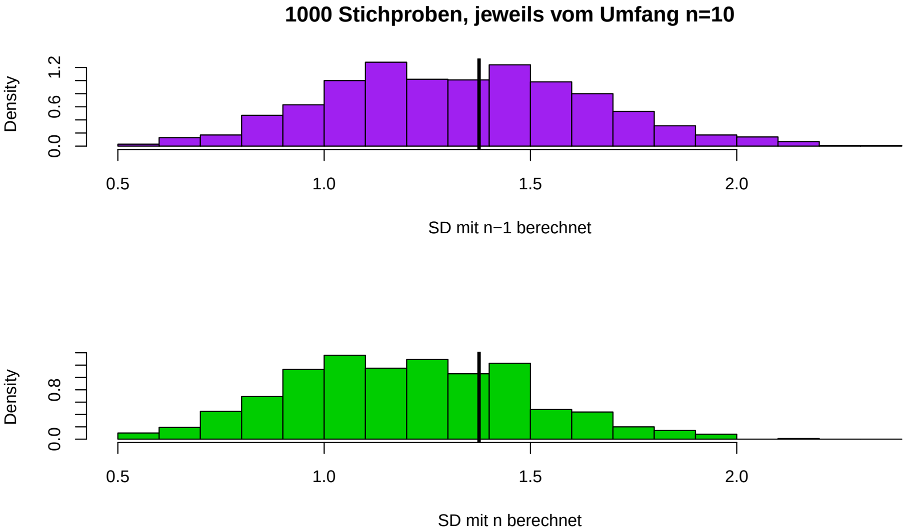
Eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.33
SD mit (n−1): 1.58
SD mit n: 1.42
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]

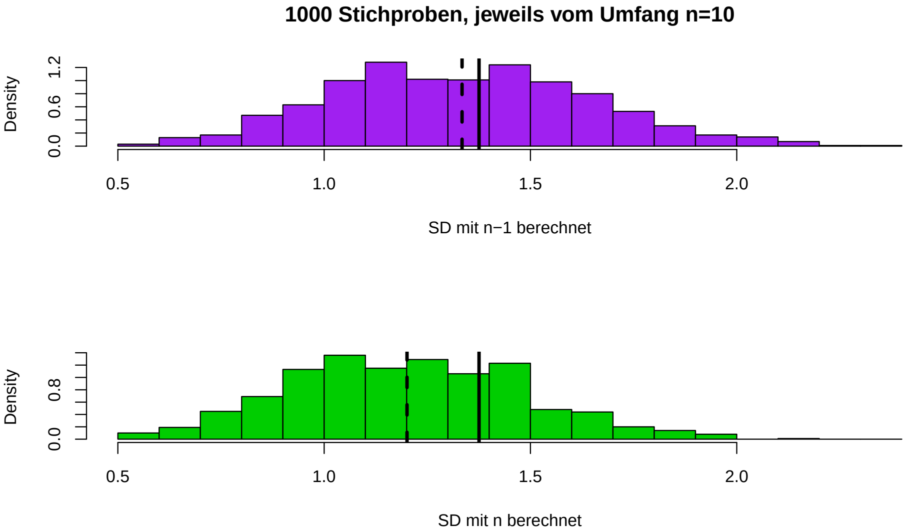


Noch eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.93
SD mit (n−1): 1.01
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]


Eine simulierte Fischpopulation (N=10000 adulte)
Mittelwert: 25.14
Standardabweichung: 1.38
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]
Eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.33
SD mit (n−1): 1.58
SD mit n: 1.42
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]
Noch eine Stichprobe aus der Population (n=10)
M: 24.93
SD mit (n−1): 1.01
SD mit n: 0.91
20
22
24
26
28
30
Laenge [cm]


1000 Stichproben, jeweils vom Umfang n=10
Density
0.0
0.6
1.2
0.5
1.0
1.5
2.0
SD mit n−1 berechnet
Density
0.0
0.8
0.5
1.0
1.5
2.0
SD mit n berechnet


1000 Stichproben, jeweils vom Umfang n=10
Density
0.0
0.6
1.2
0.5
1.0
1.5
2.0
SD mit n−1 berechnet
Density
0.0
0.8
0.5
1.0
1.5
2.0
SD mit n berechnet


1000 Stichproben, jeweils vom Umfang n=10
Density
0.0
0.6
1.2
0.5
1.0
1.5
2.0
SD mit n−1 berechnet
Density
0.0
0.8
0.5
1.0
1.5
2.0
SD mit n berechnet

σ mit n oder $n-1$ berechnen?

Die Standardabweichung σ eines Zufallsexperiments mit n gleichwahrscheinlichen Ausgängen $x_1, \ldots, x_n$ (z.B. Würfelwurf) ist klar definiert durch

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}.$$

σ mit n oder $n-1$ berechnen?

Die Standardabweichung σ eines Zufallsexperiments mit n gleichwahrscheinlichen Ausgängen $x_1, \ldots, x_n$ (z.B. Würfelwurf) ist klar definiert durch

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}.$$

Wenn es sich bei $x_1, \ldots, x_n$ um eine Stichprobe handelt (wie meistens in der Statistik), sollten Sie die Formel

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}$$

verwenden.

Inhalt

Mittelwert und Standardabweichung. . .

- charakterisieren die Daten gut, falls deren Verteilung glockenförmig ist

Mittelwert und Standardabweichung. . .

- charakterisieren die Daten gut, falls deren Verteilung glockenförmig ist
- und müssen andernfalls mit Vorsicht interpretiert werden.

Mittelwert und Standardabweichung. . .

- charakterisieren die Daten gut, falls deren Verteilung glockenförmig ist
- und müssen andernfalls mit Vorsicht interpretiert werden.

Wir betrachten dazu einige Lehrbuch-Beispiele aus der Ökologie, siehe z.B.

M. Begon, C. R. Townsend, and J. L. Harper.
Ecology: From Individuals to Ecosystems.
Blackell Publishing, 4 edition, 2008.

Mittelwert und Standardabweichung...

- charakterisieren die Daten gut, falls deren Verteilung glockenförmig ist
- und müssen andernfalls mit Vorsicht interpretiert werden.

Wir betrachten dazu einige Lehrbuch-Beispiele aus der Ökologie, siehe z.B.

M. Begon, C. R. Townsend, and J. L. Harper.
Ecology: From Individuals to Ecosystems.
Blackell Publishing, 4 edition, 2008.

Im Folgenden verwenden wir zum Teil simulierte Daten, wenn die Originaldaten nicht verfügbar waren. Glauben Sie uns also nicht alle Datenpunkte.

Inhalt

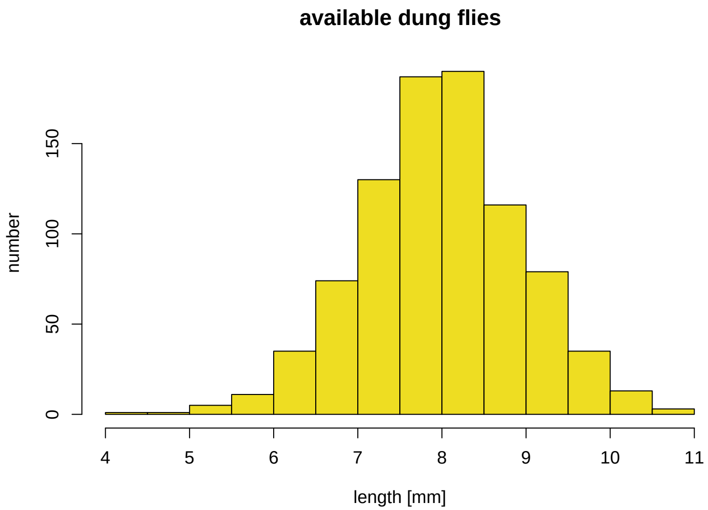
Bachstelzen fressen Dungfliegen

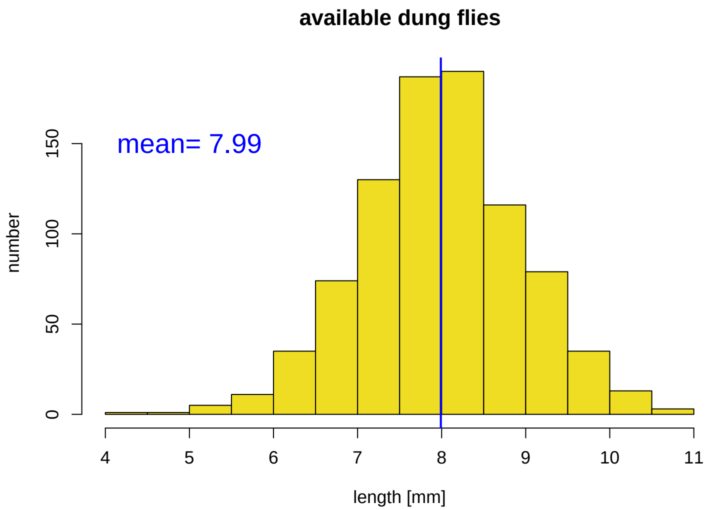
Räuber	Beute
	
Bachstelze (White Wagtail)	Gelbe Dungfliege
Motacilla alba alba	*Scatophaga stercoraria*
image (c) by Artur Mikołajewski	image (c) by Viatour Luc

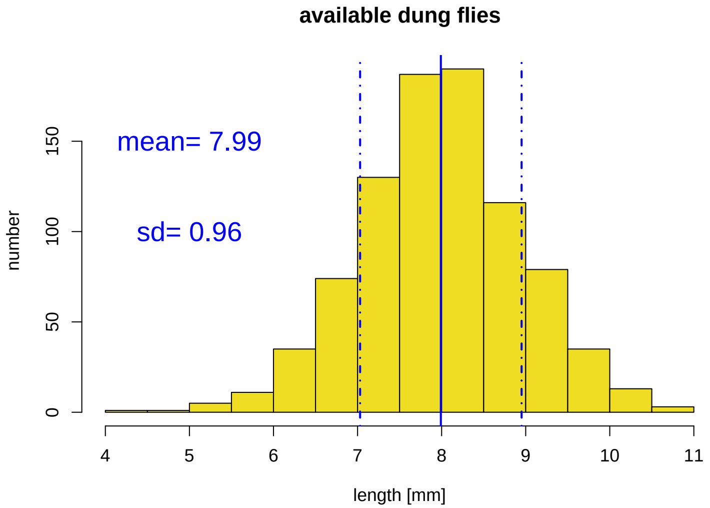
Vermutung

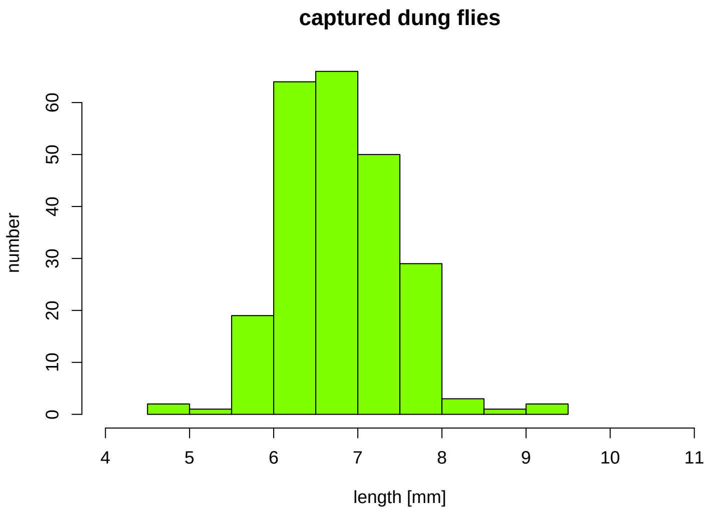
- Die Fliegen sind unterschiedlich groß
- Effizienz für die Bachstelze = Energiegewinn / Zeit zum Fangen und fressen
- Laborexperimente lassen vermuten, dass die Effizienz bei 7mm großen Fliegen maximal ist.

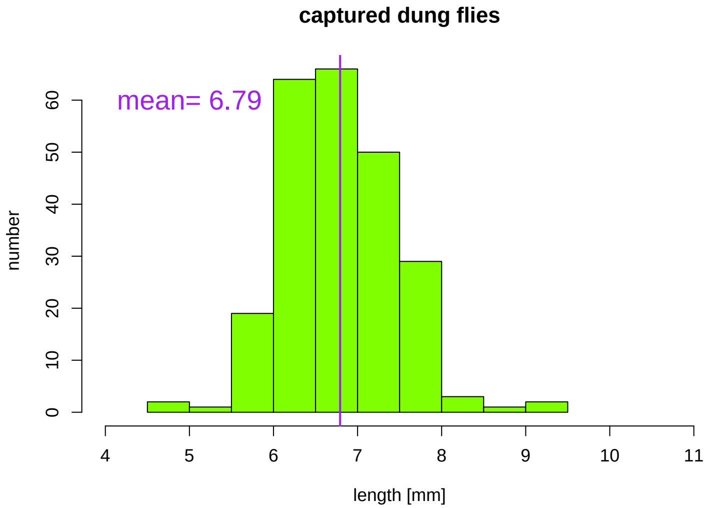
N.B. Davies.
Prey selection and social behaviour in wagtails (Aves: Motacillidae).
J. Anim. Ecol., 46:37–57, 1977.

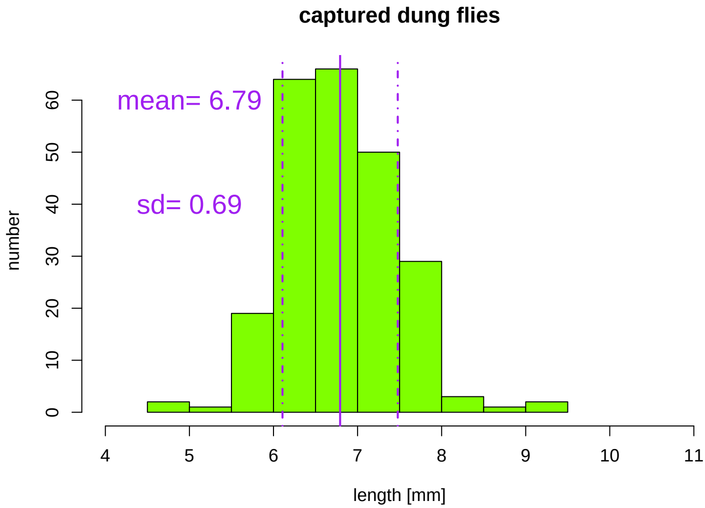

available dung flies
number
0
50
100
150
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]

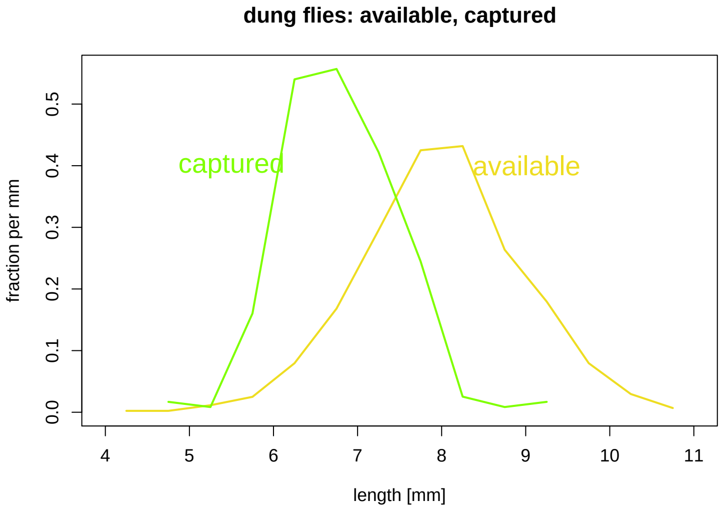

available dung flies
mean= 7.99
number
0
50
100
150
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


available dung flies
mean= 7.99
sd= 0.96
number
0
50
100
150
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


captured dung flies
number
0
10
20
30
40
50
60
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]

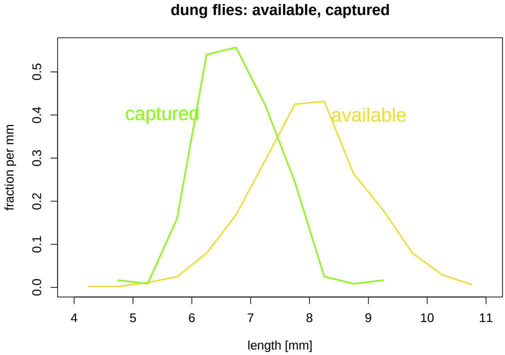

captured dung flies
mean= 6.79
number
0
10
20
30
40
50
60
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


captured dung flies
mean= 6.79
sd= 0.69
number
0
10
20
30
40
50
60
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


dung flies: available, captured
captured
available
fraction per mm
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]

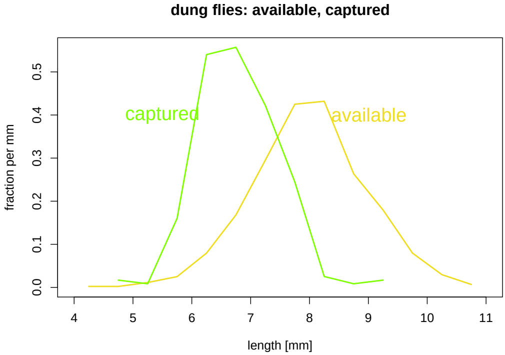
Vergleich der Größenverteilungen

	captured	available
Mittelwert		



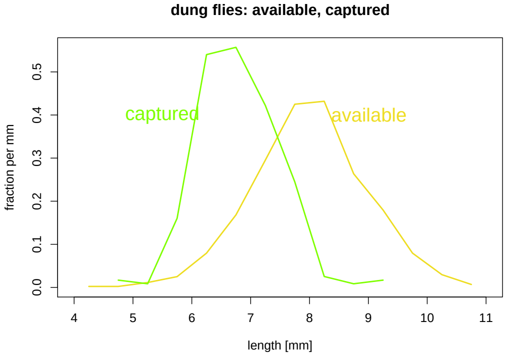
Vergleich der Größenverteilungen

	captured		available
Mittelwert		$<$	



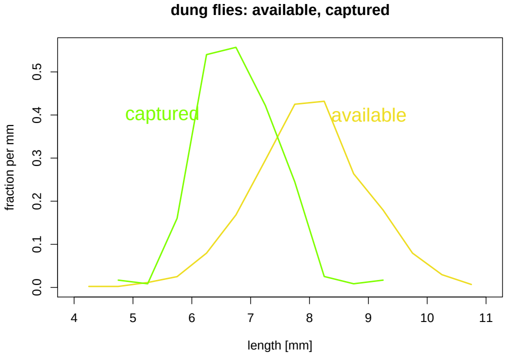
Vergleich der Größenverteilungen

	captured		available
Mittelwert	6.29	$<$	7.99



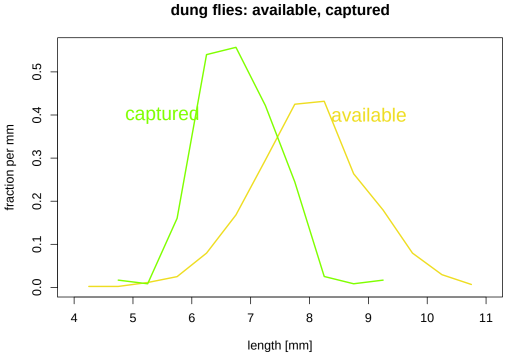
Vergleich der Größenverteilungen

	captured		available
Mittelwert	6.29	$<$	7.99
Standardabweichung			



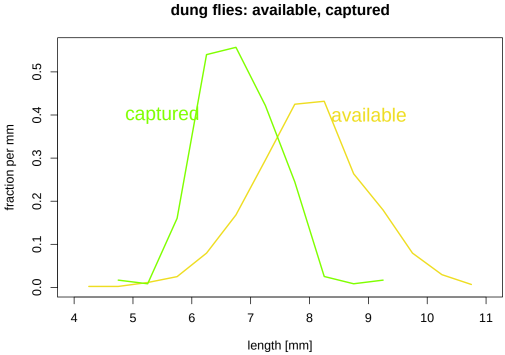
Vergleich der Größenverteilungen

	captured		available
Mittelwert	6.29	$<$	7.99
Standardabweichung		$<$	



Vergleich der Größenverteilungen

	captured		available
Mittelwert	6.29	$<$	7.99
Standardabweichung	0.69	$<$	0.96



Interpretation

Die Bachstelzen bevorzugen Dungfliegen, die etwa 7mm groß sind.

Interpretation

Die Bachstelzen bevorzugen Dungfliegen, die etwa 7mm groß sind.

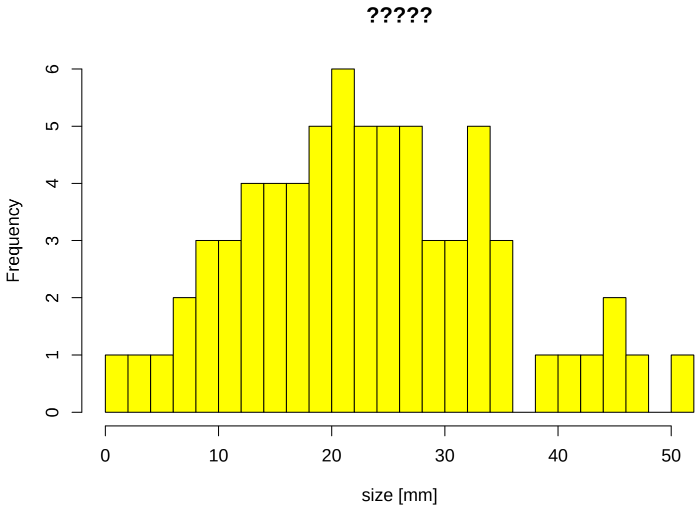
Hier waren die Verteilungen glockenförmig und es genügten 4 Werte (die beiden Mittelwerte und die beiden Standardabweichungen), um die Daten adäquat zu beschreiben.

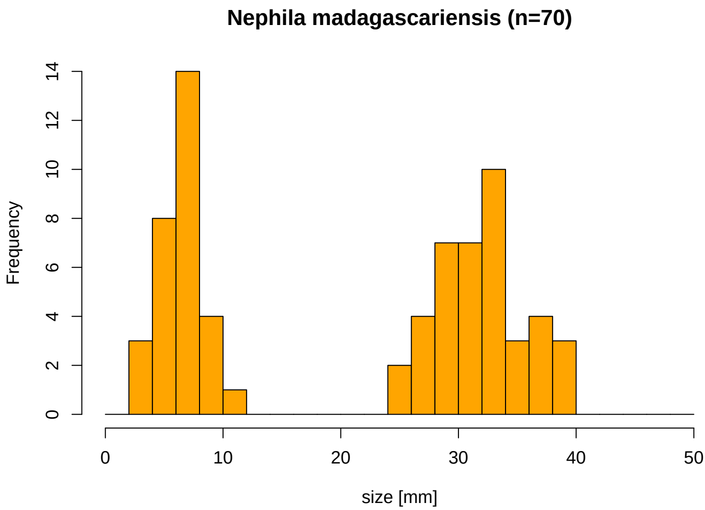
Inhalt

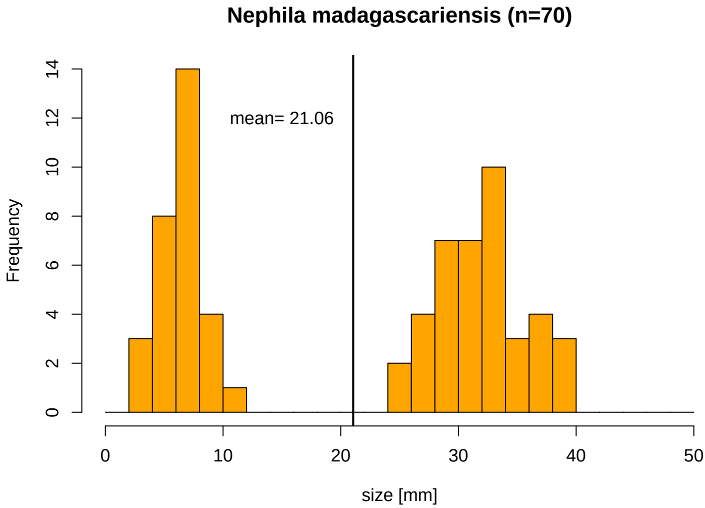
Nephila madagascariensis

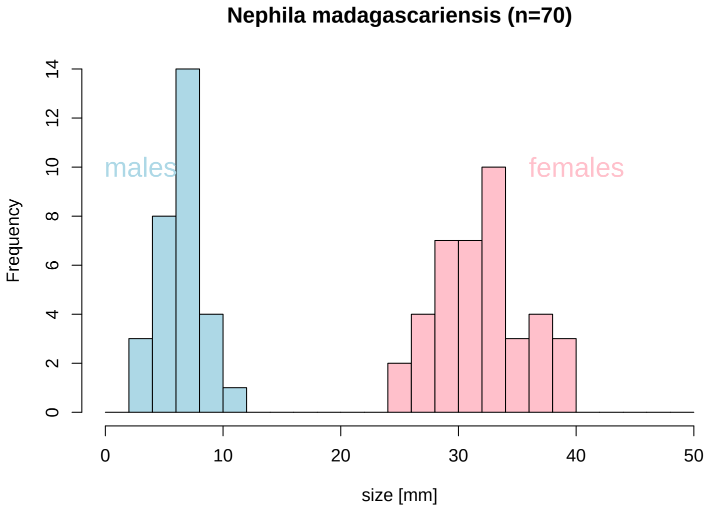
image (c) by Bernard Gagnon

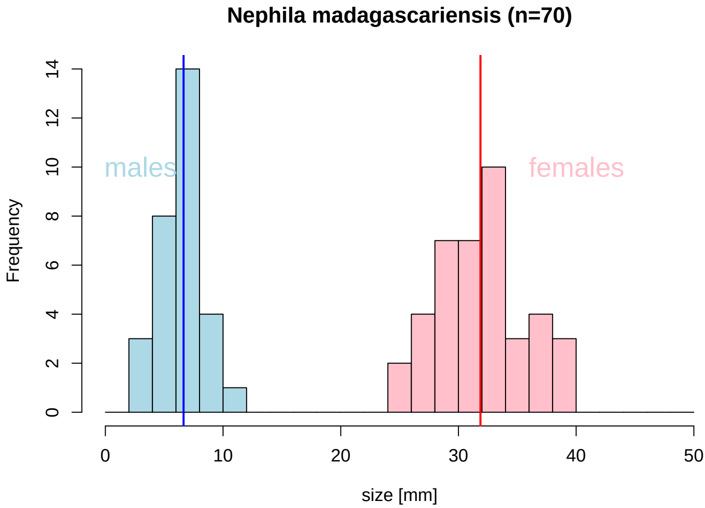
Simulated Data:
Eine Stichprobe von 70 Spinnen
Mittlere Größe: 21,06 mm
Standardabweichung der Größe: 12,94 mm


?????
Frequency
0
1
2
3
4
5
6
0
10
20
30
40
50
size [mm]


Nephila madagascariensis (n=70)
Frequency
0
2
4
6
8
10
12
14
0
10
20
30
40
50
size [mm]


Nephila madagascariensis (n=70)
mean= 21.06
Frequency
0
2
4
6
8
10
12
14
0
10
20
30
40
50
size [mm]


Nephila madagascariensis (n=70)
males
females
Frequency
size [mm]
0
2
4
6
8
10
12
14
0
10
20
30
40
50



Nephila madagascariensis (n=70)
males
females
Frequency
0
2
4
6
8
10
12
14
0
10
20
30
40
50
size [mm]

Nephila madagascariensis
image (c) by Arthur Chapman

Fazit des Spinnenbeispiels

Wenn die Daten aus verschiedenen Gruppen zusammengesetzt sind, die sich bezüglich des Merkmals deutlich unterscheiden, kann es sinnvoll sein, Kenngrößen wie den Mittelwert für jede Gruppe einzeln zu berechnen.

Inhalt

Kupfertolerantes Rotes Straußgras

Rotes Straußgras
Agrostis tenuis

image (c) Kristian Peters

Kupfer
Cuprum

Hendrick met de Bles

A.D. Bradshaw.
Population Differentiation in *agrostis tenius Sibth*. III. populations in varied environments.
New Phytologist, 59(1):92 – 103, 1960.

T. McNeilly and A.D Bradshaw.
Evolutionary Processes in Populations of Copper Tolerant Agrostis tenuis Sibth.
Evolution, 22:108–118, 1968.

A.D. Bradshaw.
Population Differentiation in *agrostis tenius Sibth*. III. populations in varied environments.
New Phytologist, 59(1):92 – 103, 1960.

T. McNeilly and A.D Bradshaw.
Evolutionary Processes in Populations of Copper Tolerant Agrostis tenuis Sibth.
Evolution, 22:108–118, 1968.

Wir verwenden hier wieder simulierte Daten, da die Originaldaten nicht zur Verfügung stehen.

Anpassung an Kupfer?

- Pflanzen, denen das Kupfer schadet, haben kürzere Wurzeln.

Anpassung an Kupfer?

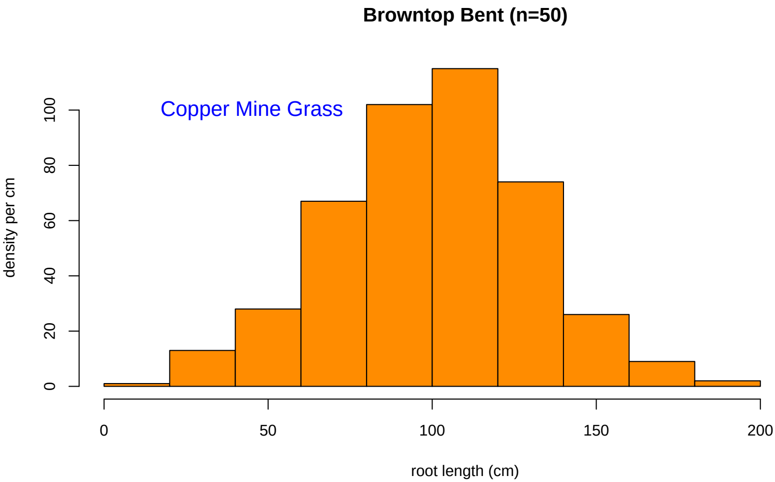
- Pflanzen, denen das Kupfer schadet, haben kürzere Wurzeln.
- Die Wurzellängen von Pflanzen aus der Umgebung von Kupferminen wird gemessen.

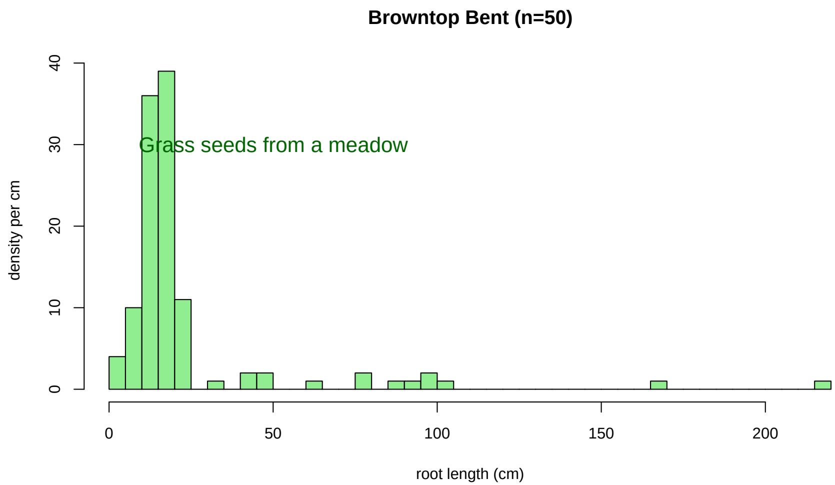
Anpassung an Kupfer?

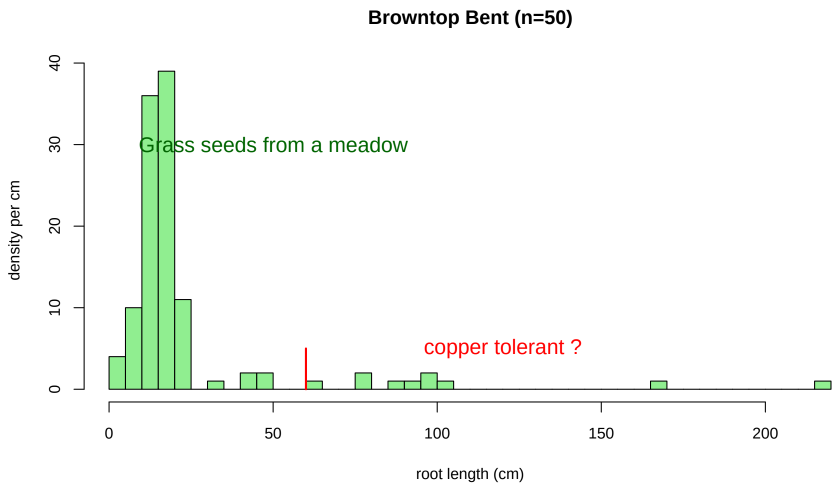
- Pflanzen, denen das Kupfer schadet, haben kürzere Wurzeln.
- Die Wurzellängen von Pflanzen aus der Umgebung von Kupferminen wird gemessen.
- Samen von unbelasteten Wiesen werden bei Kupferminen eingesät.

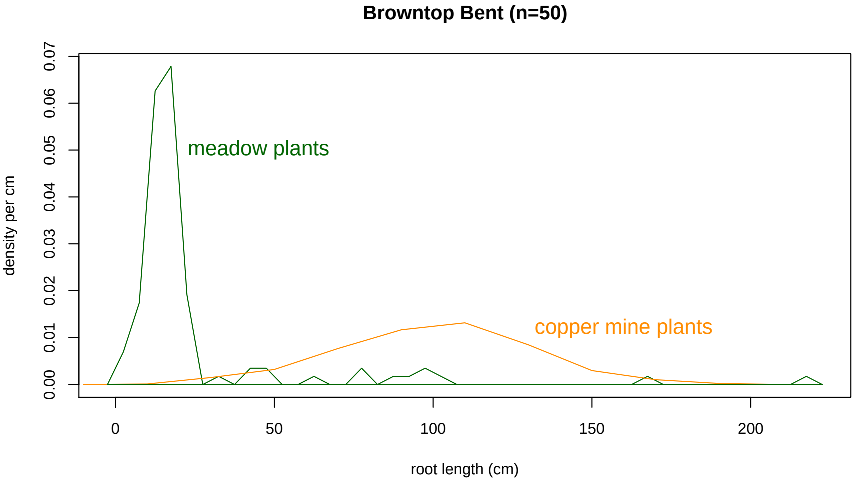
Anpassung an Kupfer?

- Pflanzen, denen das Kupfer schadet, haben kürzere Wurzeln.
- Die Wurzellängen von Pflanzen aus der Umgebung von Kupferminen wird gemessen.
- Samen von unbelasteten Wiesen werden bei Kupferminen eingesät.
- Die Wurzellängen dieser “Wiesenpflanzen” werden gemessen.

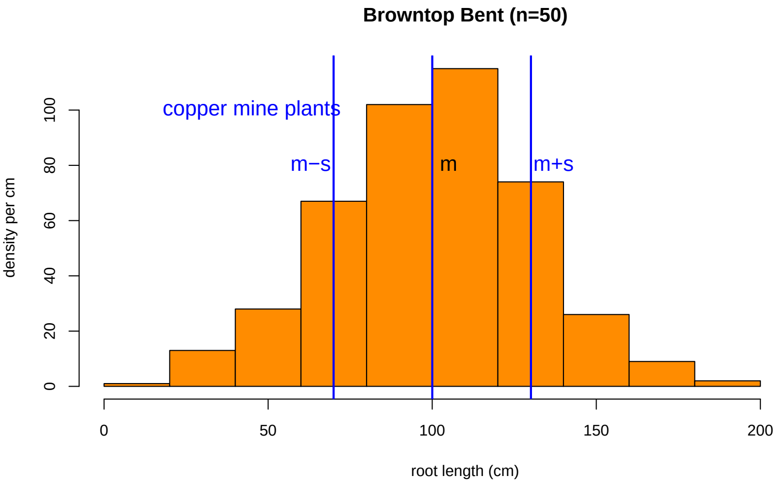

Browntop Bent (n=50)
Copper Mine Grass
density per cm
0
20
40
60
80
100
0
50
100
150
200
root length (cm)

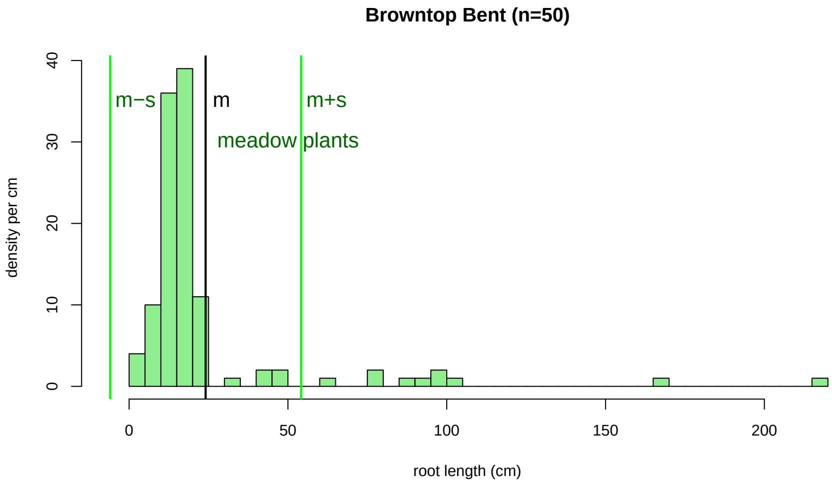

Browntop Bent (n=50)
Grass seeds from a meadow
density per cm
0
10
20
30
40
0
50
100
150
200
root length (cm)


Browntop Bent (n=50)
Grass seeds from a meadow
copper tolerant ?
density per cm
0
10
20
30
40
0
50
100
150
200
root length (cm)



Browntop Bent (n=50)
density per cm
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
meadow plants
copper mine plants
0
50
100
150
200
root length (cm)


Browntop Bent (n=50)
copper mine plants
m−s
m
m+s
density per cm
0
20
40
60
80
100
0
50
100
150
200
root length (cm)



2/3 der Wurzellängen innerhalb [m-sd,m+sd]???? Nein!

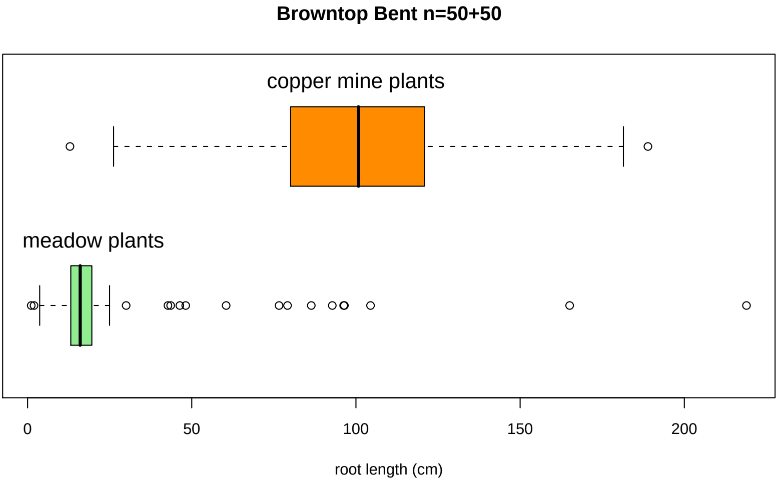
Fazit des Straußgras-Beispiels

Manche Verteilungen können nur mit mehr als zwei Variablen angemessen beschrieben werden.

Fazit des Straußgras-Beispiels

Manche Verteilungen können nur mit mehr als zwei Variablen angemessen beschrieben werden.

z.B. mit den fünf Werten der Boxplots:
min, Q_1, median, Q_3, max


Browntop Bent n=50+50
copper mine plants
meadow plants
0
50
100
150
200
root length (cm)

Schlussfolgerung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung hinreichend beschrieben werden.

Schlussfolgerung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung hinreichend beschrieben werden.

Es gibt aber auch Ausnahmen. Also:
Immer die Daten erst mal graphisch untersuchen!

Schlussfolgerung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung hinreichend beschrieben werden.

Es gibt aber auch Ausnahmen. Also:
Immer die Daten erst mal graphisch untersuchen!

Verlassen sie sich niemals allein auf numerische Kenngrößen!