Biostatistik, WS 2013/2014

Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Matthias Birkner

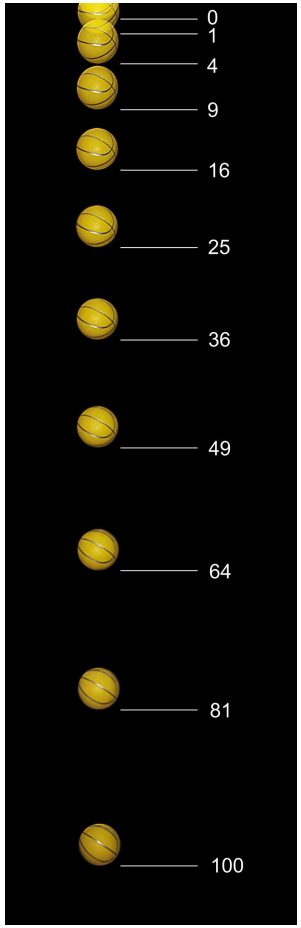
http://www.mathematik.uni-mainz.de/~birkner/Biostatistik1314/

6.12.2013

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Inhalt

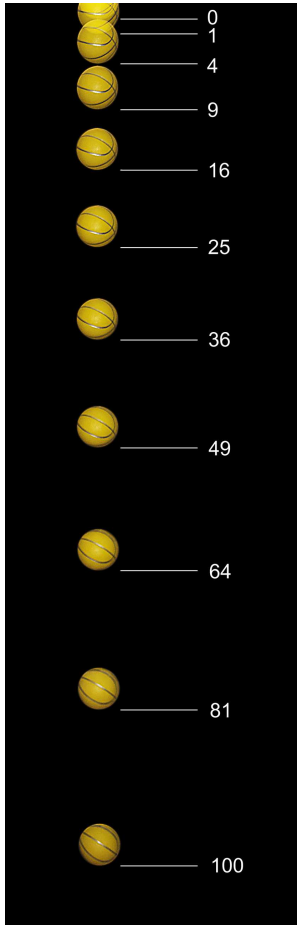
Was können wir vorhersagen?



(c) by Michael Maggs

- Freier Fall: Falldauer eines Objektes bei gegebener Fallhöhe läßt sich vorhersagen (falls Luftwiderstand vernachlässigbar)

Was können wir vorhersagen?



(c) by Michael Maggs

- Freier Fall: Falldauer eines Objektes bei gegebener Fallhöhe läßt sich vorhersagen (falls Luftwiderstand vernachlässigbar)

  Deterministische Vorgänge laufen immer gleich ab. Aus Beobachtungen lassen sich künftige Versuche vorhersagen.

Was können wir vorhersagen?

- Würfelwurf: Das Ergebnis eines einzelnen Würfelwurfes lässt sich nicht vorhersagen.

(c) public domain

Was können wir vorhersagen?

(c) public domain

- Würfelwurf: Das Ergebnis eines einzelnen Würfelwurfes lässt sich nicht vorhersagen.
- Wiederholter Würfelwurf:
  Würfelt man 600 mal, so würde man gerne darauf wetten, dass die Anzahl an Einsern zwischen 85 und 115 liegt.

Was können wir vorhersagen?

(c) public domain

- Würfelwurf: Das Ergebnis eines einzelnen Würfelwurfes lässt sich nicht vorhersagen.
- Wiederholter Würfelwurf:
  Würfelt man 600 mal, so würde man gerne darauf wetten, dass die Anzahl an Einsern zwischen 85 und 115 liegt.

  Die genaue Anzahl lässt sich wieder nicht vorhersagen.

Was können wir vorhersagen?

(c) public domain

- Würfelwurf: Das Ergebnis eines einzelnen Würfelwurfes lässt sich nicht vorhersagen.
- Wiederholter Würfelwurf:
  Würfelt man 600 mal, so würde man gerne darauf wetten, dass die Anzahl an Einsern zwischen 85 und 115 liegt.

  Die genaue Anzahl lässt sich wieder nicht vorhersagen.

  Aber: Eine Aussage über die Verteilung ist möglich
  (die besser ist als reines Raten.)

Empirisch stellt man fest:

Bei Wiederholung eines Zufallsexperiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten der möglichen Ergebnisse.

Empirisch stellt man fest:

Bei Wiederholung eines Zufallsexperiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten der möglichen Ergebnisse.

Beispiel:

Beim Würfelwurf
stabilisiert sich die relative Häufigkeit
jeder der Zahlen $\{1, 2, \ldots, 6\}$ bei $\frac{1}{6}$.

Empirisch stellt man fest:

Bei Wiederholung eines Zufallsexperiments stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten der möglichen Ergebnisse.

Beispiel:

Beim Würfelwurf
stabilisiert sich die relative Häufigkeit
jeder der Zahlen $\{1, 2, \ldots, 6\}$ bei $\frac{1}{6}$.

Fazit:

Das Ergebnis eines einzelnen zufälligen Vorgangs läßt sich nicht vorhersagen.
Aber: Eine Aussage über die Verteilung ist möglich (die besser ist als reines Raten).

Abstraktionsschritt:

Verwende empirisch ermittelte Verteilung
als Verteilung jedes Einzelexperiments!

Abstraktionsschritt:

Verwende empirisch ermittelte Verteilung
als Verteilung jedes Einzelexperiments!

Beispiel:

Wir nehmen an,
daß bei einem einzelnen Würfelwurf
jede der Zahlen $\{1, 2, \ldots, 6\}$
die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ hat.

Inhalt

Als Zufallsgröße oder Zufallsvariable bezeichnet man das (Mess-)Ergebnis eines zufälligen Vorgangs.

Als Zufallsgröße oder Zufallsvariable bezeichnet man das (Mess-)Ergebnis eines zufälligen Vorgangs.

Der Wertebereich $\mathcal{S}$ (engl. state space) einer Zufallsgröße ist die Menge aller möglichen Werte.

Als Zufallsgröße oder Zufallsvariable bezeichnet man das (Mess-)Ergebnis eines zufälligen Vorgangs.

Der Wertebereich $\mathcal{S}$ (engl. state space) einer Zufallsgröße ist die Menge aller möglichen Werte.

Die Verteilung einer Zufallsgröße X weist jeder Menge $A \subseteq \mathcal{S}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \in A)$ zu, dass X einen Wert in A annimmt

Als Zufallsgröße oder Zufallsvariable bezeichnet man das (Mess-)Ergebnis eines zufälligen Vorgangs.

Der Wertebereich $\mathcal{S}$ (engl. state space) einer Zufallsgröße ist die Menge aller möglichen Werte.

Die Verteilung einer Zufallsgröße X weist jeder Menge $A \subseteq \mathcal{S}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \in A)$ zu, dass X einen Wert in A annimmt

Für Zufallsgrößen werden üblicherweise Großbuchstaben verwendet (z.B. X, Y, Z), für konkrete Werte Kleinbuchstaben.

Beispiel: Würfelwurf $W =$ Augenzahl des nächsten Würfelwurfs.

$$\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 6\}$$
$$\mathbb{P}(W = 1) = \cdots = \mathbb{P}(W = 6) = \tfrac{1}{6}$$
$$(\ \mathbb{P}(W = x) = \tfrac{1}{6} \text{ für alle } x \in \{1, \ldots, 6\}\ )$$

Die Verteilung erhält man aus einer Symmetrieüberlegung oder aus einer langen Würfelreihe.

Beispiel: Würfelwurf W = Augenzahl des nächsten Würfelwurfs.

$$\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 6\}$$
$$\mathbb{P}(W = 1) = \cdots = \mathbb{P}(W = 6) = \tfrac{1}{6}$$
$$(\ \mathbb{P}(W = x) = \tfrac{1}{6} \text{ für alle } x \in \{1, \ldots, 6\}\ )$$

Die Verteilung erhält man aus einer Symmetrieüberlegung oder aus einer langen Würfelreihe.

Beispiel: Geschlecht X bei Neugeborenen.

$$\mathcal{S} = \{\text{„männlich“}, \text{„weiblich“}\}$$

Die Verteilung erhält man aus einer langen Beobachtungsreihe.

Beispiel: Würfelwurf W = Augenzahl des nächsten Würfelwurfs.

$$\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 6\}$$
$$\mathbb{P}(W = 1) = \cdots = \mathbb{P}(W = 6) = \tfrac{1}{6}$$
$$(\ \mathbb{P}(W = x) = \tfrac{1}{6} \text{ für alle } x \in \{1, \ldots, 6\}\ )$$

Die Verteilung erhält man aus einer Symmetrieüberlegung oder aus einer langen Würfelreihe.

Beispiel: Geschlecht X bei Neugeborenen.

$$\mathcal{S} = \{\text{„männlich“}, \text{„weiblich“}\}$$

Die Verteilung erhält man aus einer langen Beobachtungsreihe.

Beispiel: Körpergrößenverteilung in Deutschland.

Die Verteilung erhält man aus einer langen Messreihe.

Rechenregeln:

Beispiel Würfelwurf W:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{W=2\}\cup\{W=3\}) &= \mathbb{P}(W\in\{2,3\})\\ &= \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6} = \mathbb{P}(W=2)+\mathbb{P}(W=3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W\in\{1,2\}\cup\{3,4\}) &= \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{6}+\tfrac{2}{6}\\ &= \mathbb{P}(W\in\{1,2\})+\mathbb{P}(W\in\{3,4\})\end{aligned}$$

Vorsicht:

$$\mathbb{P}(W\in\{2,3\})+\mathbb{P}(W\in\{3,4\}) \neq \mathbb{P}(W\in\{2,3,4\})$$

Beispiel zweifacher Würfelwurf (W_1, W_2)**:**
Sei W_1 (bzw W_2) die Augenzahl des ersten (bzw zweiten) Würfels.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_1 \in \{4\}, W_2 \in \{2,3,4\}) \\
&= \mathbb{P}((W_1, W_2) \in \{(4,2),(4,3),(4,4)\}) \\
&= \frac{3}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \\
&= \mathbb{P}(W_1 \in \{4\}) \cdot \mathbb{P}(W_2 \in \{2,3,4\})
\end{aligned}$$

Sei S die Summe der Augenzahlen, d.h. $S = W_1 + W_2$.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß $S = 5$ ist,
wenn der erste Würfel die Augenzahl $W_1 = 2$ zeigt?

$$\mathbb{P}(S = 5 | W_1 = 2) \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(W_2 = 3)$$
$$= \frac{1}{6} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{\mathbb{P}(S = 5, W_1 = 2)}{\mathbb{P}(W_1 = 2)}$$

Sei S die Summe der Augenzahlen, d.h. $S = W_1 + W_2$.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß $S = 5$ ist,
wenn der erste Würfel die Augenzahl $W_1 = 2$ zeigt?

$$\mathbb{P}(S = 5 | W_1 = 2) \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(W_2 = 3)$$
$$= \frac{1}{6} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{\mathbb{P}(S = 5, W_1 = 2)}{\mathbb{P}(W_1 = 2)}$$

Was ist die Ws von $S \in \{4, 5\}$ unter der Bedingung $W_1 \in \{1, 6\}$?

$$\mathbb{P}(S \in \{4,5\} | W_1 \in \{1,6\}) = \frac{\mathbb{P}(S \in \{4,5\}, W_1 \in \{1,6\})}{\mathbb{P}(W_1 \in \{1,6\})}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(W_2 \in \{3,4\}, W_1 \in \{1\})}{\mathbb{P}(W_1 \in \{1,6\})} = \frac{\mathbb{P}((W_1, W_2) \in \{(1,3),(1,4)\})}{\mathbb{P}(W_1 \in \{1,6\})}$$
$$= \frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{6} \quad \left(\neq \frac{2}{6} = \mathbb{P}(W_2 \in \{3,4\}) \right)$$

Sei S die Summe der Augenzahlen, d.h. $S = W_1 + W_2$.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß $S = 5$ ist,
wenn der erste Würfel die Augenzahl $W_1 = 2$ zeigt?

$$\mathbb{P}(S = 5 | W_1 = 2) \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(W_2 = 3)$$
$$= \frac{1}{6} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{\mathbb{P}(S = 5, W_1 = 2)}{\mathbb{P}(W_1 = 2)}$$

Was ist die Ws von $S \in \{4, 5\}$ unter der Bedingung $W_1 \in \{1, 6\}$?

$$\mathbb{P}(S \in \{4,5\} | W_1 \in \{1,6\}) = \frac{\mathbb{P}(S \in \{4,5\}, W_1 \in \{1,6\})}{\mathbb{P}(W_1 \in \{1,6\})}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(W_2 \in \{3,4\}, W_1 \in \{1\})}{\mathbb{P}(W_1 \in \{1,6\})} = \frac{\mathbb{P}((W_1, W_2) \in \{(1,3),(1,4)\})}{\mathbb{P}(W_1 \in \{1,6\})}$$
$$= \frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{6} \quad \left(\neq \frac{2}{6} = \mathbb{P}(W_2 \in \{3,4\}) \right)$$

(Bem.: Es ist $\mathbb{P}(S \in \{4,5\} | W_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(S \in \{4,5\}, W_1 = 1)}{\mathbb{P}(W_1 = 1)} = \frac{\mathbb{P}((W_1, W_2) \in \{(1,3),(1,4)\})}{\mathbb{P}(W_1 = 1)} = \frac{2/36}{1/6} = \frac{2}{6}$ und
$\mathbb{P}(S \in \{4,5\} | W_1 = 6) = \frac{\mathbb{P}((W_1, W_2) \in \{(1,-2),(1,-1)\})}{\mathbb{P}(W_1 = 6)} = \frac{0}{1/6} = 0$ sowie
$\mathbb{P}(W_1 = 1 \mid W_1 \in \{1,6\}) = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(W_1 = 6 \mid W_1 \in \{1,6\})$, d.h. man durch Bedingen in zwei Schritten sehen:
$\mathbb{P}(S \in \{4,5\} | W_1 \in \{1,6\})$
$= \mathbb{P}(W_1 = 1 \mid W_1 \in \{1,6\}) \cdot \mathbb{P}(S \in \{4,5\} | W_1 = 1) + \mathbb{P}(W_1 = 6 \mid W_1 \in \{1,6\}) \cdot \mathbb{P}(S \in \{4,5\} | W_1 = 6)$.)

Rechenregeln:

Sei X Zufallsgröße mit Wertebereich $\mathcal{S}$.

- $0 \leq \mathbb{P}(X \in A) \leq 1$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{S}$

Rechenregeln:

Sei X Zufallsgröße mit Wertebereich $\mathcal{S}$.

- $0 \leq \mathbb{P}(X \in A) \leq 1$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{S}$
- $\mathbb{P}(X \in \mathcal{S}) = 1$

Rechenregeln:

Sei X Zufallsgröße mit Wertebereich $\mathcal{S}$.

- $0 \leq \mathbb{P}(X \in A) \leq 1$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{S}$
- $\mathbb{P}(X \in \mathcal{S}) = 1$
- Sind $A, B \subseteq \mathcal{S}$ disjunkt, d.h. $A \cap B = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B),$$

insbesondere $\mathbb{P}(X \in A^c) = 1 - \mathbb{P}(X \in A)$ mit $A^c = \mathcal{S} \setminus A$

Rechenregeln:

Sei X Zufallsgröße mit Wertebereich $\mathcal{S}$.

- $0 \leq \mathbb{P}(X \in A) \leq 1$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{S}$
- $\mathbb{P}(X \in \mathcal{S}) = 1$
- Sind $A, B \subseteq \mathcal{S}$ disjunkt, d.h. $A \cap B = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B),$$

insbesondere $\mathbb{P}(X \in A^c) = 1 - \mathbb{P}(X \in A)$ mit $A^c = \mathcal{S} \setminus A$

- Allgemein gilt

$$\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A \cap B)$$

(„Einschluss-Ausschluss-Formel“)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ws des Ereignisses $\{Y \in B\}$ unter der Bedingung $\{X \in A\}$

$$\mathbb{P}(Y \in B | X \in A) := \frac{\mathbb{P}(Y \in B, X \in A)}{\mathbb{P}(X \in A)}$$

„bedingte Ws von $\{Y \in B\}$ gegeben $\{X \in A\}$“

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ws des Ereignisses $\{Y \in B\}$ unter der Bedingung $\{X \in A\}$

$$\mathbb{P}(Y \in B | X \in A) := \frac{\mathbb{P}(Y \in B, X \in A)}{\mathbb{P}(X \in A)}$$

„bedingte Ws von $\{Y \in B\}$ gegeben $\{X \in A\}$“

Beachte:

$$\mathbb{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B \mid X \in A)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ws des Ereignisses $\{Y \in B\}$ unter der Bedingung $\{X \in A\}$

$$\mathbb{P}(Y \in B | X \in A) := \frac{\mathbb{P}(Y \in B, X \in A)}{\mathbb{P}(X \in A)} \qquad (*)$$

„bedingte Ws von $\{Y \in B\}$ gegeben $\{X \in A\}$“

Beachte:

$$\mathbb{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B \mid X \in A)$$

$(*)$ in Worten ausgedrückt:

Die Ws des Ereignisses $\{X \in A,\ Y \in B\}$ läßt sich in zwei Schritten berechnen:

- Zunächst muss das Ereignis $\{X \in A\}$ eintreten.
- Die Ws hiervon wird multipliziert mit der Ws von $\{Y \in B\}$, wenn man schon weiß, daß $\{X \in A\}$ eintritt.

Die Formel von Bayes

Seien X, Y Zufallsgrößen mit Wertebereichen $\mathcal{S}_X$ bzw. $\mathcal{S}_Y$, $A \subset \mathcal{S}_X$, $B \subset \mathcal{S}_Y$, dann gilt

$$\mathbb{P}(Y \in B \mid X \in A)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \in A \mid Y \in B) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)}{\mathbb{P}(X \in A \mid Y \in B) \cdot \mathbb{P}(Y \in B) + \mathbb{P}(X \in A \mid Y \in B^c) \cdot \mathbb{P}(Y \in B^c)}$$

Die Formel von Bayes

Seien X, Y Zufallsgrößen mit Wertebereichen $\mathcal{S}_X$ bzw. $\mathcal{S}_Y$, $A \subset \mathcal{S}_X$, $B \subset \mathcal{S}_Y$, dann gilt

$$\mathbb{P}(Y \in B \mid X \in A) = \frac{\mathbb{P}(X \in A \mid Y \in B) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)}{\mathbb{P}(X \in A \mid Y \in B) \cdot \mathbb{P}(Y \in B) + \mathbb{P}(X \in A \mid Y \in B^c) \cdot \mathbb{P}(Y \in B^c)}$$

Denn

$$\text{Zähler} = \mathbb{P}(X \in A, Y \in B)$$

$$\begin{aligned}\text{Nenner} &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) + \mathbb{P}(X \in A, Y \in B^c) \\ &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in B \cup B^c) = \mathbb{P}(X \in A)\end{aligned}$$

Beispiel: Medizinische Reihenuntersuchung

Eine Krankheit komme bei 2% der Bevölkerung vor („Prävalenz 2%“),
ein Test schlage bei 95% der Kranken an („Sensitivität 95%“),
aber auch bei 10% der Gesunden („Spezifität 90%“)

Beispiel: Medizinische Reihenuntersuchung

Eine Krankheit komme bei 2% der Bevölkerung vor („Prävalenz 2%“),
ein Test schlage bei 95% der Kranken an („Sensitivität 95%“),
aber auch bei 10% der Gesunden („Spezifität 90%“)

Eine zufällig gewählte Person werde mit positivem Resultat getestet.
Wie wahrscheinlich ist es, dass sie tatsächlich krank ist?

Beispiel: Medizinische Reihenuntersuchung

Eine Krankheit komme bei 2% der Bevölkerung vor („Prävalenz 2%“),
ein Test schlage bei 95% der Kranken an („Sensitivität 95%“),
aber auch bei 10% der Gesunden („Spezifität 90%“)

Eine zufällig gewählte Person werde mit positivem Resultat getestet.
Wie wahrscheinlich ist es, dass sie tatsächlich krank ist?

Modell: $X =$Testergebnis ($S_X = \{\text{positiv}, \text{negativ}\}$),
$Y =$Gesundheitszustand ($S_Y = \{\text{gesund}, \text{krank}\}$) der Person

Gesucht $\mathbb{P}(Y = \text{krank} \mid X = \text{positiv}) =?$

Beispiel: Medizinische Reihenuntersuchung

Eine Krankheit komme bei 2% der Bevölkerung vor („Prävalenz 2%“),
ein Test schlage bei 95% der Kranken an („Sensitivität 95%“),
aber auch bei 10% der Gesunden („Spezifität 90%“)

Eine zufällig gewählte Person werde mit positivem Resultat getestet.
Wie wahrscheinlich ist es, dass sie tatsächlich krank ist?

Modell: $X =$Testergebnis ($S_X = \{\text{positiv}, \text{negativ}\}$),
$Y =$Gesundheitszustand ($S_Y = \{\text{gesund}, \text{krank}\}$) der Person

Gesucht $\mathbb{P}(Y = \text{krank} \mid X = \text{positiv}) = ?$

Wir wissen: $\mathbb{P}(Y = \text{krank}) = 0.02$, $\mathbb{P}(Y = \text{gesund}) = 0.02$,
$\mathbb{P}(X = \text{positiv} \mid Y = \text{krank}) = 0.95$,
$\mathbb{P}(X = \text{positiv} \mid Y = \text{gesund}) = 0.1$

Beispiel: Medizinische Reihenuntersuchung

Eine Krankheit komme bei 2% der Bevölkerung vor („Prävalenz 2%“),
ein Test schlage bei 95% der Kranken an („Sensitivität 95%“),
aber auch bei 10% der Gesunden („Spezifität 90%“)

Eine zufällig gewählte Person werde mit positivem Resultat getestet.
Wie wahrscheinlich ist es, dass sie tatsächlich krank ist?

Modell: $X =$Testergebnis ($S_X = \{\text{positiv}, \text{negativ}\}$),
$Y =$Gesundheitszustand ($S_Y = \{\text{gesund}, \text{krank}\}$) der Person

Gesucht $\mathbb{P}(Y = \text{krank} \mid X = \text{positiv}) = ?$

Wir wissen: $\mathbb{P}(Y = \text{krank}) = 0.02$, $\mathbb{P}(Y = \text{gesund}) = 0.02$,
$\mathbb{P}(X = \text{positiv} \mid Y = \text{krank}) = 0.95$,
$\mathbb{P}(X = \text{positiv} \mid Y = \text{gesund}) = 0.1$,

also $\mathbb{P}(Y = \text{krank} \mid X = \text{positiv}) = \frac{0.02 \cdot 0.95}{0.02 \cdot 0.95 + 0.98 \cdot 0.1} \doteq 0.162$

Stochastische Unabhängigkeit

Definition

Zwei Zufallsgrößen X und Y heißen (stochastisch) unabhängig, wenn für alle Ereignisse $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ gilt

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

Stochastische Unabhängigkeit

Definition

Zwei Zufallsgrößen X und Y heißen (stochastisch) unabhängig, wenn für alle Ereignisse $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ gilt

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

Beispiel:

- Werfen zweier Würfel:
  $X =$ Augenzahl Würfel 1, $Y =$ Augenzahl Würfel 2.

$$\mathbb{P}(X = 2,\ Y = 5) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 5)$$

Stochastische Unabhängigkeit

In der Praxis wendet man häufig Resultate an, die Unabhängigkeit einer Stichprobe voraussetzen.

Stochastische Unabhängigkeit

In der Praxis wendet man häufig Resultate an, die Unabhängigkeit einer Stichprobe voraussetzen.

Beispiele:

- Für eine Studie wird eine zufällige Person in München und eine zufällige Person in Hamburg befragt. Die Antworten dürfen als unabhängig voneinander angenommen werden.

Stochastische Unabhängigkeit

In der Praxis wendet man häufig Resultate an, die Unabhängigkeit einer Stichprobe voraussetzen.

Beispiele:

- Für eine Studie wird eine zufällige Person in München und eine zufällige Person in Hamburg befragt. Die Antworten dürfen als unabhängig voneinander angenommen werden.
- Befragt man zwei Schwestern oder nahe verwandte (getrennt voneinander), so werden die Antworten nicht unabhängig voneinander sein.

Inhalt

Bernoulli-Verteilung

Als Bernoulli-Experiment bezeichnet man jeden zufälligen Vorgang mit exakt zwei möglichen Werten.

Bernoulli-Verteilung

Als Bernoulli-Experiment bezeichnet man jeden zufälligen Vorgang mit exakt zwei möglichen Werten.

Diese werden üblicherweise mit 1 und 0 bezeichnet

Bernoulli-Verteilung

Als Bernoulli-Experiment bezeichnet man jeden zufälligen Vorgang mit exakt zwei möglichen Werten.

Diese werden üblicherweise mit 1 und 0 bezeichnet , beziehungsweise als „Erfolg“ und „Misserfolg“.

Bernoulli-Verteilung

Als Bernoulli-Experiment bezeichnet man jeden zufälligen Vorgang mit exakt zwei möglichen Werten.

Diese werden üblicherweise mit 1 und 0 bezeichnet , beziehungsweise als „Erfolg“ und „Misserfolg“.

Bernoulli-Zufallsgröße X:

Zustandsraum $\mathcal{S} = \{0, 1\}$.
Verteilung:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Der Parameter $p \in [0, 1]$ heißt Erfolgswahrscheinlichkeit.

Bernoulli-Verteilung

Beispiele:

- Münzwurf: mögliche Werte sind „Kopf“ und „Zahl“.

Bernoulli-Verteilung

Beispiele:

- Münzwurf: mögliche Werte sind „Kopf“ und „Zahl“.
- Hat die gesampelte Drosophila eine Mutation, die weiße Augen verursacht?
  Mögliche Antworten sind „Ja“ und „Nein“.

Bernoulli-Verteilung

Beispiele:

- Münzwurf: mögliche Werte sind „Kopf“ und „Zahl“.
- Hat die gesampelte Drosophila eine Mutation, die weiße Augen verursacht?
  Mögliche Antworten sind „Ja“ und „Nein“.
- Das Geschlecht einer Person hat die möglichen Werte „männlich“ und „weiblich“.

Angenommen, ein Bernoulli-Experiment (z.B. Münzwurf zeigt Kopf) mit Erfolgsws p, wird n mal *unabhängig* wiederholt.

Angenommen, ein Bernoulli-Experiment (z.B. Münzwurf zeigt Kopf) mit Erfolgsws p, wird n mal *unabhängig* wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es...

1. ...immer gelingt?

Angenommen, ein Bernoulli-Experiment (z.B. Münzwurf zeigt Kopf) mit Erfolgsws p, wird n mal *unabhängig* wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es...

1. ...immer gelingt?

$$p \cdot p \cdot p \cdots p = p^n$$

Angenommen, ein Bernoulli-Experiment (z.B. Münzwurf zeigt Kopf) mit Erfolgsws p, wird n mal *unabhängig* wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es...

1. ...immer gelingt?

$$p \cdot p \cdot p \cdots p = p^n$$

2. ...immer scheitert?

Angenommen, ein Bernoulli-Experiment (z.B. Münzwurf zeigt Kopf) mit Erfolgsws p, wird n mal *unabhängig* wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es...

1. ...immer gelingt?

$$p \cdot p \cdot p \cdots p = p^n$$

2. ...immer scheitert?

$$(1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p) = (1-p)^n$$

Angenommen, ein Bernoulli-Experiment (z.B. Münzwurf zeigt Kopf) mit Erfolgsws p, wird n mal *unabhängig* wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es...

1. ...immer gelingt?

$$p \cdot p \cdot p \cdots p = p^n$$

2. ...immer scheitert?

$$(1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p) = (1-p)^n$$

3. ...erst k mal gelingt und dann $n-k$ mal scheitert?

Angenommen, ein Bernoulli-Experiment (z.B. Münzwurf zeigt Kopf) mit Erfolgsws p, wird n mal *unabhängig* wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es...

1. ...immer gelingt?

$$p \cdot p \cdot p \cdots p = p^n$$

2. ...immer scheitert?

$$(1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p) = (1-p)^n$$

3. ...erst k mal gelingt und dann $n-k$ mal scheitert?

$$p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

4. ...insgesamt k mal gelingt und $n-k$ mal scheitert?

Angenommen, ein Bernoulli-Experiment (z.B. Münzwurf zeigt Kopf) mit Erfolgsws p, wird n mal *unabhängig* wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es...

1. ...immer gelingt?

$$p \cdot p \cdot p \cdots p = p^n$$

2. ...immer scheitert?

$$(1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p) = (1-p)^n$$

3. ...erst k mal gelingt und dann $n-k$ mal scheitert?

$$p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

4. ...insgesamt k mal gelingt und $n-k$ mal scheitert?

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Erläuterung

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, die k Erfolge in die n Versuche einzusortieren.

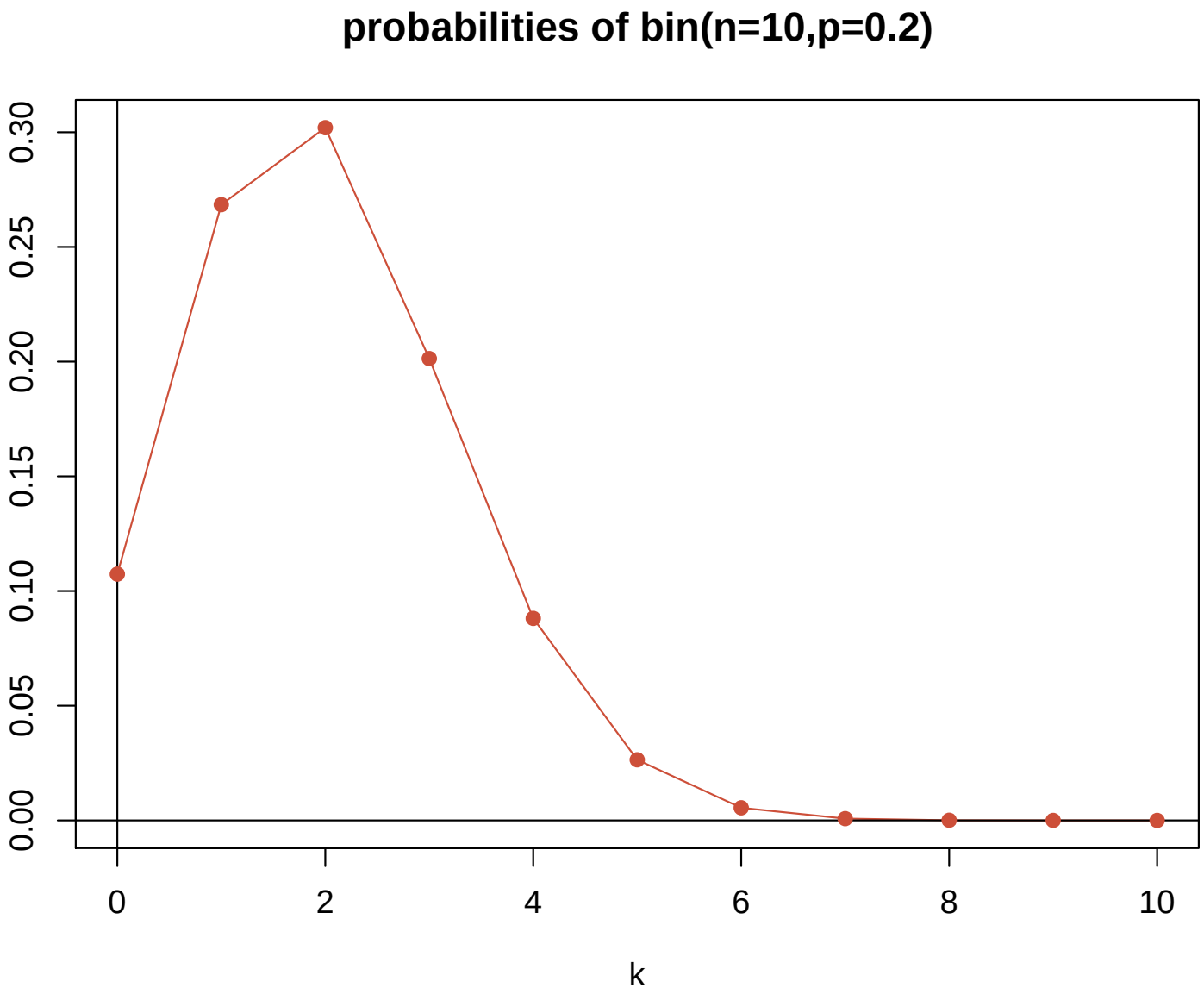
Binomialverteilung

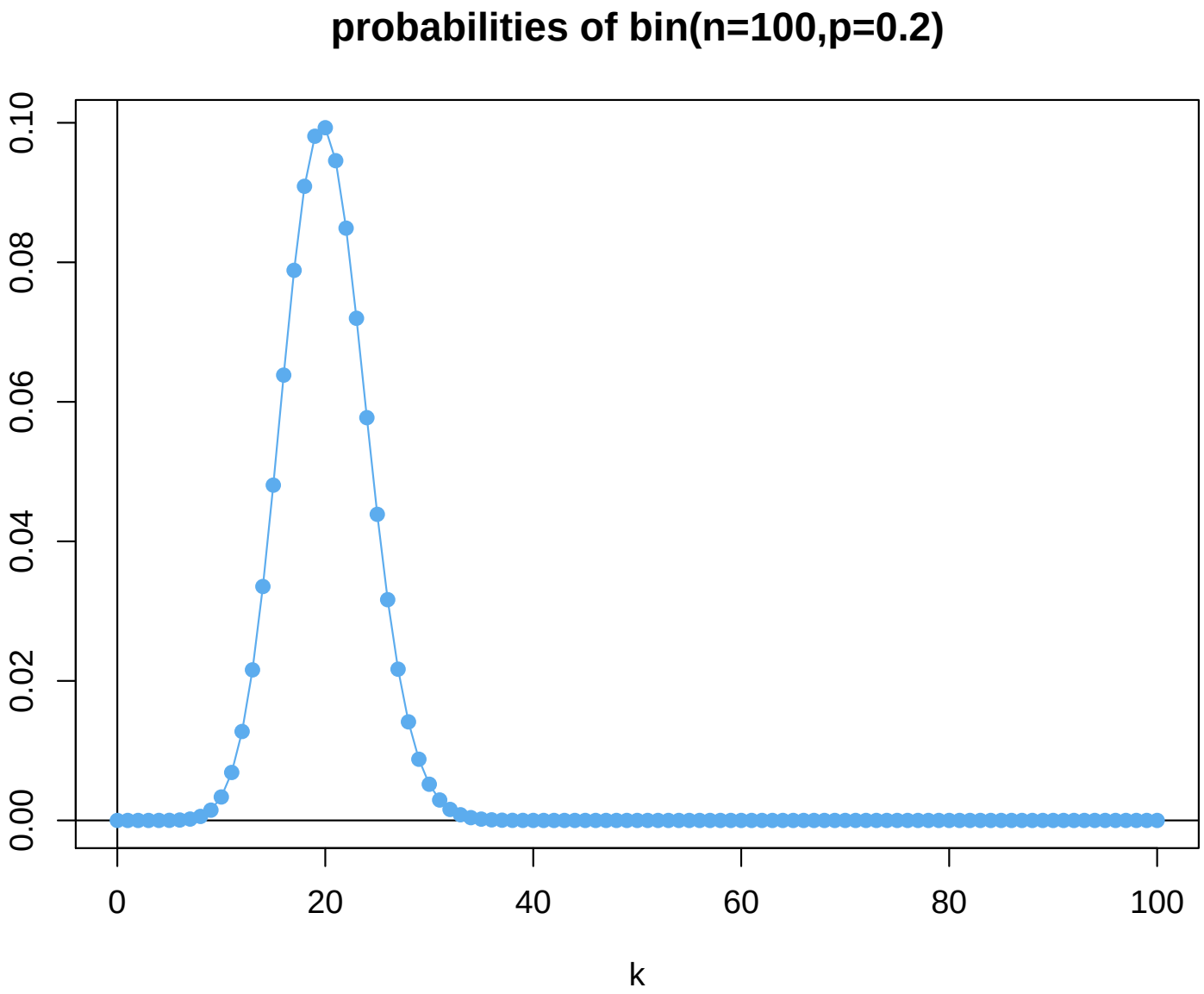
Sei X die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit von jeweils p. Dann gilt für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

und X heißt *binomialverteilt*, kurz:

$$X \sim \text{bin}(n, p).$$


probabilities of bin(n=10,p=0.2)
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0
2
4
6
8
10
k


probabilities of bin(n=100,p=0.2)
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0
20
40
60
80
100
k

Inhalt

Definition (Erwartungswert)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder aufzählbarem Wertebereich $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \subseteq \mathbb{R}$.

Definition (Erwartungswert)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder aufzählbarem Wertebereich $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der *Erwartungswert* von X definiert durch

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in \mathcal{S}} a \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

Definition (Erwartungswert)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder aufzählbarem Wertebereich $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der *Erwartungswert* von X definiert durch

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in \mathcal{S}} a \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

Manchmal schreibt man auch μ_X statt $\mathbb{E}X$.

Definition (Erwartungswert)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder aufzählbarem Wertebereich $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der *Erwartungswert* von X definiert durch

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in \mathcal{S}} a \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

Manchmal schreibt man auch μ_X statt $\mathbb{E}X$.

Ersetzt man in der Definition die Wahrscheinlichkeit durch relative Häufigkeiten, so erhält man die bekannte Formel

$$\text{Erwartungswert} = \frac{\text{Summe der Werte}}{\text{Anzahl der Werte}} :$$

Definition (Erwartungswert)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder aufzählbarem Wertebereich $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der *Erwartungswert* von X definiert durch

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in \mathcal{S}} a \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

Manchmal schreibt man auch μ_X statt $\mathbb{E}X$.

Ersetzt man in der Definition die Wahrscheinlichkeit durch relative Häufigkeiten, so erhält man die bekannte Formel

$$\text{Erwartungswert} = \frac{\text{Summe der Werte}}{\text{Anzahl der Werte}} :$$

Sei k_a die Häufigkeit des Wertes a in einer Gesamtheit der Größe n, so schreibt sich der Erwartungswert als

$$\mathbb{E}X = \sum_a a \cdot \frac{k_a}{n} = \frac{\sum_a a \cdot k_a}{n} = \frac{\text{Summe der Werte}}{\text{Anzahl der Werte}}.$$

Definition (Erwartungswert)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder aufzählbarem Wertebereich $S = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der *Erwartungswert* von X definiert durch

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in S} a \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

Definition (Erwartungswert)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder aufzählbarem Wertebereich $S = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der *Erwartungswert* von X definiert durch

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in S} a \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

Beispiele:

- Sei X Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

Definition (Erwartungswert)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder aufzählbarem Wertebereich $S = \{a_1, a_2, a_3 \dots\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der *Erwartungswert* von X definiert durch

$$\mathbb{E}X = \sum_{a \in S} a \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

Beispiele:

- Sei X Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

- Sei W die Augenzahl bei einem Würfelwurf. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}W &= 1 \cdot \mathbb{P}(W = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(W = 2) + 6 \cdot \mathbb{P}(W = 6) \\ &= \frac{1 + \dots + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5\end{aligned}$$

Erwartungswert und Funktionen

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$.
Sei $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Erwartungswert und Funktionen

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist der *Erwartungswert* von $f(X)$ gegeben durch

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{a \in \mathcal{S}} f(a) \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

(Details ggfs. an der Tafel)

Erwartungswert und Funktionen

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist der *Erwartungswert* von $f(X)$ gegeben durch

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{a \in \mathcal{S}} f(a) \cdot \mathbb{P}(X = a)$$

(Details ggfs. an der Tafel)

Beispiel:
Sei W die Augenzahl bei einem Würfelwurf. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W^2] &= 1^2 \cdot \mathbb{P}(W = 1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(W = 2) + \cdots + 6^2 \cdot \mathbb{P}(W = 6) \\ &= \frac{1^2 + \cdots + 6^2}{6} = \frac{91}{6} = 15.1\overline{6}\end{aligned}$$

Rechnen mit Erwartungswerten

Satz (Linearität der Erwartung)

Sind X und Y Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$ und ist $a \in \mathbb{R}$, so gilt:

- $\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}X$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

Rechnen mit Erwartungswerten

Satz (Linearität der Erwartung)

Sind X und Y Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$ und ist $a \in \mathbb{R}$, so gilt:

- $\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}X$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

Satz (Nur für Unabhängige!)

*Sind X und Y **stochastisch unabhängige** Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$, so gilt*

- $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

Rechnen mit Erwartungswerten

Satz (Linearität der Erwartung)

Sind X und Y Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$ und ist $a \in \mathbb{R}$, so gilt:

- $\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}X$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

Satz (Nur für Unabhängige!)

*Sind X und Y **stochastisch unabhängige** Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$, so gilt*

- $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.

(Beweise ggfs. an der Tafel.)

Erwartungswert der Binomialverteilung

Seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die Indikatorvariablen der n unabhängigen Versuche d.h.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls der } i-\text{te Versuch gelingt} \\ 0 & \text{falls der } i-\text{te Versuch scheitert} \end{cases}$$

Erwartungswert der Binomialverteilung

Seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die Indikatorvariablen der n unabhängigen Versuche d.h.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls der } i-\text{te Versuch gelingt} \\ 0 & \text{falls der } i-\text{te Versuch scheitert} \end{cases}$$

Dann ist $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ binomialverteilt mit Parametern (n, p), wobei p die Erfolgswahrscheinlichkeit der Versuche ist.

Erwartungswert der Binomialverteilung

Seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die Indikatorvariablen der n unabhängigen Versuche d.h.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls der } i-\text{te Versuch gelingt} \\ 0 & \text{falls der } i-\text{te Versuch scheitert} \end{cases}$$

Dann ist $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ binomialverteilt mit Parametern (n, p), wobei p die Erfolgswahrscheinlichkeit der Versuche ist.

Wegen der Linearität der Erwartung gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E}(Y_1 + \cdots + Y_n) \\ &= \mathbb{E}Y_1 + \cdots + \mathbb{E}Y_n \end{aligned}$$

Erwartungswert der Binomialverteilung

Seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die Indikatorvariablen der n unabhängigen Versuche d.h.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls der } i-\text{te Versuch gelingt} \\ 0 & \text{falls der } i-\text{te Versuch scheitert} \end{cases}$$

Dann ist $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ binomialverteilt mit Parametern (n, p), wobei p die Erfolgswahrscheinlichkeit der Versuche ist.

Wegen der Linearität der Erwartung gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E}(Y_1 + \cdots + Y_n) \\ &= \mathbb{E}Y_1 + \cdots + \mathbb{E}Y_n \\ &= p + \cdots + p = np \end{aligned}$$

Erwartungswert der Binomialverteilung

Wir halten fest:

$$X \sim \text{bin}(n, p) \Rightarrow \mathbb{E}X = n \cdot p$$

Inhalt

Definition (Varianz, Kovarianz und Korrelation)

Die *Varianz* einer $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgröße X ist

$$\mathrm{Var}X = \sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right].$$

Definition (Varianz, Kovarianz und Korrelation)

Die *Varianz* einer $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgröße X ist

$$\mathrm{Var} X = \sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right].$$

$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\ X}$ ist die *Standardabweichung*.

Definition (Varianz, Kovarianz und Korrelation)

Die *Varianz* einer $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgröße X ist

$$\mathrm{Var}X = \sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right].$$

$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\ X}$ ist die *Standardabweichung*.
Ist Y eine weitere reellwertige Zufallsvariable, so ist

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)\right]$$

die *Kovarianz* von X und Y.

Definition (Varianz, Kovarianz und Korrelation)

Die *Varianz* einer $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgröße X ist

$$\mathrm{Var}X = \sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right].$$

$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\ X}$ ist die *Standardabweichung*.
Ist Y eine weitere reellwertige Zufallsvariable, so ist

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)\right]$$

die *Kovarianz* von X und Y.
Die *Korrelation* von X und Y ist

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Die Varianz

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$$

ist die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert.

Die Varianz

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$$

ist die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert.

Die Korrelation

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

liegt immer im Intervall $[-1, 1]$. Die Variablen X und Y sind

- positiv korreliert, wenn X und Y tendenziell entweder beide überdurchschnittlich große Werte oder beide unterdurchschnittlich große Werte annehmen.
- negativ korreliert, wenn X und Y tendenziell auf verschiedenen Seiten ihrer Erwartungswerte liegen.

Die Varianz

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$$

ist die mittlere quadrierte Abweichung vom Mittelwert.

Die Korrelation

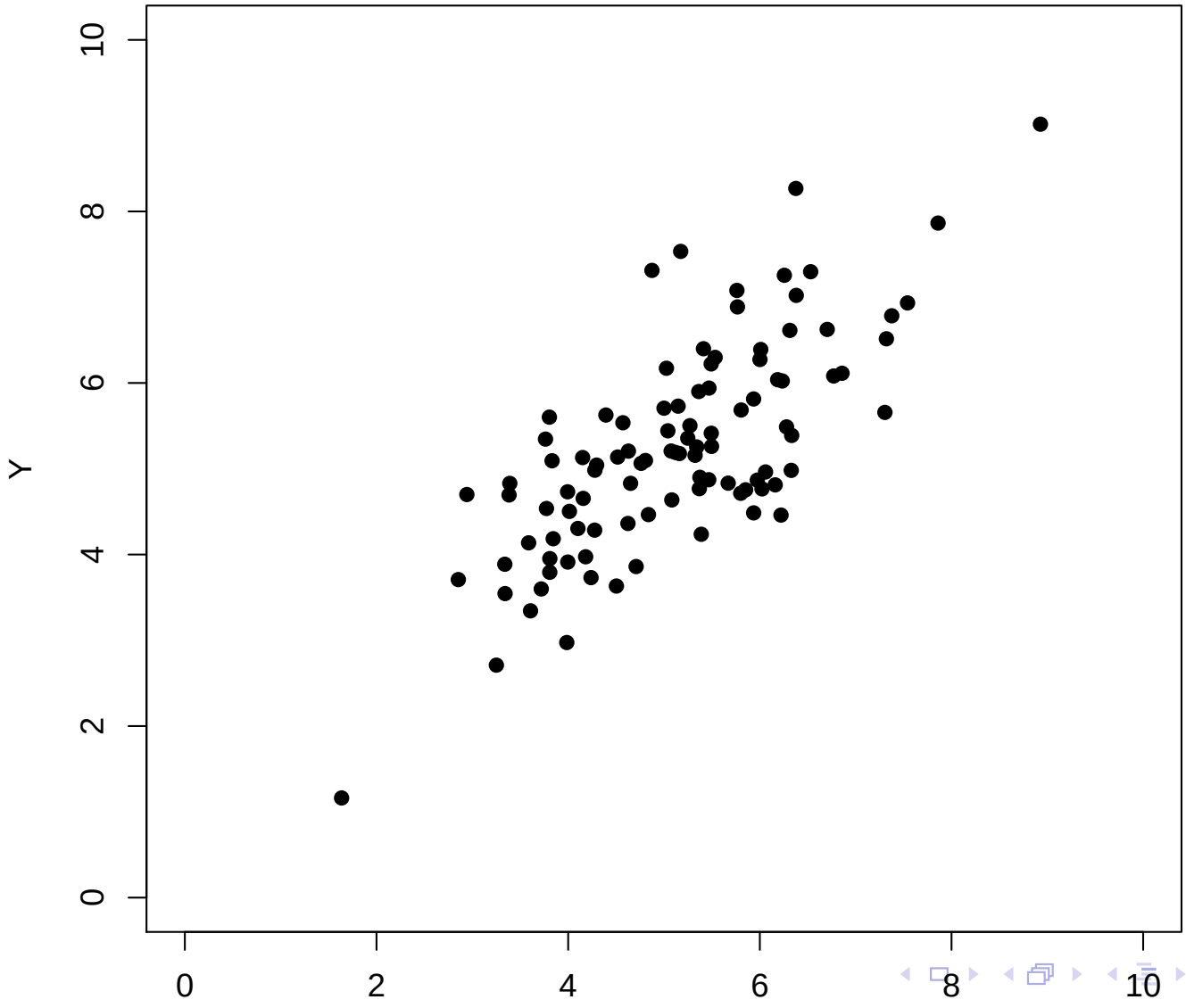
$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

liegt immer im Intervall $[-1, 1]$. Die Variablen X und Y sind

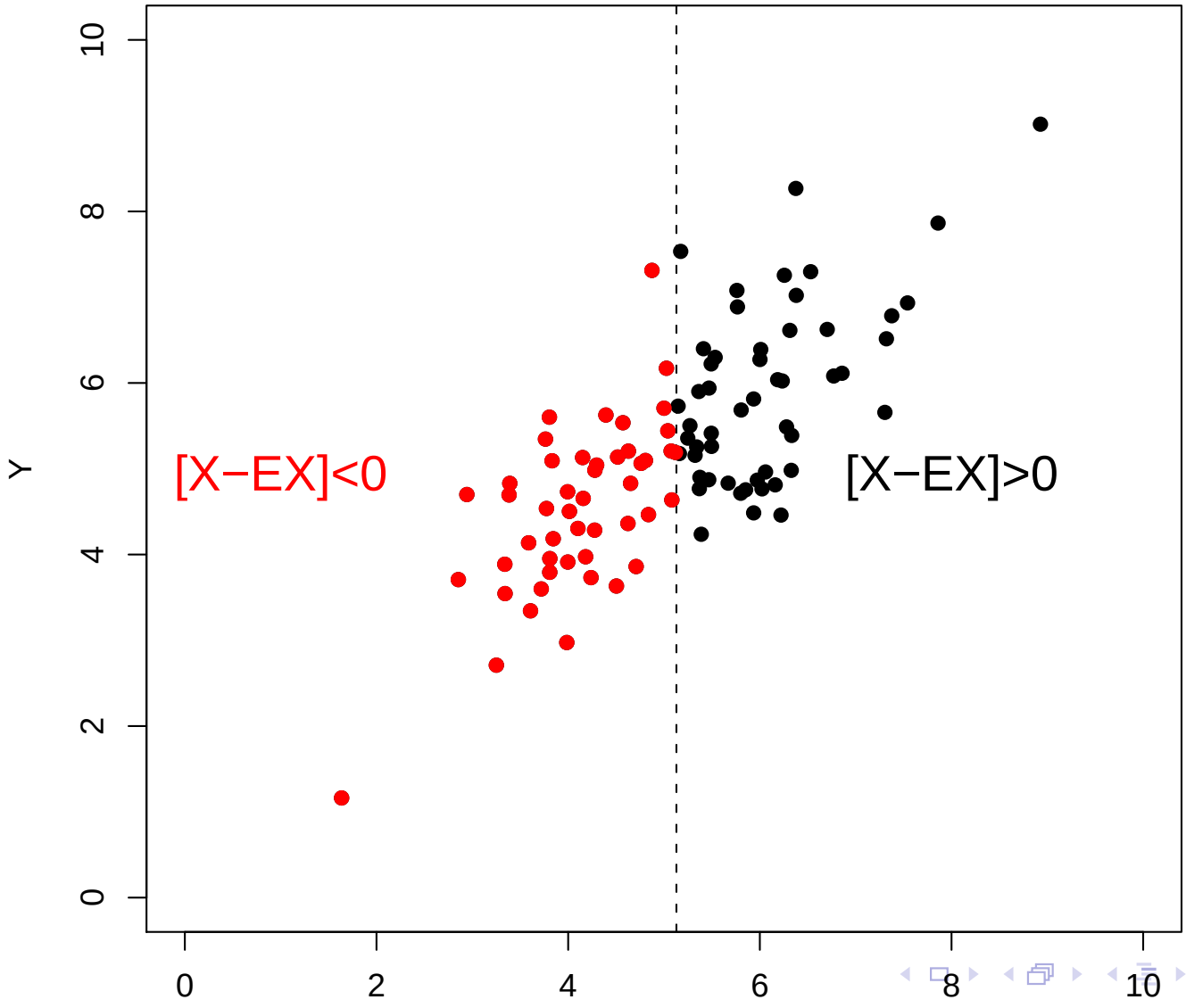
- positiv korreliert, wenn X und Y tendenziell entweder beide überdurchschnittlich große Werte oder beide unterdurchschnittlich große Werte annehmen.
- negativ korreliert, wenn X und Y tendenziell auf verschiedenen Seiten ihrer Erwartungswerte liegen.

Sind X und Y unabhängig, so sind sie auch unkorreliert, d.h. $\mathrm{Cor}(X, Y) = 0$.

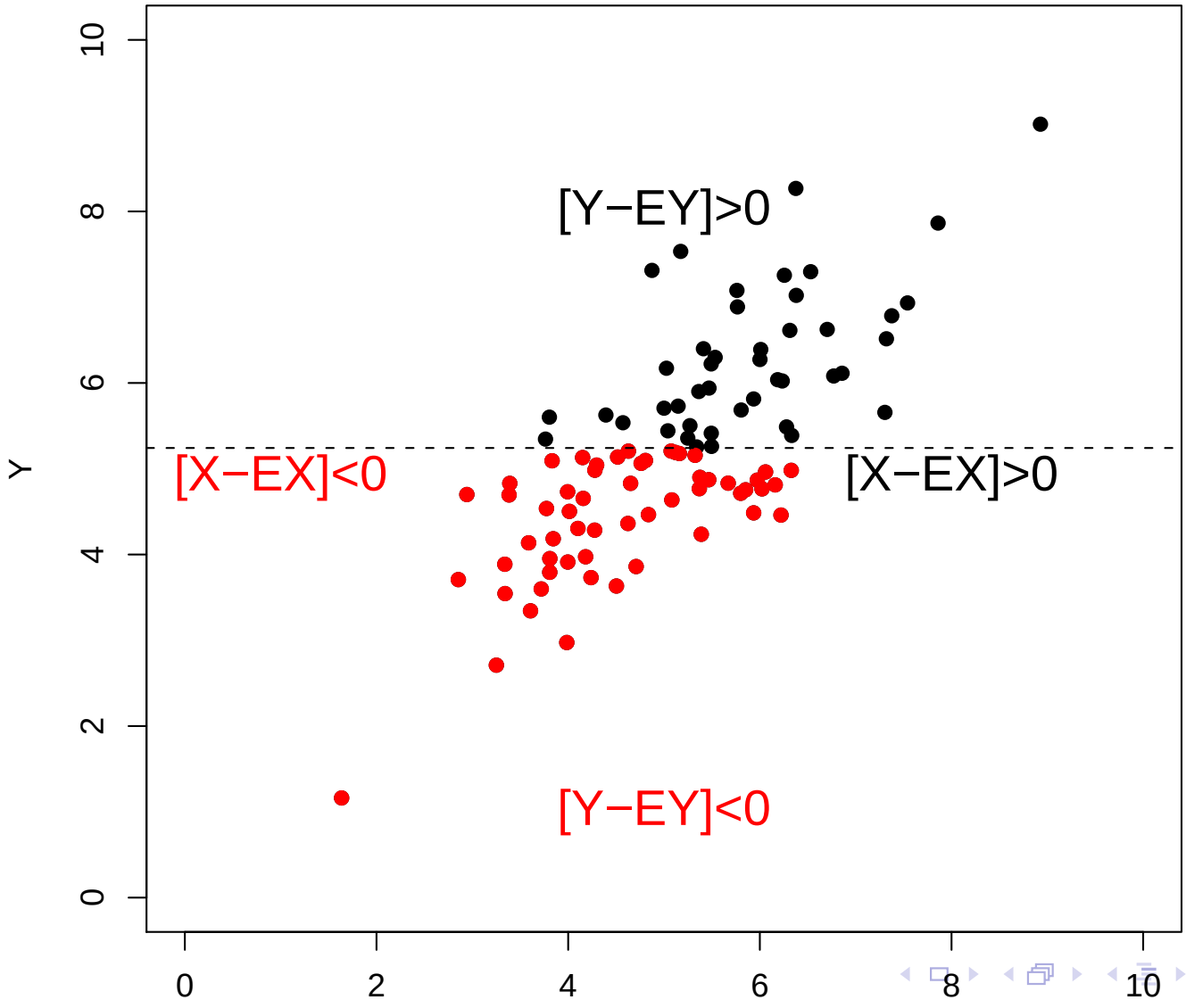
Wieso $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}X][Y - \mathbb{E}Y])$?



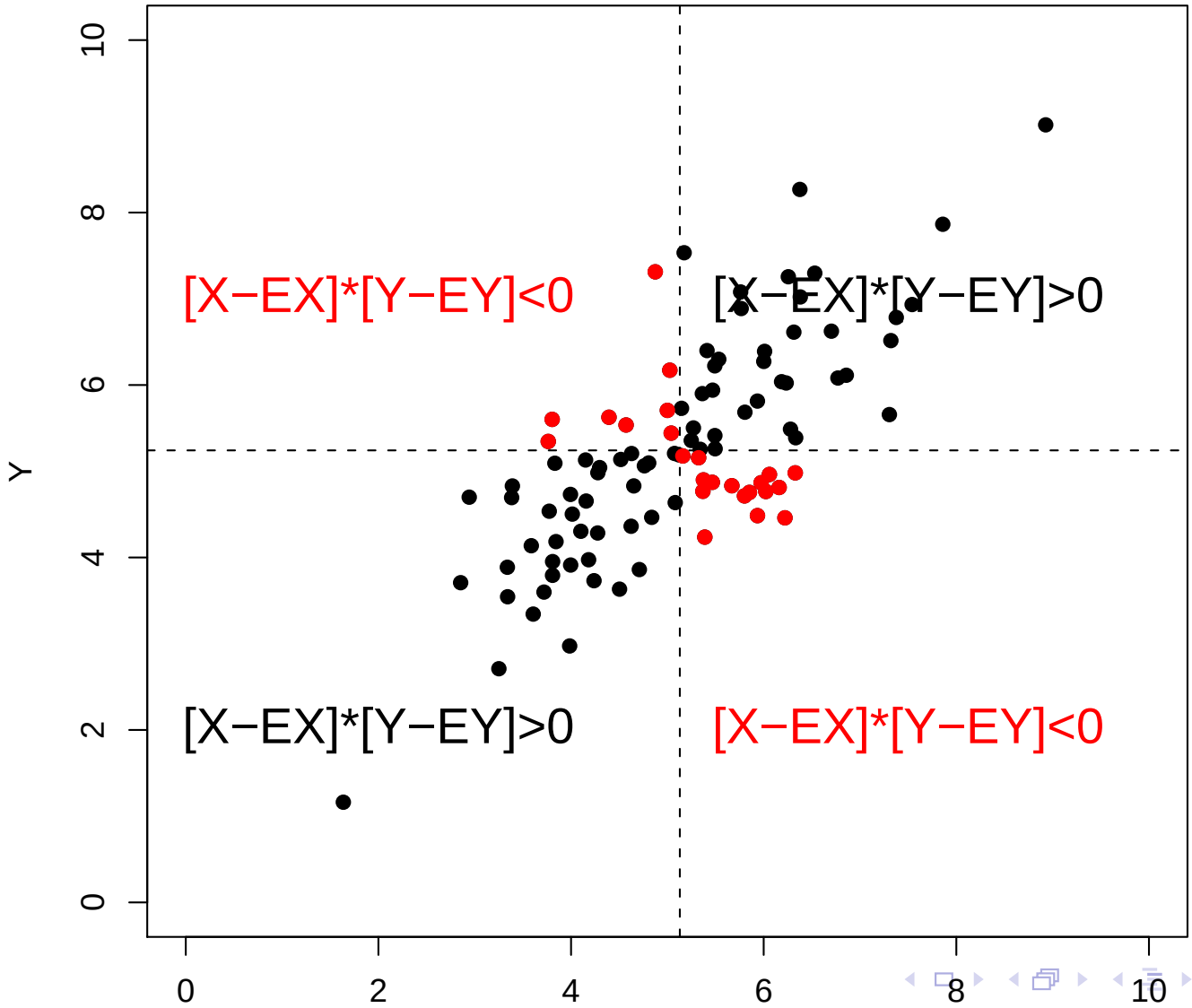
Wieso $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}X][Y - \mathbb{E}Y])$?



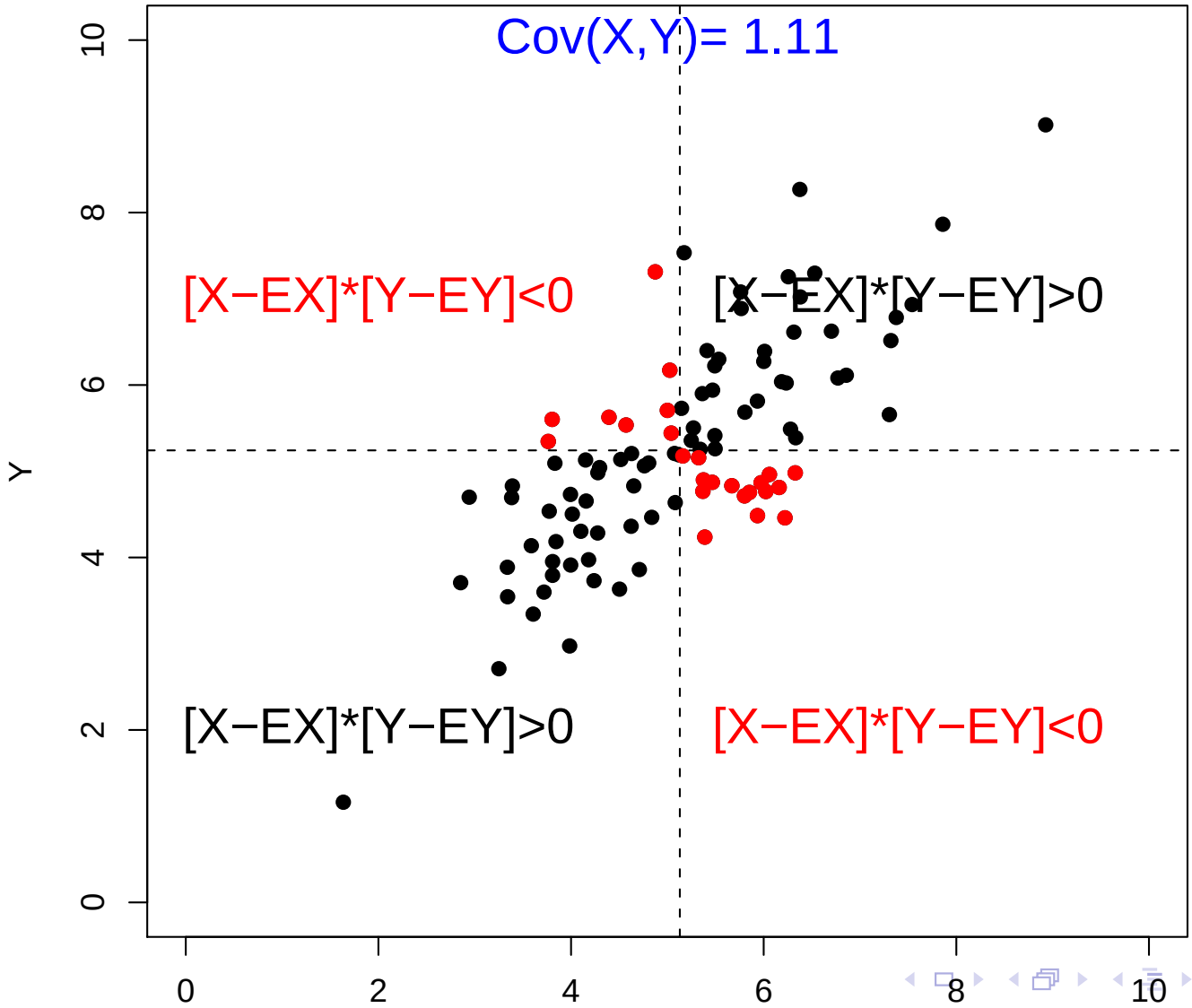
Wieso $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}X][Y - \mathbb{E}Y])$?



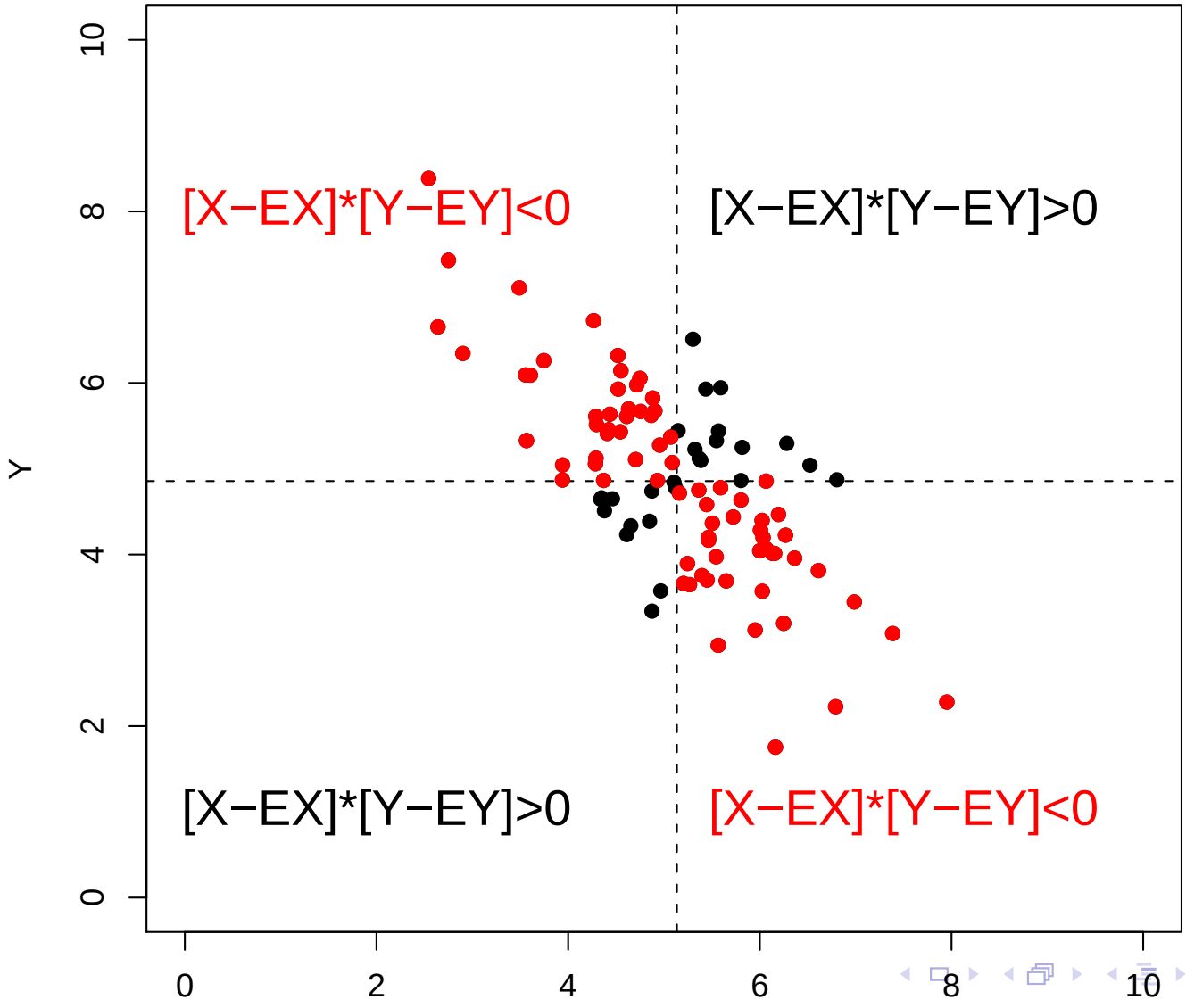
Wieso $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}X][Y - \mathbb{E}Y])$?



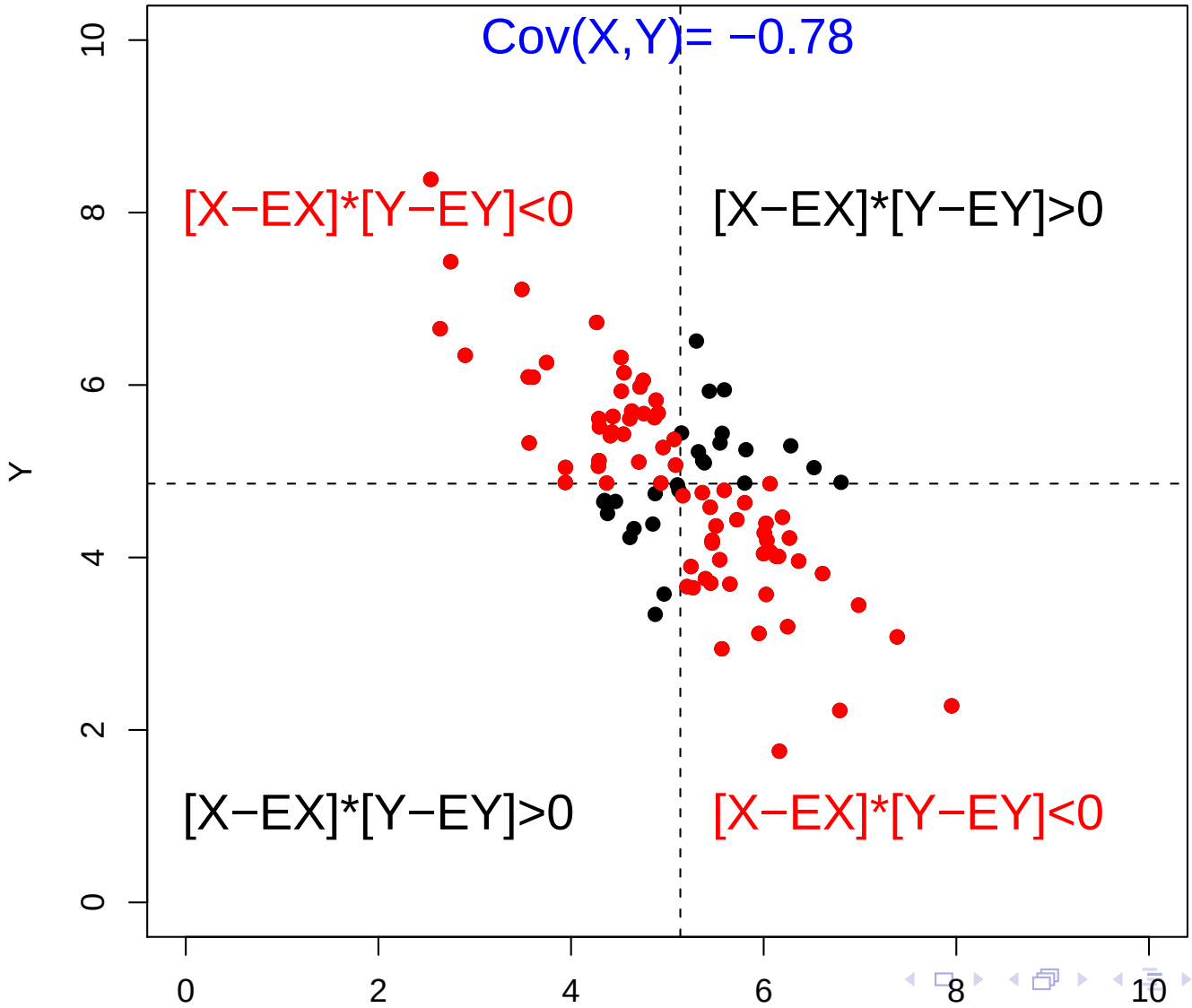
Wieso $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}X][Y - \mathbb{E}Y])$?



Wieso $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}X][Y - \mathbb{E}Y])$?



Wieso $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}X][Y - \mathbb{E}Y])$?



Beispiel: Die empirische Verteilung

Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ Daten und entsteht X durch rein zufälliges Ziehen aus diesen Daten, so gilt:

$$\mathbb{E}X = \overline{x}$$

und

$$\operatorname{Var} X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Beispiel: Die empirische Verteilung

Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ Daten und entsteht X durch rein zufälliges Ziehen aus diesen Daten, so gilt:

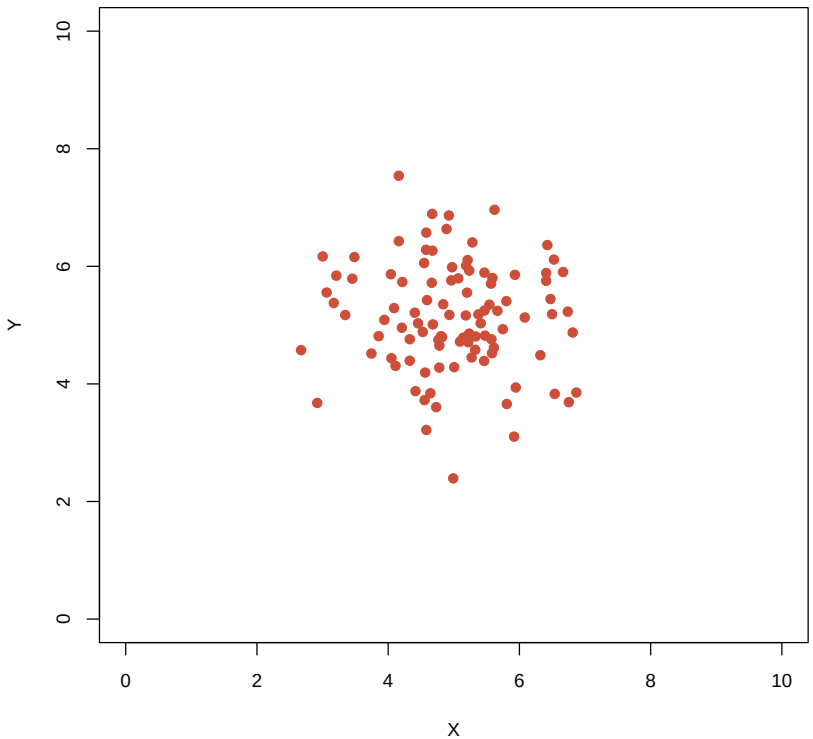
$$\mathbb{E}X = \overline{x}$$

und

$$\operatorname{Var} X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

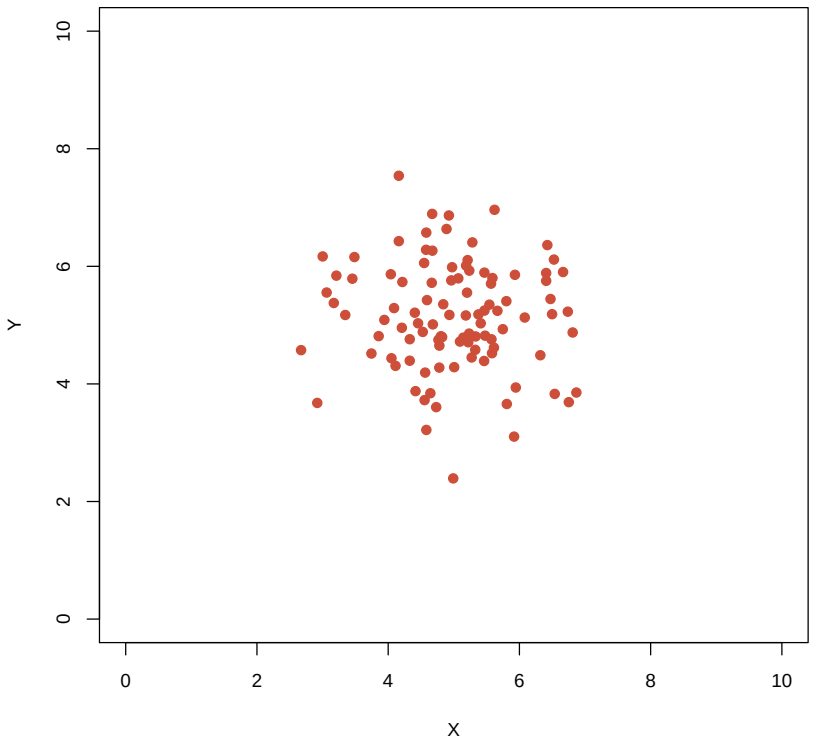
Entsprechend kann man auch für Daten (x_i, y_i) die empirischen Kovarianzen und Korrelationen ausrechen, siehe nächste Seite...

$\sigma_X = 0.95, \sigma_Y = 0.92$



$\sigma_X = 0.95, \sigma_Y = 0.92$

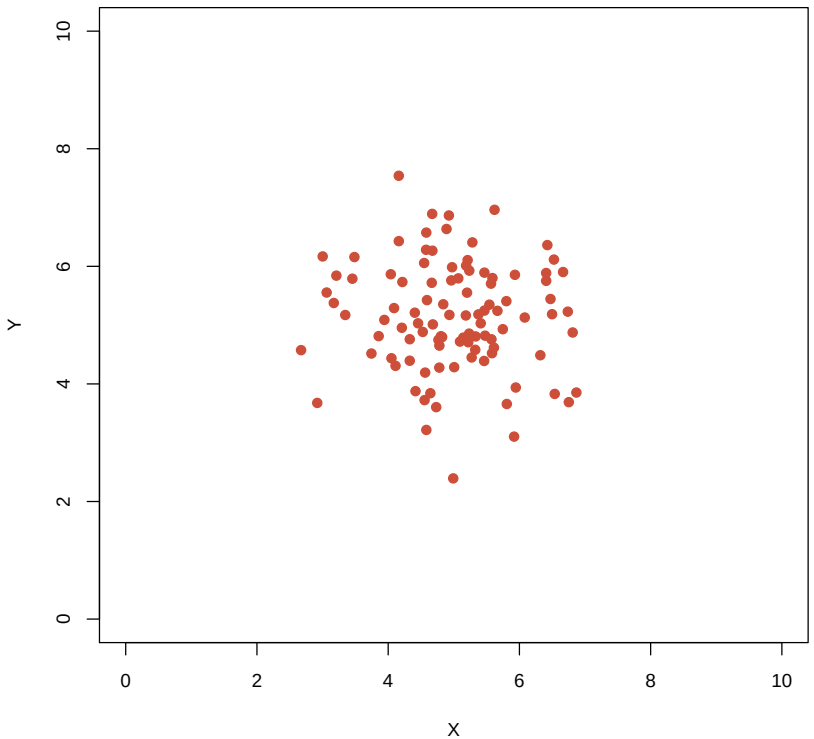
$\text{Cov}(X, Y) = -0.06$



$\sigma_X = 0.95, \sigma_Y = 0.92$

$\text{Cov}(X, Y) = -0.06$

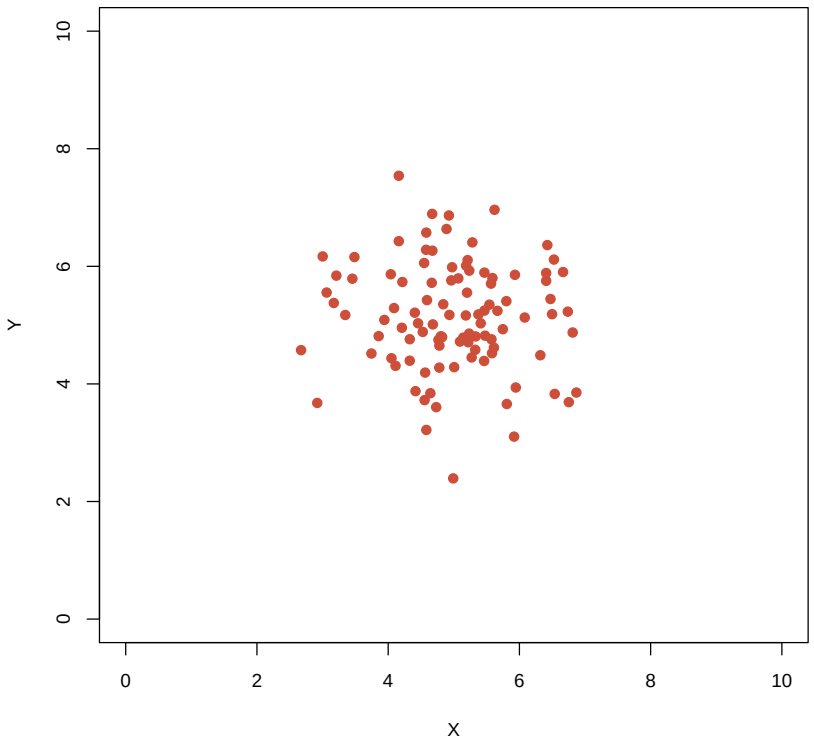
$\text{Cor}(X, Y) = -0.069$



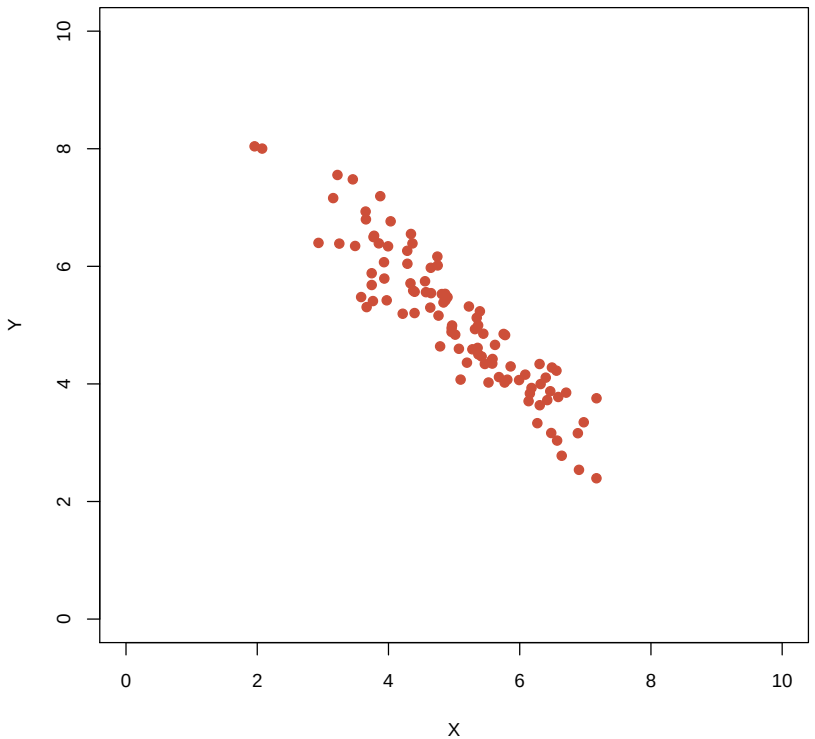
$\sigma_X = 0.95, \sigma_Y = 0.92$

$\text{Cov}(X, Y) = -0.06$

$\text{Cor}(X, Y) = -0.069$



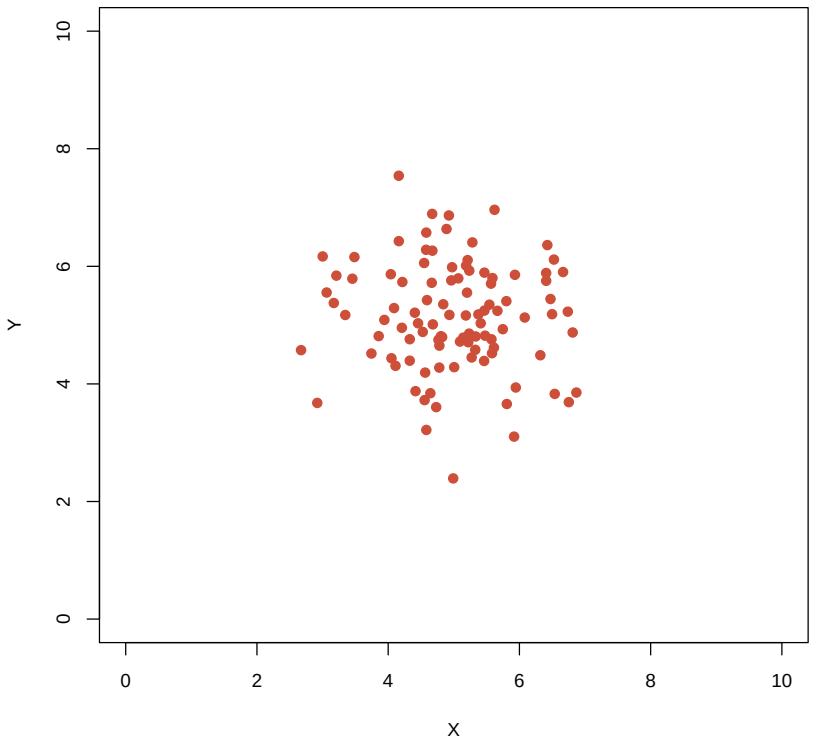
$\sigma_X = 1.13, \sigma_Y = 1.2$



$\sigma_X = 0.95, \sigma_Y = 0.92$

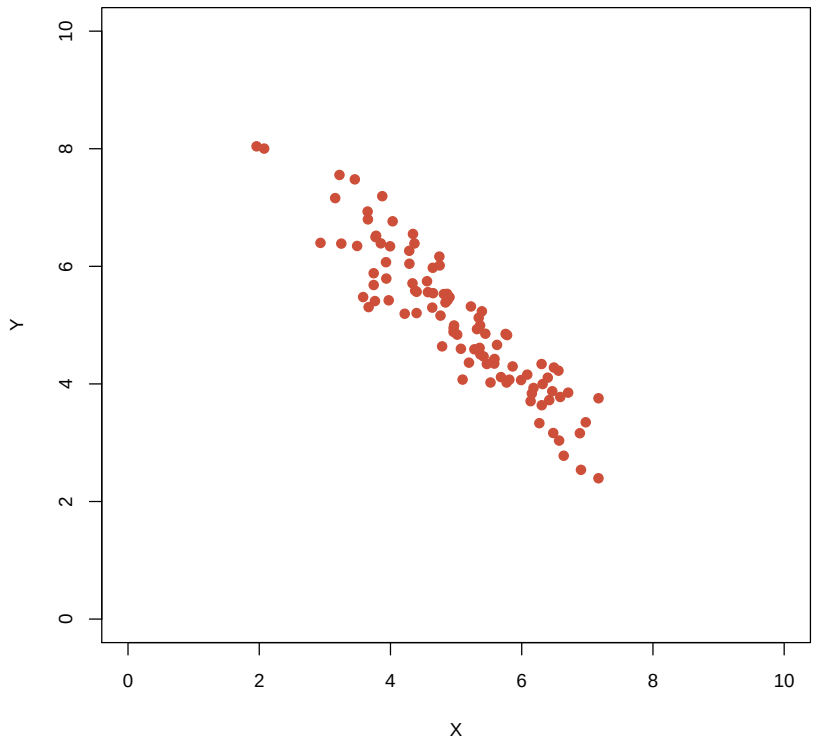
$\text{Cov}(X, Y) = -0.06$

$\text{Cor}(X, Y) = -0.069$



$\sigma_X = 1.13, \sigma_Y = 1.2$

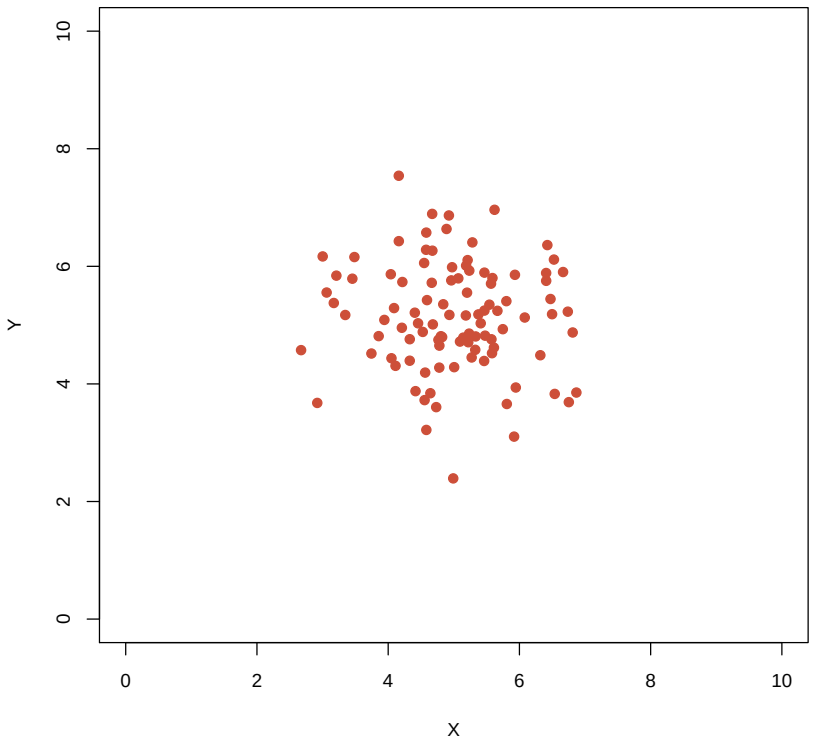
$\text{Cov}(X, Y) = -1.26$



$\sigma_X = 0.95, \sigma_Y = 0.92$

$\text{Cov}(X, Y) = -0.06$

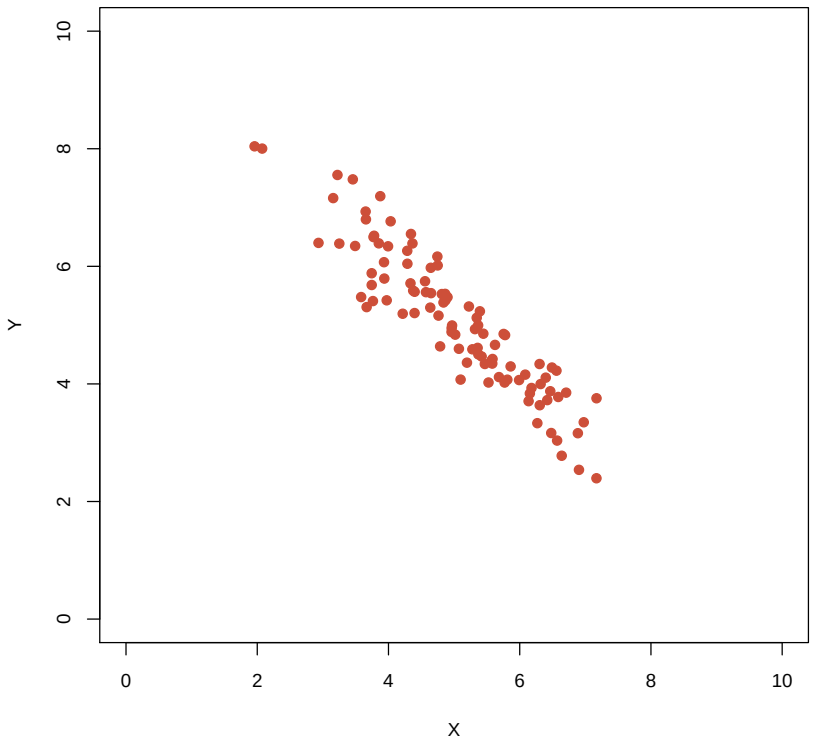
$\text{Cor}(X, Y) = -0.069$



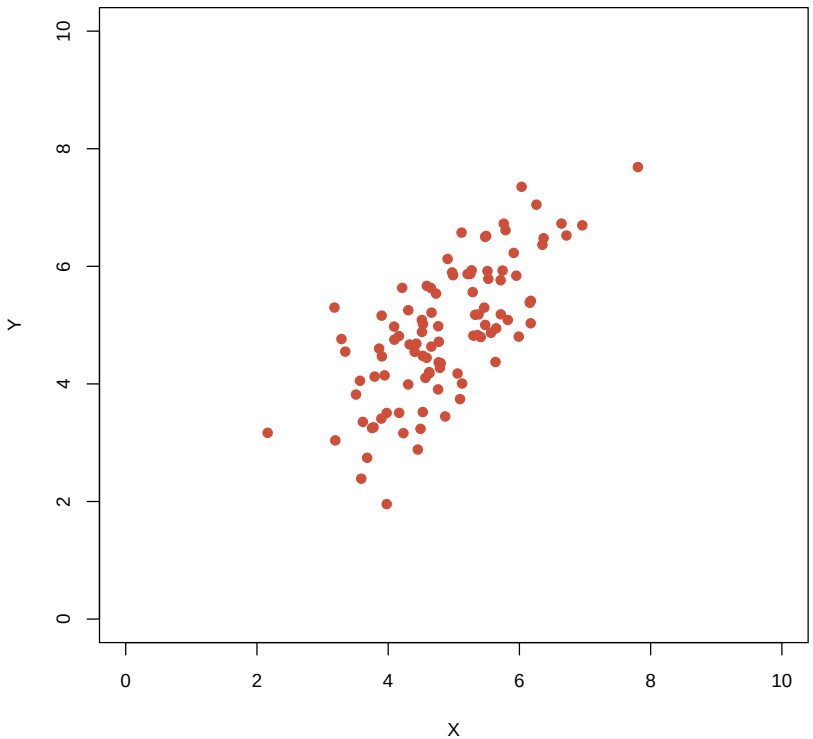
$\sigma_X = 1.13, \sigma_Y = 1.2$

$\text{Cov}(X, Y) = -1.26$

$\text{Cor}(X, Y) = -0.92$

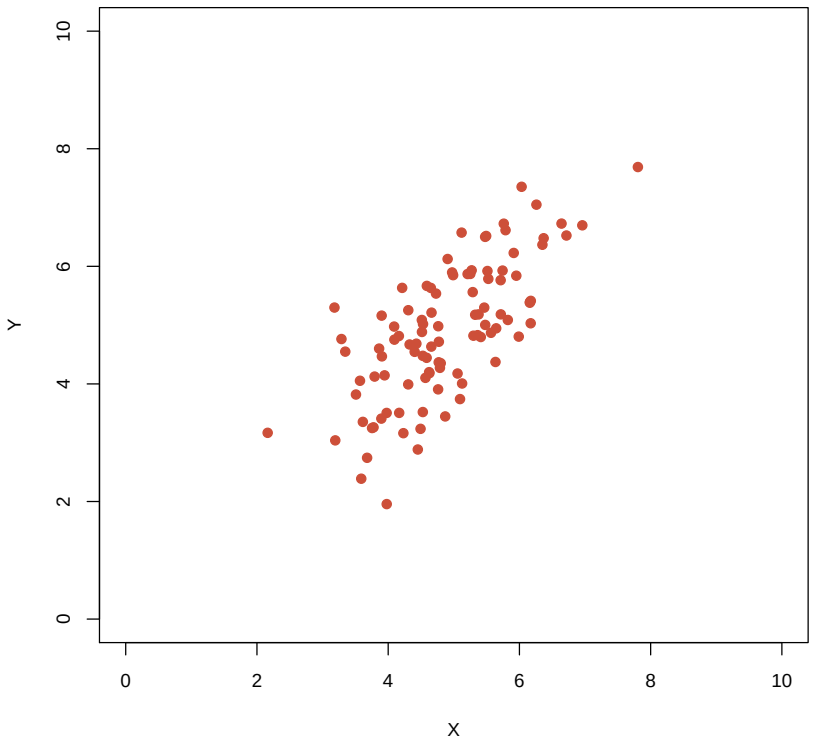


$\sigma_X = 1.14$, $\sigma_Y = 0.78$



$\sigma_X = 1.14, \sigma_Y = 0.78$

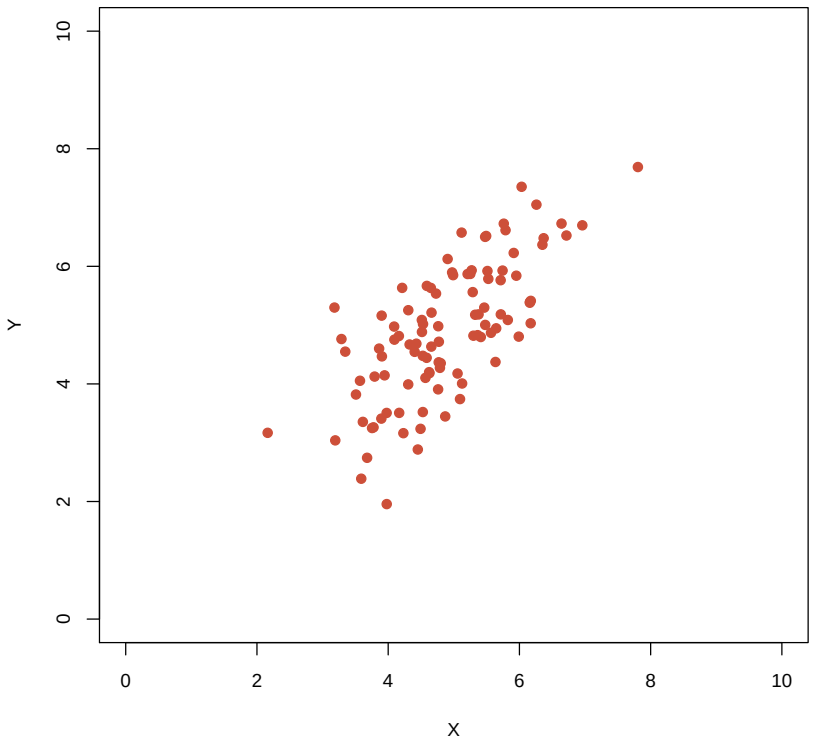
$\text{Cov}(X, Y) = 0.78$



$\sigma_X = 1.14, \sigma_Y = 0.78$

$\text{Cov}(X, Y) = 0.78$

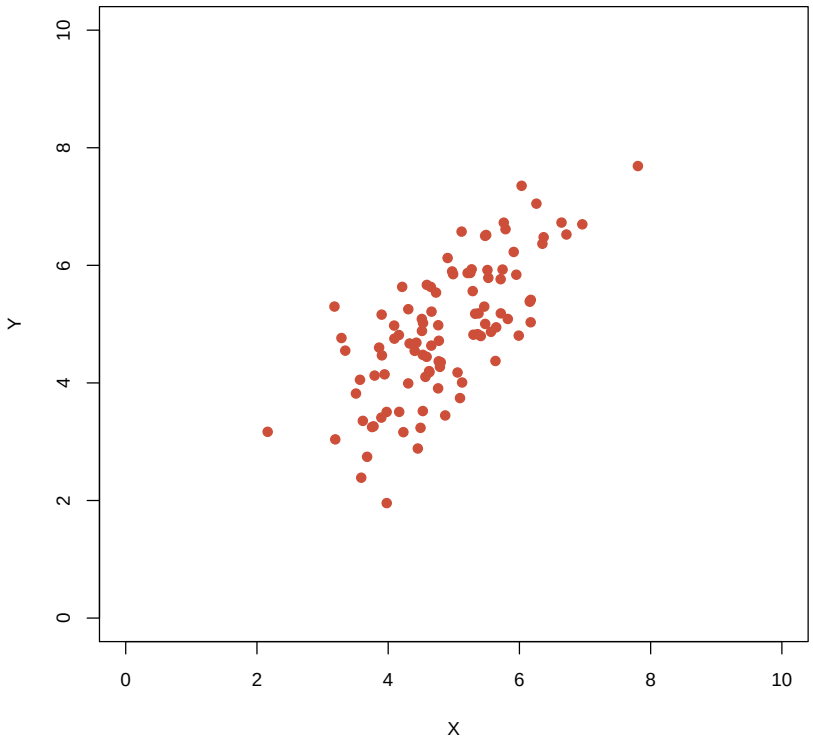
$\text{Cor}(X, Y) = 0.71$



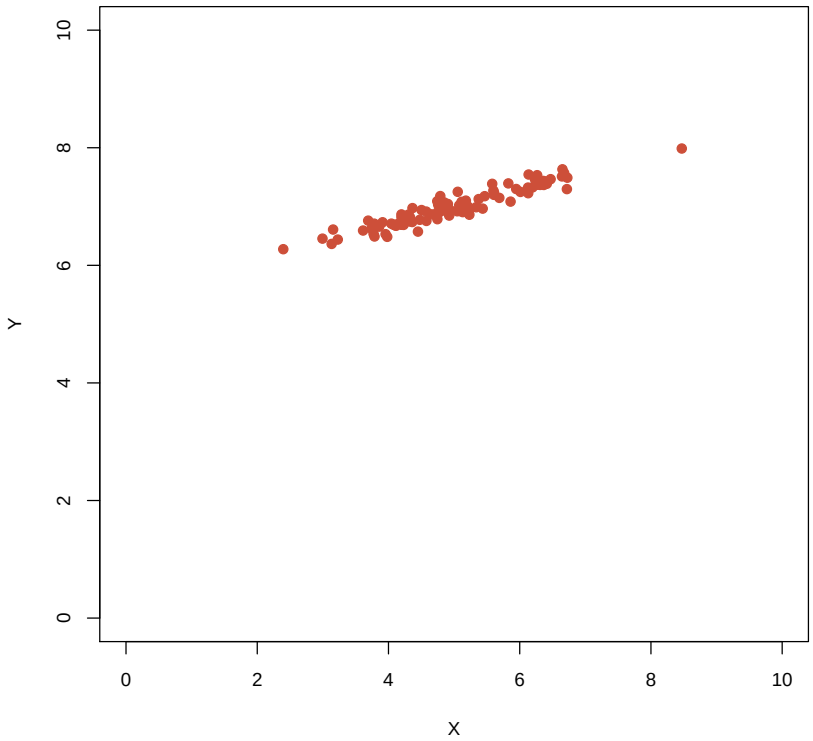
$\sigma_X = 1.14, \sigma_Y = 0.78$

$\text{Cov}(X, Y) = 0.78$

$\text{Cor}(X, Y) = 0.71$



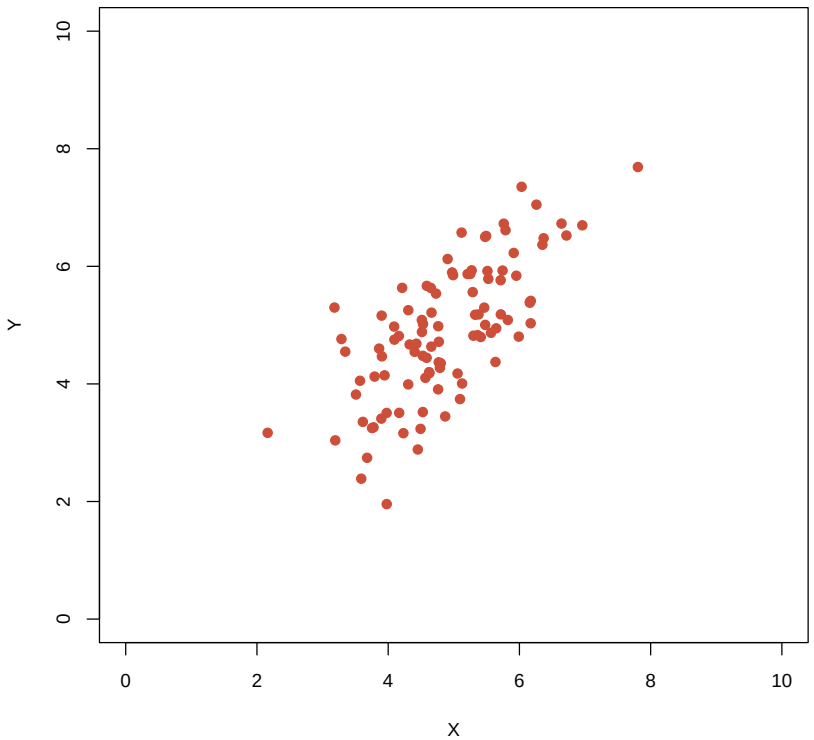
$\sigma_X = 1.03, \sigma_Y = 0.32$



$\sigma_X = 1.14, \sigma_Y = 0.78$

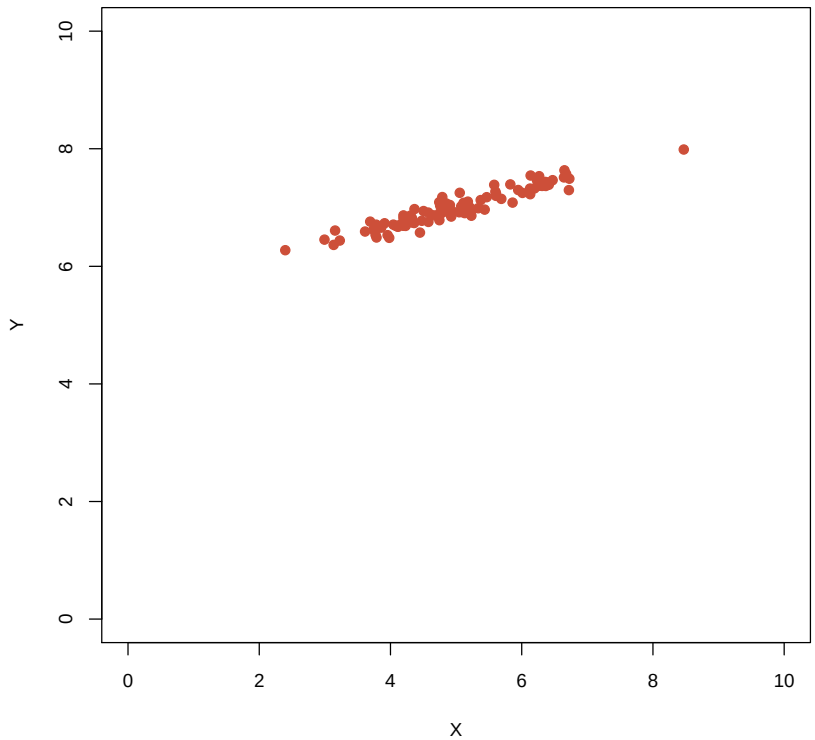
$\text{Cov}(X, Y) = 0.78$

$\text{Cor}(X, Y) = 0.71$



$\sigma_X = 1.03, \sigma_Y = 0.32$

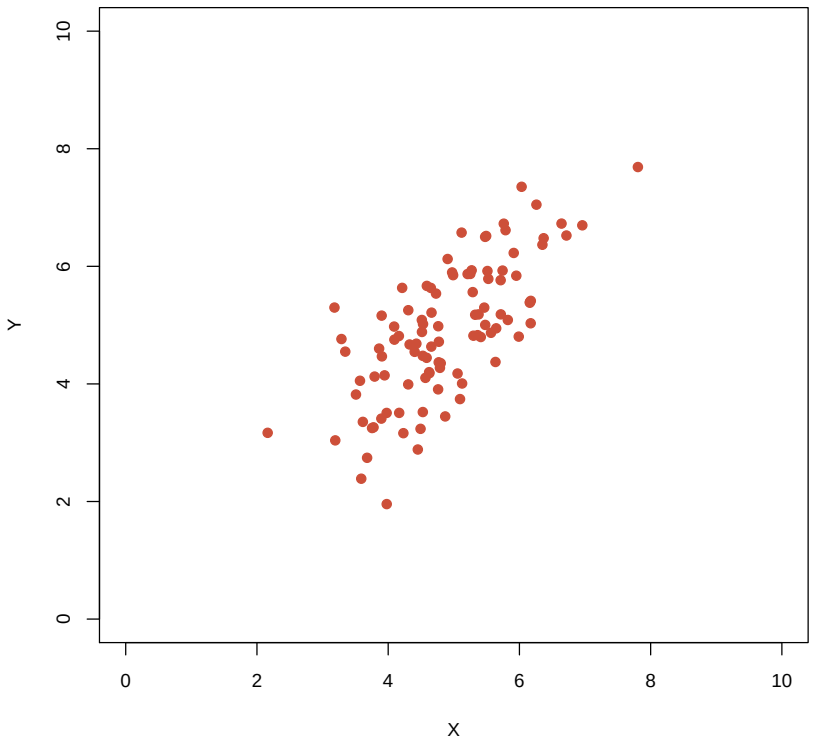
$\text{Cov}(X, Y) = 0.32$



$\sigma_X = 1.14, \sigma_Y = 0.78$

$\text{Cov}(X, Y) = 0.78$

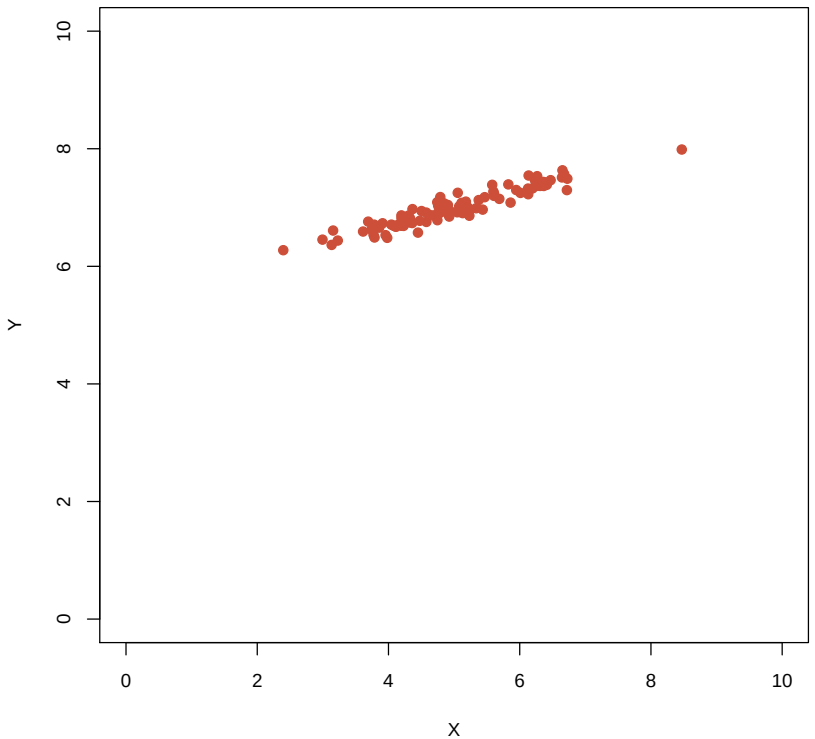
$\text{Cor}(X, Y) = 0.71$



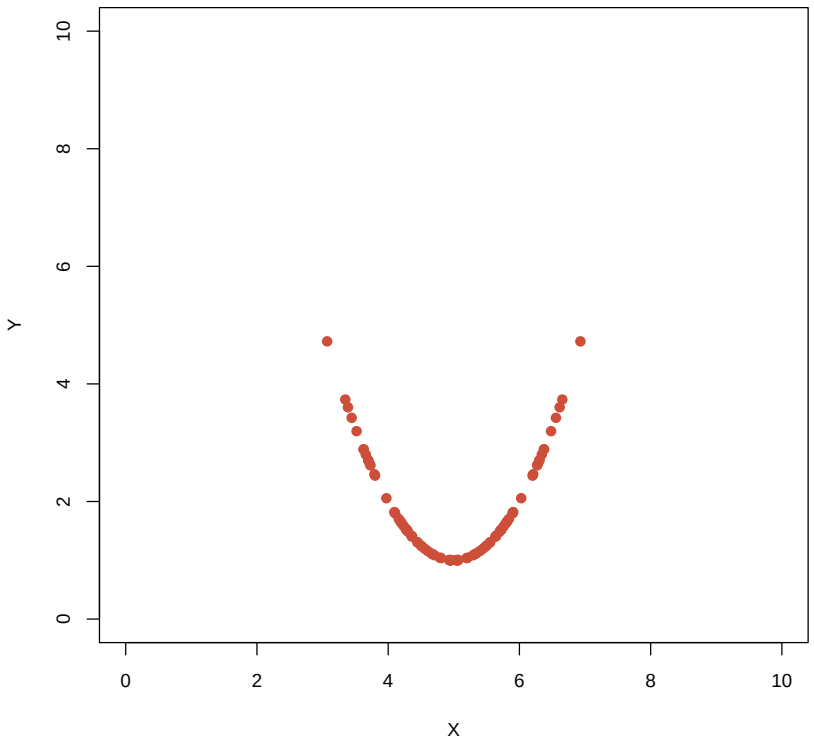
$\sigma_X = 1.03, \sigma_Y = 0.32$

$\text{Cov}(X, Y) = 0.32$

$\text{Cor}(X, Y) = 0.95$

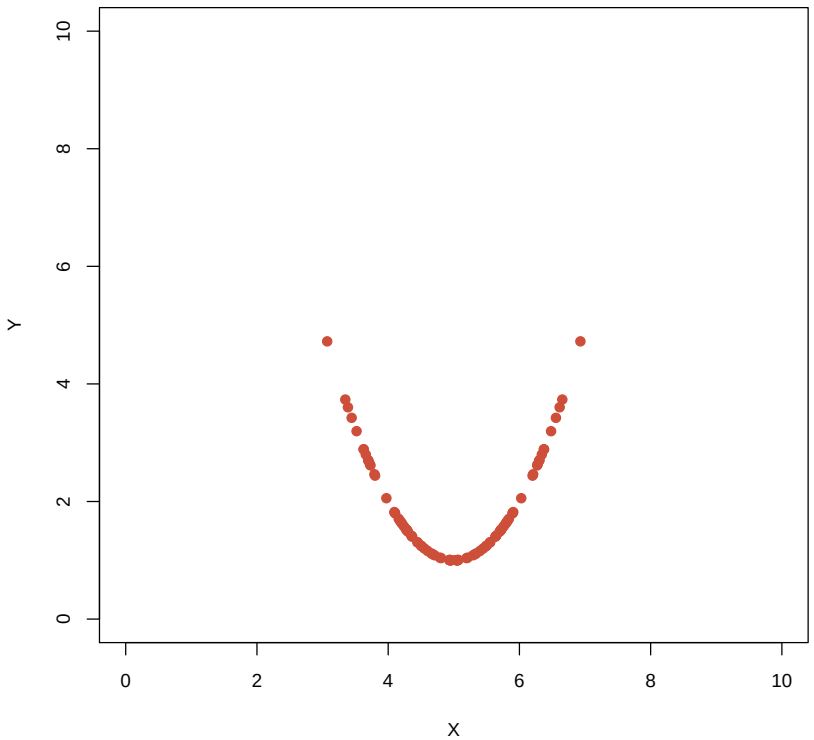


$\sigma_X = 0.91, \sigma_Y = 0.88$



$\sigma_X = 0.91, \sigma_Y = 0.88$

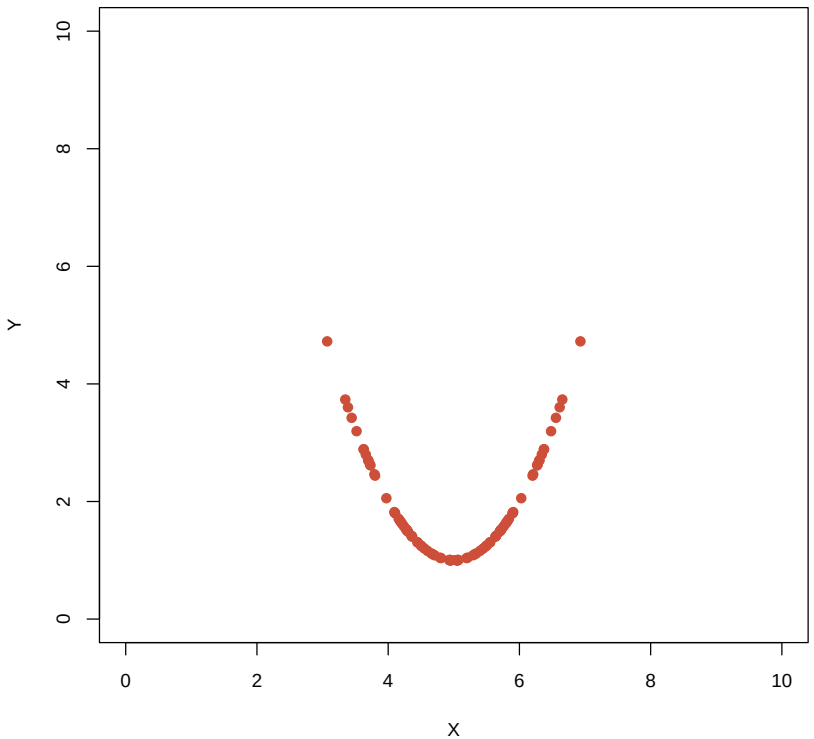
$\text{Cov}(X, Y) = 0$



$\sigma_X = 0.91, \sigma_Y = 0.88$

$\text{Cov}(X, Y) = 0$

$\text{Cor}(X, Y) = 0$



Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$

Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$

Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- $\mathrm{Var}(a \cdot X) =$

Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- $\mathrm{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}X$

Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- $\mathrm{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}X$
- $\mathrm{Var}(X + Y) =$

Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- $\mathrm{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}X$
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$

Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- $\mathrm{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}X$
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- $\mathrm{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}X$
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X, X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- $\mathrm{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}X$
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
- Sind (X, Y) stochastisch unabhängig, so folgt:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y$$

Rechenregeln für Kovarianzen

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - EX) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$$

- Sind X und Y unabhängig, so folgt $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ (die Umkehrung gilt nicht!)

Rechenregeln für Kovarianzen

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - EX) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$$

- Sind X und Y unabhängig, so folgt $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (die Umkehrung gilt nicht!)
- $\text{Cov}(X, Y)$=$\text{Cov}(Y, X)$

Rechenregeln für Kovarianzen

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - EX) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$$

- Sind X und Y unabhängig, so folgt $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (die Umkehrung gilt nicht!)
- $\text{Cov}(X, Y)$=$\text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Rechenregeln für Kovarianzen

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - EX) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$$

- Sind X und Y unabhängig, so folgt $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (die Umkehrung gilt nicht!)
- $\text{Cov}(X, Y)$=$\text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$
- $\text{Cov}(a \cdot X, Y) = a \cdot \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, a \cdot Y)$

Rechenregeln für Kovarianzen

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - EX) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$$

- Sind X und Y unabhängig, so folgt $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ (die Umkehrung gilt nicht!)
- $\mathrm{Cov}(X, Y)$=$\mathrm{Cov}(Y, X)$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$
- $\mathrm{Cov}(a \cdot X, Y) = a \cdot \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, a \cdot Y)$
- $\mathrm{Cov}(X + Z, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Z, Y)$

Rechenregeln für Kovarianzen

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - EX) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$$

- Sind X und Y unabhängig, so folgt $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (die Umkehrung gilt nicht!)
- $\text{Cov}(X, Y)$=$\text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$
- $\text{Cov}(a \cdot X, Y) = a \cdot \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, a \cdot Y)$
- $\text{Cov}(X + Z, Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Z, Y)$
- $\text{Cov}(X, Z + Y) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(X, Y)$

Rechenregeln für Kovarianzen

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - EX) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$$

- Sind X und Y unabhängig, so folgt $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (die Umkehrung gilt nicht!)
- $\text{Cov}(X, Y)$=$\text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$
- $\text{Cov}(a \cdot X, Y) = a \cdot \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, a \cdot Y)$
- $\text{Cov}(X + Z, Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Z, Y)$
- $\text{Cov}(X, Z + Y) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(X, Y)$

Die letzten drei Regeln beschreiben die Bilinearität der Kovarianz.

Rechenregeln für die Korrelation

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

- $-1 \leq \mathrm{Cor}(X, Y) \leq 1$
- $\mathrm{Cor}(X, Y) = \mathrm{Cor}(Y, X)$
- $\mathrm{Cor}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X/\sigma_X, Y/\sigma_Y)$
- $\mathrm{Cor}(X, Y) = 1$ genau dann wenn Y eine wachsende, affin-lineare Funktion von X ist, d.h. falls es $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $Y = a \cdot X + b$
- $\mathrm{Cor}(X, Y) = -1$ genau dann wenn Y eine fallende, affin-lineare Funktion von X ist, d.h. falls es $a < 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $Y = a \cdot X + b$

Mit diesen Rechenregeln können wir nun beweisen:

Satz

Sind $X_1, X_2, \ldots X_n$ unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Zufallsgrößen mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, so gilt für $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$:

$$\mathbb{E}\overline{X} = \mu$$

und

$$Var\,\overline{X} = \frac{1}{n}\sigma^2,$$

d.h.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Beweis: Linearität des Erwartungswertes impliziert

$$\mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu.$$

Beweis: Linearität des Erwartungswertes impliziert

$$\mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu.$$

Die Unabhängigkeit der X_i vereinfacht die Varianz zu

$$\mathrm{Var}\,\overline{X} = \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$$

Bernoulli-Verteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable Y mit Erfolgsws $p \in [0, 1]$ hat Erwartungswert

$$\mathbb{E}Y = p$$

und Varianz

$$\text{Var } Y = p \cdot (1 - p)$$

Bernoulli-Verteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable Y mit Erfolgsws $p \in [0, 1]$ hat Erwartungswert

$$\mathbb{E}Y = p$$

und Varianz

$$\text{Var } Y = p \cdot (1 - p)$$

Beweis: Aus $\mathbb{P}(Y = 1) = p$ und $\mathbb{P}(Y = 0) = (1 - p)$ folgt

$$\mathbb{E}Y = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Bernoulli-Verteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable Y mit Erfolgsws $p \in [0,1]$ hat Erwartungswert

$$\mathbb{E}Y = p$$

und Varianz

$$\text{Var } Y = p \cdot (1-p)$$

Beweis: Aus $\mathbb{P}(Y=1) = p$ und $\mathbb{P}(Y=0) = (1-p)$ folgt

$$\mathbb{E}Y = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

Varianz:

$$\begin{aligned}\text{Var } Y &= \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \left(\mathbb{E}Y\right)^2 \\ &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = p \cdot (1-p)\end{aligned}$$

Binomialverteilung

Seien nun $Y_1, \cdots, Y_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Erfolgsws p. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i =: X \sim \text{bin}(n, p)$$

und es folgt:

$$\text{Var } X =$$

Binomialverteilung

Seien nun $Y_1, \cdots, Y_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Erfolgsws p. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i =: X \sim \text{bin}(n, p)$$

und es folgt:

$$\text{Var } X = \text{Var } \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \right) =$$

Binomialverteilung

Seien nun $Y_1, \cdots, Y_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Erfolgsws p. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i =: X \sim \text{bin}(n, p)$$

und es folgt:

$$\text{Var } X = \text{Var } \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var } Y_i =$$

Binomialverteilung

Seien nun $Y_1, \cdots, Y_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Erfolgsws p. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i =: X \sim \text{bin}(n, p)$$

und es folgt:

$$\text{Var } X = \text{Var } \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var } Y_i = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Binomialverteilung

Satz (Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung)

Ist X binomialverteilt mit Parametern (n, p), so gilt:

$$\mathbb{E}X = n \cdot p$$

und

$$Var\, X = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Inhalt

In einem Genom werde die Aminosäure Prolin 101844 mal durch CCT und 106159 mal durch CCA codiert.

In einem Genom werde die Aminosäure Prolin 101844 mal durch CCT und 106159 mal durch CCA codiert.

Ist es nur vom reinen Zufall abhängig, welches Codon verwendet wird?

In einem Genom werde die Aminosäure Prolin 101844 mal durch CCT und 106159 mal durch CCA codiert.

Ist es nur vom reinen Zufall abhängig, welches Codon verwendet wird?

Dann wäre die Anzahl X der CCT binomialverteilt mit $p = \frac{1}{2}$ und $n = 101844 + 106159 = 208003$.

In einem Genom werde die Aminosäure Prolin 101844 mal durch CCT und 106159 mal durch CCA codiert.

Ist es nur vom reinen Zufall abhängig, welches Codon verwendet wird?

Dann wäre die Anzahl X der CCT binomialverteilt mit $p = \frac{1}{2}$ und $n = 101844 + 106159 = 208003$.

$$\mathbb{E}X = n \cdot p = 104001.5$$

In einem Genom werde die Aminosäure Prolin 101844 mal durch CCT und 106159 mal durch CCA codiert.

Ist es nur vom reinen Zufall abhängig, welches Codon verwendet wird?

Dann wäre die Anzahl X der CCT binomialverteilt mit $p = \frac{1}{2}$ und $n = 101844 + 106159 = 208003$.

$$\mathbb{E}X = n \cdot p = 104001.5$$

$$\sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 228$$

In einem Genom werde die Aminosäure Prolin 101844 mal durch CCT und 106159 mal durch CCA codiert.

Ist es nur vom reinen Zufall abhängig, welches Codon verwendet wird?

Dann wäre die Anzahl X der CCT binomialverteilt mit $p = \frac{1}{2}$ und $n = 101844 + 106159 = 208003$.

$$\mathbb{E}X = n \cdot p = 104001.5$$

$$\sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 228$$

$$104001.5 - 101844 = 2157.5 \approx 9.5 \cdot \sigma_X$$

In einem Genom werde die Aminosäure Prolin 101844 mal durch CCT und 106159 mal durch CCA codiert.

Ist es nur vom reinen Zufall abhängig, welches Codon verwendet wird?

Dann wäre die Anzahl X der CCT binomialverteilt mit $p = \frac{1}{2}$ und $n = 101844 + 106159 = 208003$.

$$\mathbb{E}X = n \cdot p = 104001.5$$

$$\sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 228$$

$$104001.5 - 101844 = 2157.5 \approx 9.5 \cdot \sigma_X$$

Sieht das nach Zufall aus?

Die Frage ist:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
einer Abweichung vom Erwartungswert
von mindestens $\approx 9.5 \cdot \sigma_X$, wenn alles Zufall ist?

Die Frage ist:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
einer Abweichung vom Erwartungswert
von mindestens $\approx 9.5 \cdot \sigma_X$, wenn alles Zufall ist?

Wir müssen also

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}X| \geq 9.5\sigma_X\big)$$

berechnen.

Die Frage ist:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
einer Abweichung vom Erwartungswert
von mindestens $\approx 9.5 \cdot \sigma_X$, wenn alles Zufall ist?

Wir müssen also

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}X| \geq 9.5\sigma_X\big)$$

berechnen.

Das Problem bei der Binomialverteilung ist: $\binom{n}{k}$ exakt zu berechnen, ist für große n sehr aufwändig. Deshalb:

Die Frage ist:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
einer Abweichung vom Erwartungswert
von mindestens $\approx 9.5 \cdot \sigma_X$, wenn alles Zufall ist?

Wir müssen also

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}X| \geq 9.5\sigma_X\big)$$

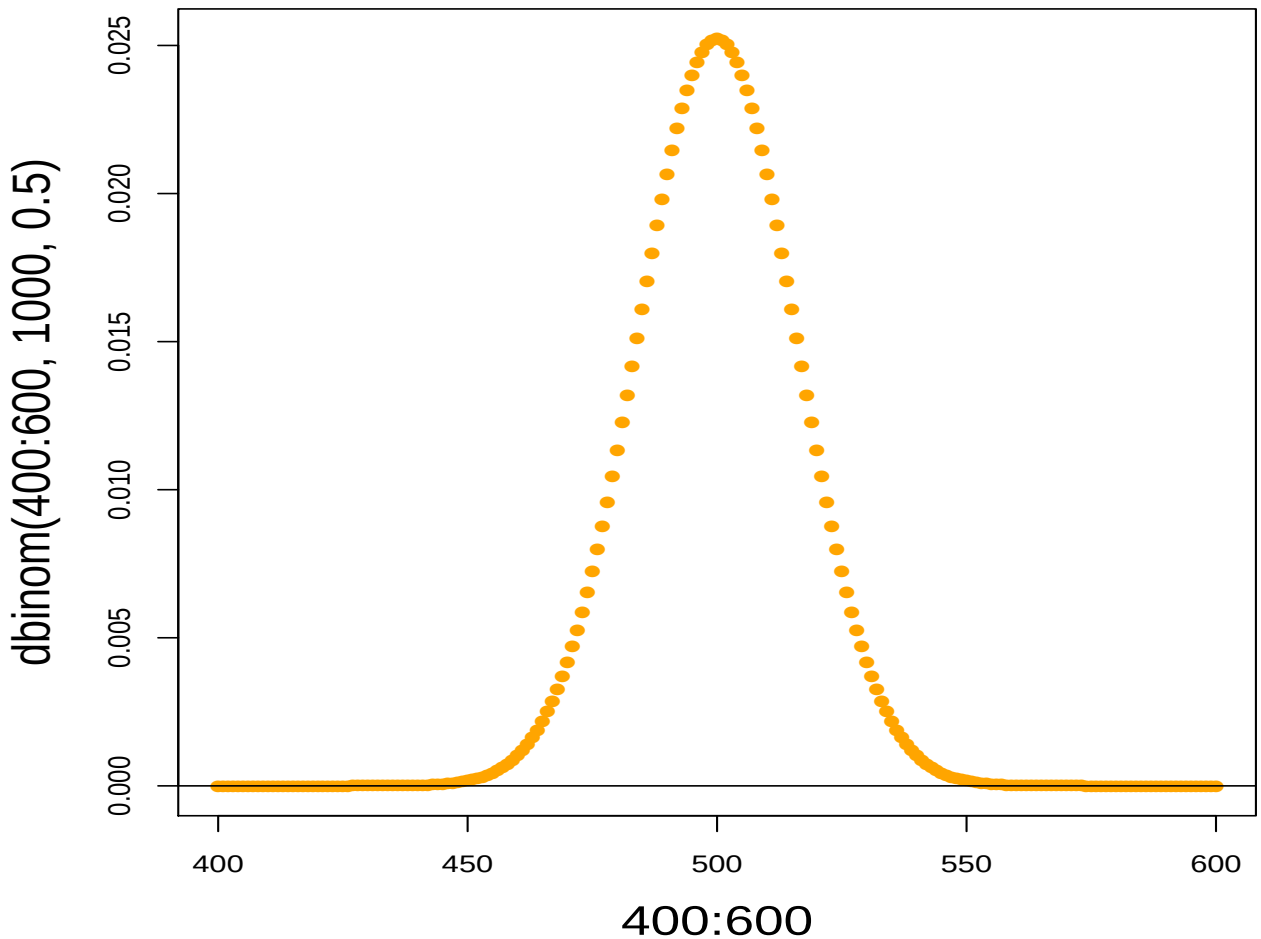
berechnen.

Das Problem bei der Binomialverteilung ist: $\binom{n}{k}$ exakt zu berechnen, ist für große n sehr aufwändig. Deshalb:

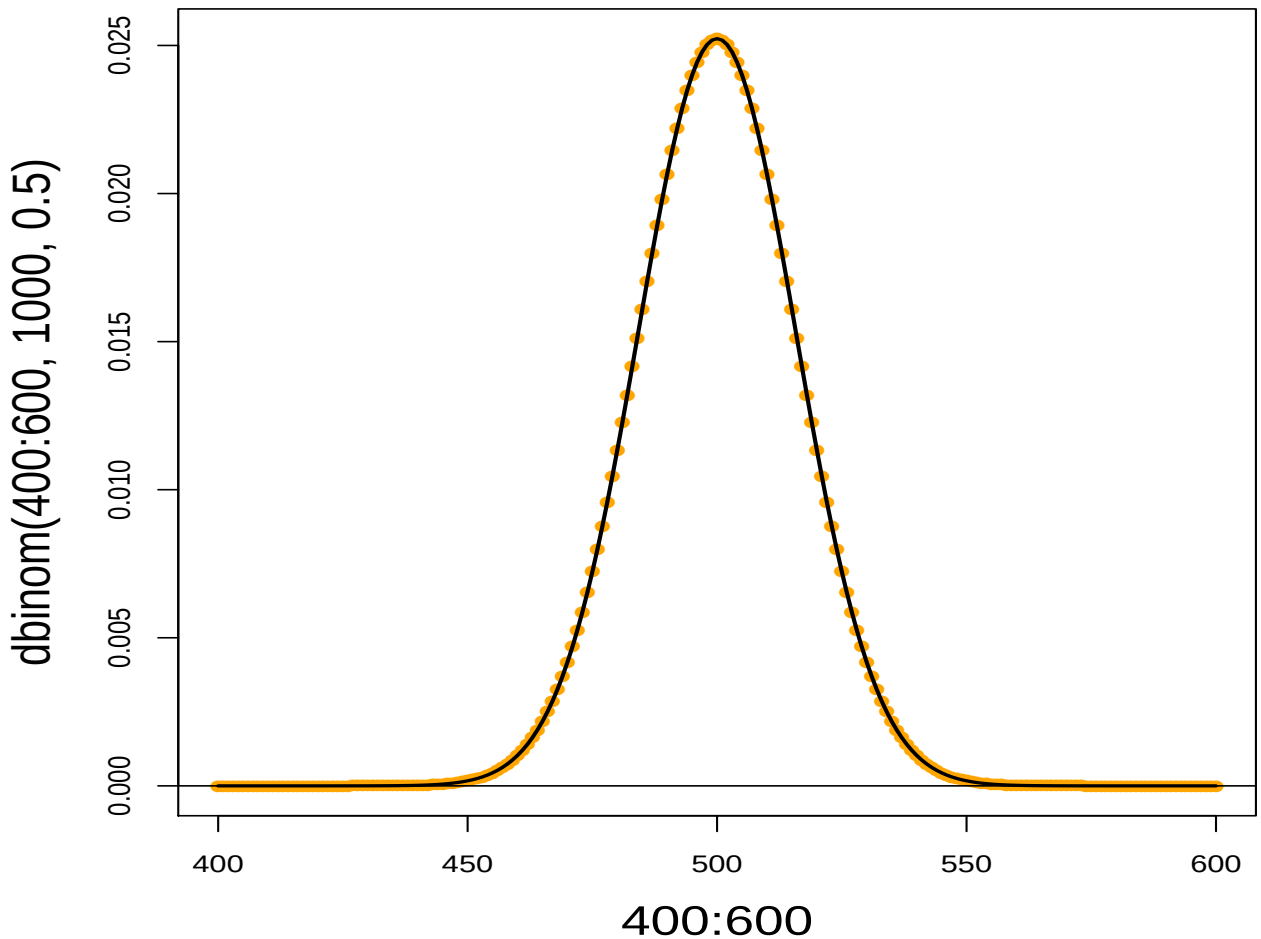
Die Binomialverteilung wird oft
durch andere Verteilungen approximiert.

Inhalt

Die Binomialverteilung mit großer Versuchzahl n sieht (nahezu) aus wie die Normalverteilung:



Die Binomialverteilung mit großer Versuchzahl n sieht (nahezu) aus wie die Normalverteilung:

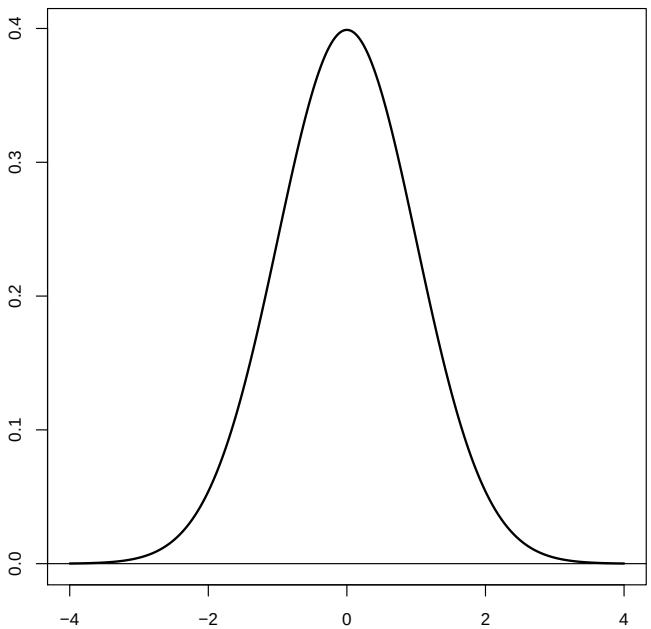


Dichte der Standardnormalverteilung

Eine Zufallsvariable Z mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

“Gauß-Glocke”



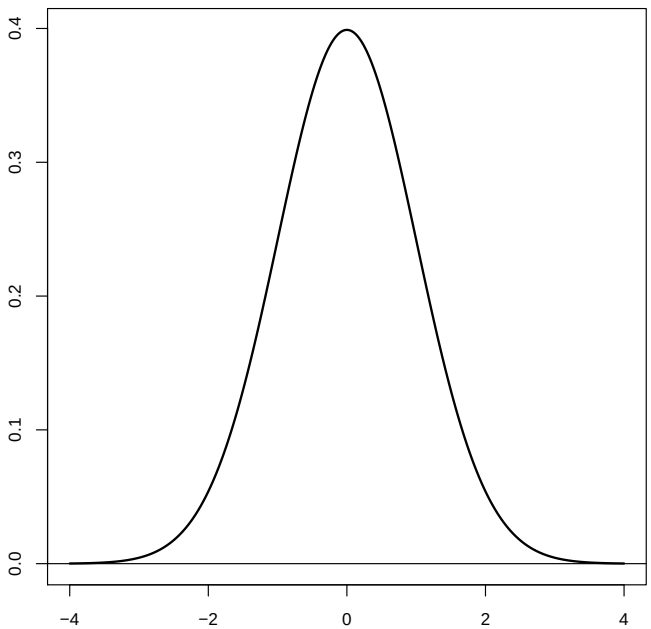
heißt *standardnormalverteilt*.

Dichte der Standardnormalverteilung

Eine Zufallsvariable Z mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

“Gauß-Glocke”



kurz:
$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

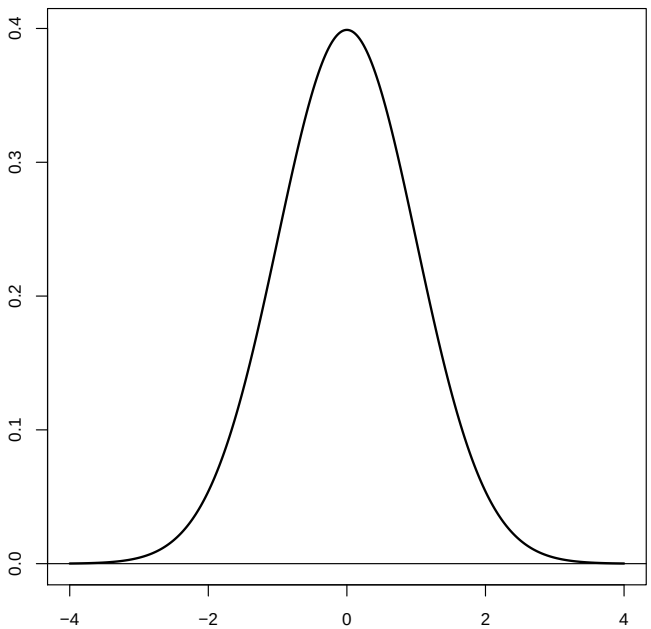
heißt *standardnormalverteilt*.

Dichte der Standardnormalverteilung

Eine Zufallsvariable Z mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

“Gauß-Glocke”



kurz:
$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\mathbb{E}Z = 0$$

$$\text{Var } Z = 1$$

heißt *standardnormalverteilt*.

Ist Z $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt, so ist $X = \sigma \cdot Z + \mu$ normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Ist Z $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt, so ist $X = \sigma \cdot Z + \mu$ normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

X hat dann die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Merkregeln

Ist $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so gilt:

- $\mathbb{P}(|Z - \mu| > \sigma) \approx 33\%$

Merkregeln

Ist $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so gilt:

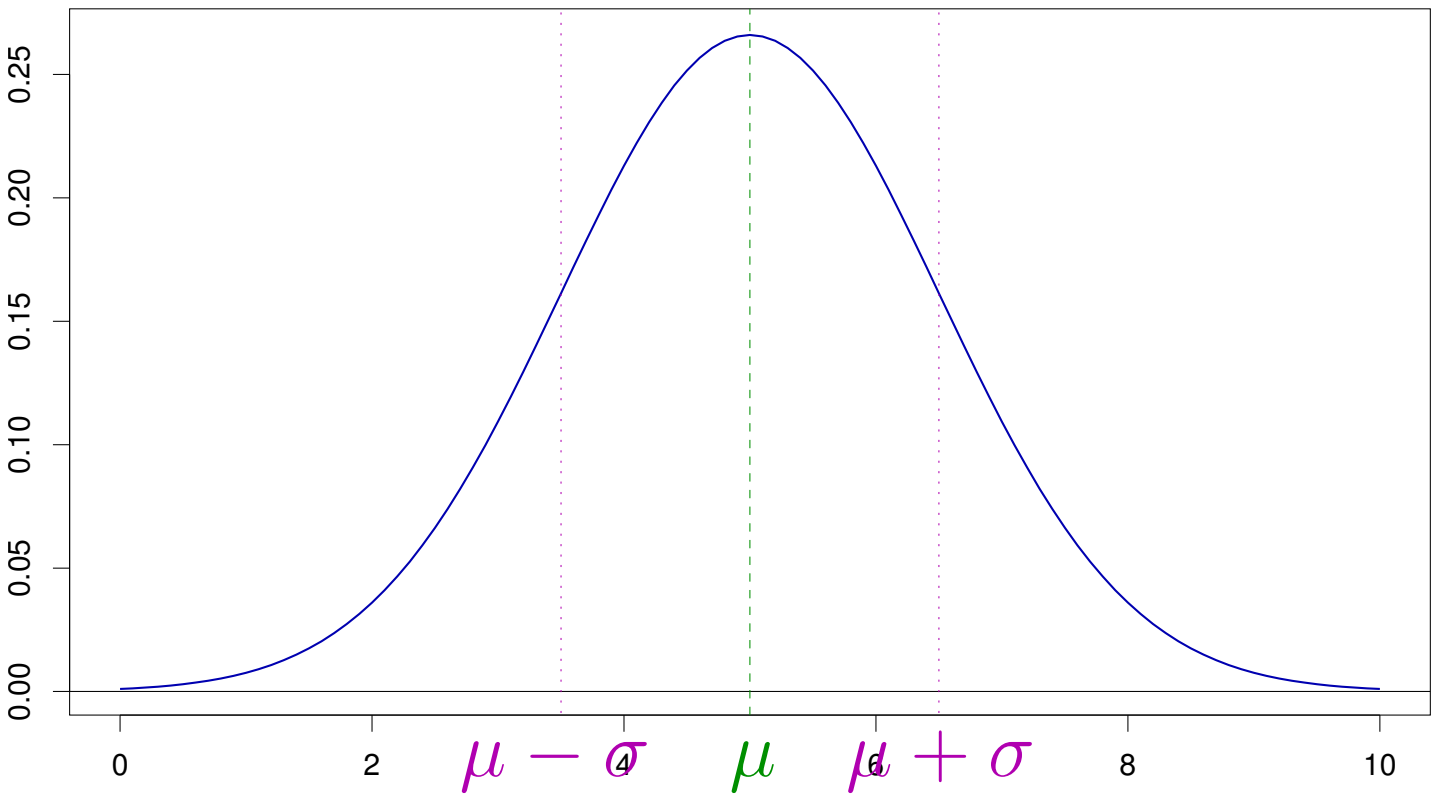
- $\mathbb{P}(|Z - \mu| > \sigma) \approx 33\%$
- $\mathbb{P}(|Z - \mu| > 1.96 \cdot \sigma) \approx 5\%$

Merkregeln

Ist $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so gilt:

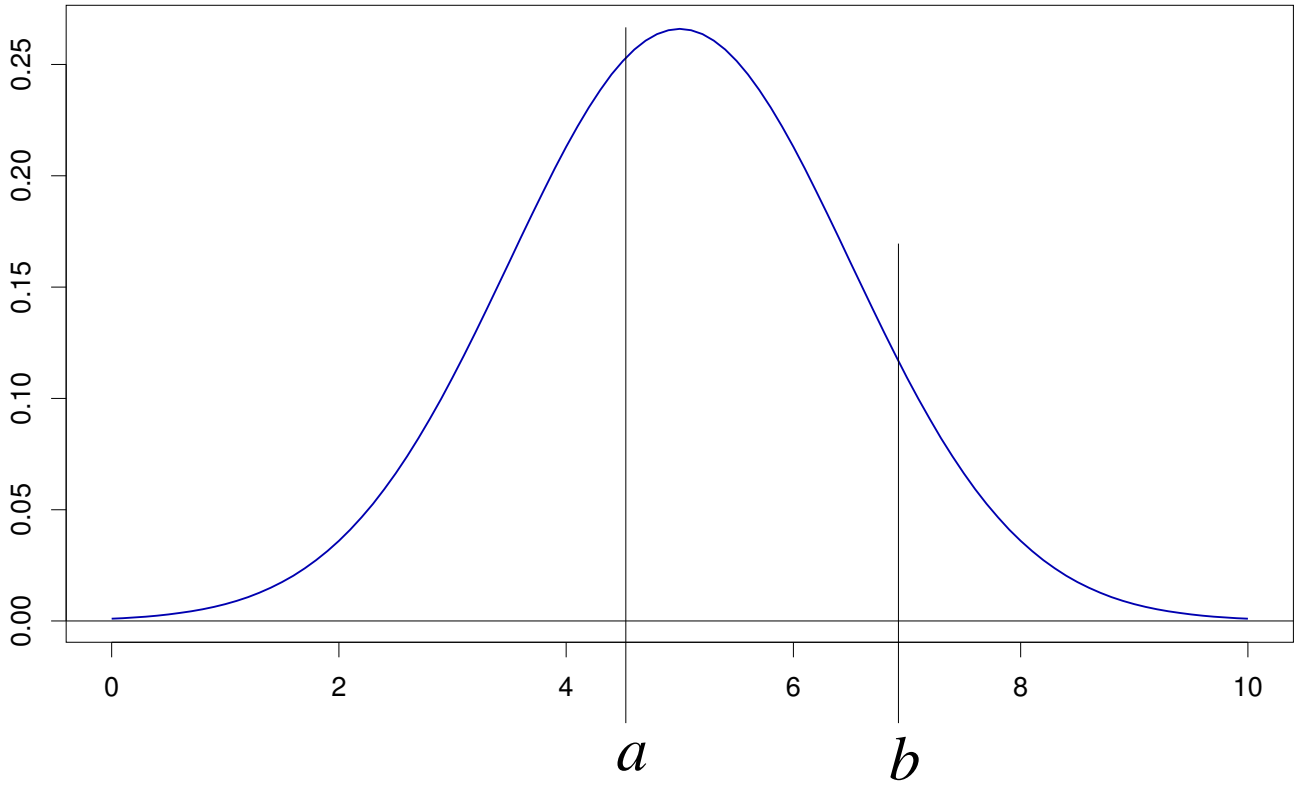
- $\mathbb{P}(|Z - \mu| > \sigma) \approx 33\%$
- $\mathbb{P}(|Z - \mu| > 1.96 \cdot \sigma) \approx 5\%$
- $\mathbb{P}(|Z - \mu| > 3 \cdot \sigma) \approx 0.3\%$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Dichten brauchen Integrale

Sei Z eine Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$.

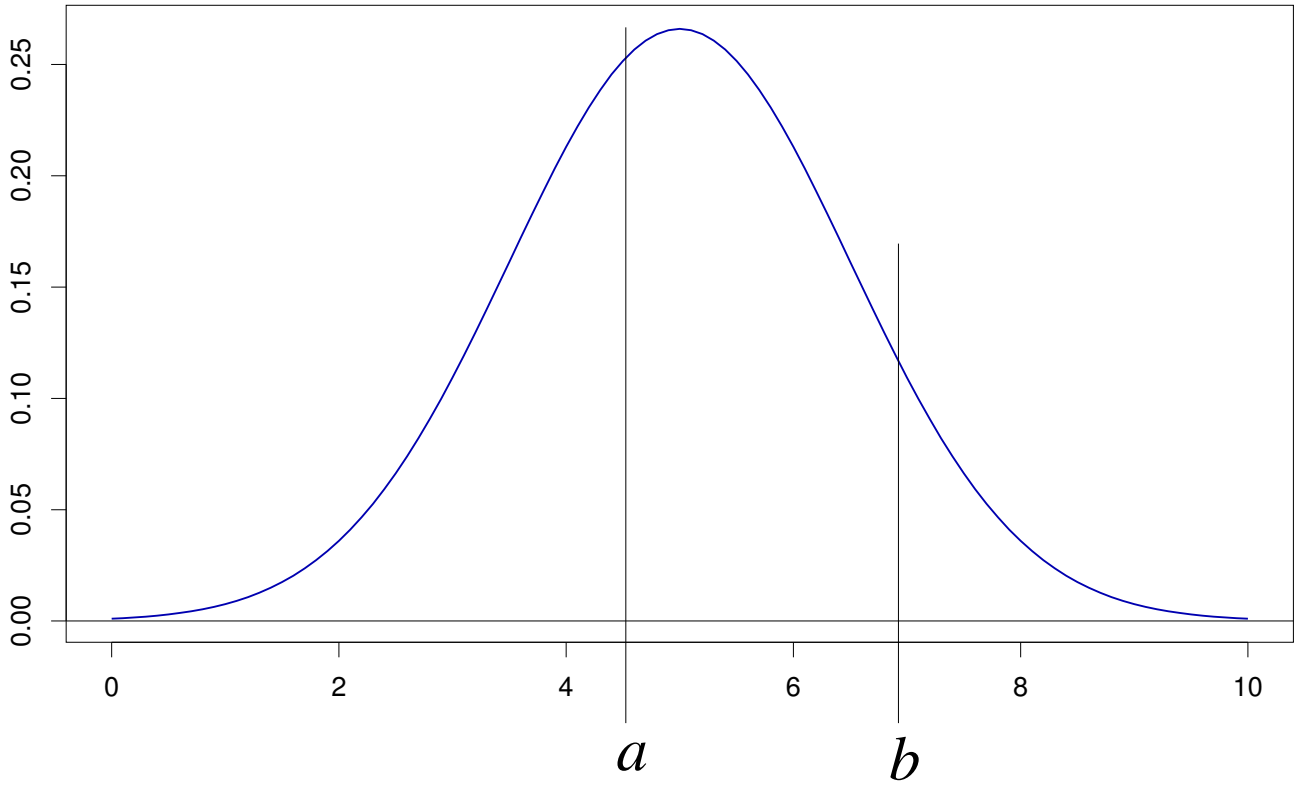


Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z \in [a, b]) =$$

Dichten brauchen Integrale

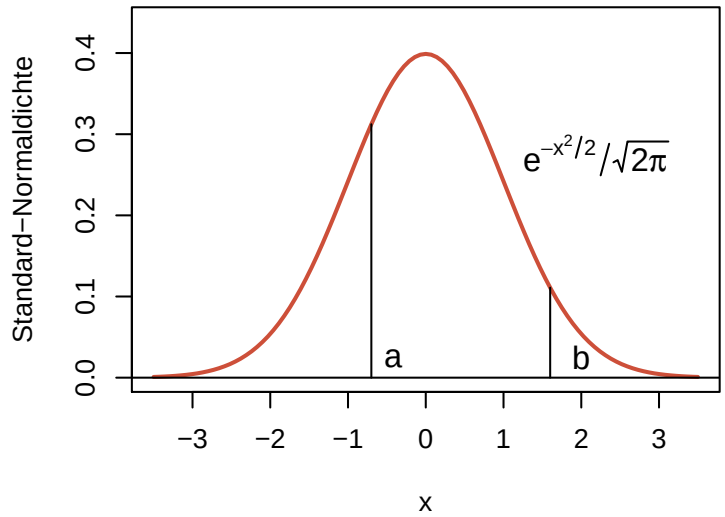
Sei Z eine Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$.



Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z \in [a, b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Die Standardnormal-Dichte und das Gauß'sche Fehlerintegral Φ:
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



Sei Z standard-normalverteilt:

$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$, also für $a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(Z \leq a) = \Phi(a)$, und für $a < b$

$\mathbb{P}(Z \in [a, b]) = \mathbb{P}(Z \leq b) - \mathbb{P}(Z \leq a)$

Die Funktion Φ läßt sich nicht durch elementare Integration ausdrücken, sie wird numerisch bestimmt; man entnimmt in der Praxis den Wert einem Computerprogramm oder einer Tabelle.

Die Normalverteilung in R

Die Normalverteilung hat in R das Kürzel `'norm'`.

Die Normalverteilung in R

Die Normalverteilung hat in R das Kürzel `'norm'`.

Es gibt 4 R-Befehle:

`dnorm()`: Dichte der Normalverteilung (**d**ensity)

Die Normalverteilung in R

Die Normalverteilung hat in R das Kürzel `'norm'`.

Es gibt 4 R-Befehle:

`dnorm()`: Dichte der Normalverteilung (**d**ensity)
`rnorm()`: Ziehen einer Stichprobe (**r**andom sample)

Die Normalverteilung in R

Die Normalverteilung hat in R das Kürzel `'norm'`.

Es gibt 4 R-Befehle:

- `dnorm()`: Dichte der Normalverteilung (**d**ensity)
- `rnorm()`: Ziehen einer Stichprobe (**r**andom sample)
- `pnorm()`: Verteilungsfunktion der Normalverteilung (**p**robability)

Die Normalverteilung in R

Die Normalverteilung hat in R das Kürzel `'norm'`.

Es gibt 4 R-Befehle:

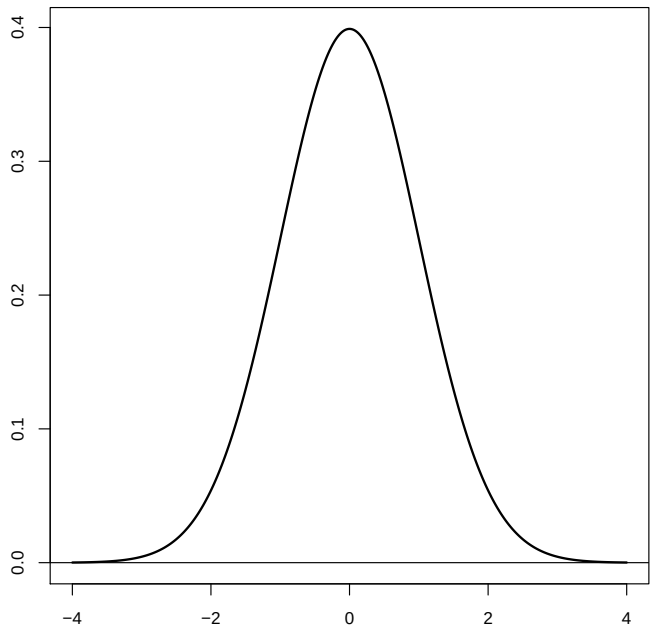
- `dnorm()`: Dichte der Normalverteilung (**d**ensity)
- `rnorm()`: Ziehen einer Stichprobe (**r**andom sample)
- `pnorm()`: Verteilungsfunktion der Normalverteilung (**p**robability)
- `qnorm()`: Quantilfunktion der Normalverteilung (**q**uantile)

Beispiel: Dichte der Standardnormalverteilung:

```
> dnorm(0)
[1] 0.3989423
```

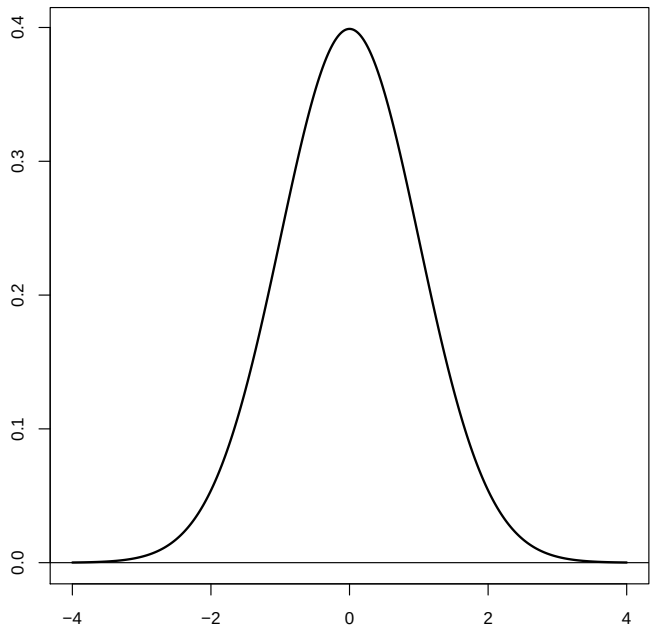
Beispiel: Dichte der Standardnormalverteilung:

```
> dnorm(0)
[1] 0.3989423
> plot(dnorm,from=-4,to=4)
```



Beispiel: Dichte der Standardnormalverteilung:

```
> dnorm(0)
[1] 0.3989423
> plot(dnorm,from=-4,to=4)
```




```
> dnorm(0,mean=1,sd=2)
```

Beispiel: Ziehen einer Stichprobe

Beispiel: Ziehen einer Stichprobe

Ziehen einer Stichprobe der Länge 6 aus einer Standardnormalverteilung:

```
> rnorm(6)
[1] -1.24777899 0.03288728 0.19222813 0.81642692
-0.62607324 -1.09273888
```

Beispiel: Ziehen einer Stichprobe

Ziehen einer Stichprobe der Länge 6 aus einer Standardnormalverteilung:

```
> rnorm(6)
[1] -1.24777899 0.03288728 0.19222813 0.81642692
-0.62607324 -1.09273888
```

Ziehen einer Stichprobe der Länge 7 aus einer Normalverteilung mit Mittelwert 5 und Standardabweichung 3:

```
> rnorm(7,mean=5,sd=3)
[1] 2.7618897 6.3224503 10.8453280 -0.9829688 5.6143127
0.6431437 8.123570
```

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$, also standardnormalverteilt.

$\mathbb{P}(Z < a)$ berechnet man in `R` mit `pnorm(a)`

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$, also standardnormalverteilt.

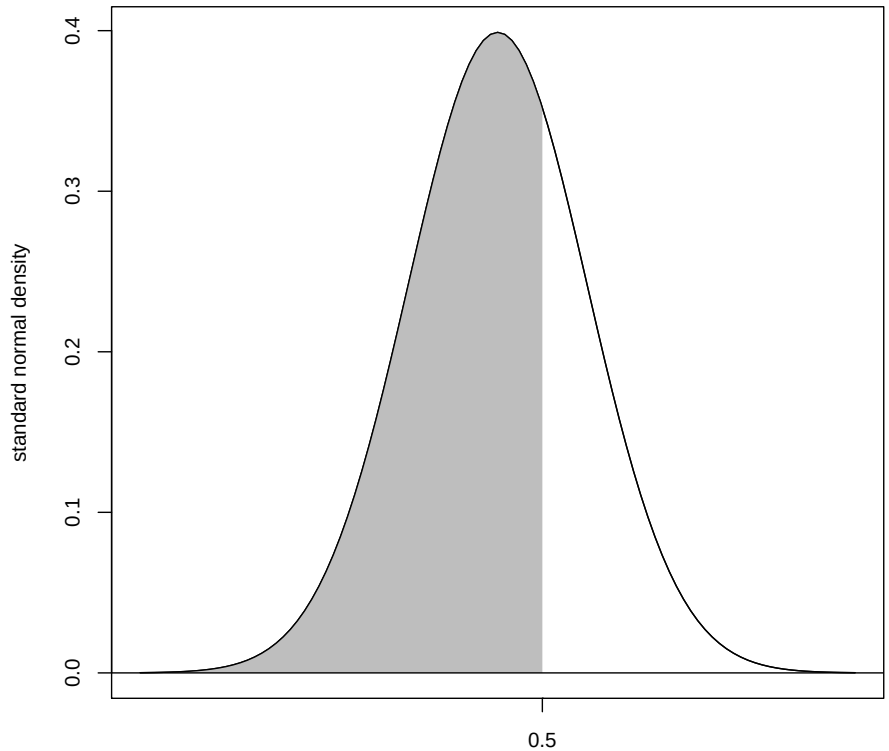
$\mathbb{P}(Z < a)$ berechnet man in `R` mit `pnorm(a)`

```
> pnorm(0.5) [1] 0.6914625
```

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$, also standardnormalverteilt.

$\mathbb{P}(Z < a)$ berechnet man in `R` mit `pnorm(a)`

```
> pnorm(0.5) [1] 0.6914625
```



Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 5, \sigma^2 = 2.25)$.

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 5, \sigma^2 = 2.25)$.

Berechnung von $\mathbb{P}(Z \in [3, 4])$:

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 5, \sigma^2 = 2.25)$.

Berechnung von $\mathbb{P}(Z \in [3, 4])$:

$$\mathbb{P}(Z \in [3, 4]) = \mathbb{P}(Z < 4) - \mathbb{P}(Z < 3)$$

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 5, \sigma^2 = 2.25)$.

Berechnung von $\mathbb{P}(Z \in [3, 4])$:

$$\mathbb{P}(Z \in [3, 4]) = \mathbb{P}(Z < 4) - \mathbb{P}(Z < 3)$$

```
> pnorm(4,mean=5,sd=1.5)-pnorm(3,mean=5,sd=1.5)
```

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 5, \sigma^2 = 2.25)$.

Berechnung von $\mathbb{P}(Z \in [3, 4])$:

$$\mathbb{P}(Z \in [3, 4]) = \mathbb{P}(Z < 4) - \mathbb{P}(Z < 3)$$

```
> pnorm(4,mean=5,sd=1.5)-pnorm(3,mean=5,sd=1.5)
[1] 0.1612813
```

Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Frage: Wie berechnet man $\mathbb{P}(Z = 5)$?

Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Frage: Wie berechnet man $\mathbb{P}(Z = 5)$?

Antwort: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}(Z = x) = 0$

Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Frage: Wie berechnet man $\mathbb{P}(Z = 5)$?

Antwort: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}(Z = x) = 0$

Was wird dann aus $\mathbb{E}Z = \sum_{a \in S} a \cdot \mathbb{P}(Z = a)$?

Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Frage: Wie berechnet man $\mathbb{P}(Z = 5)$?

Antwort: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}(Z = x) = 0$

Was wird dann aus $\mathbb{E}Z = \sum_{a \in S} a \cdot \mathbb{P}(Z = a)$?

Muss reformiert werden:

$$\mathbb{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x$$

Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Frage: Wie berechnet man $\mathbb{P}(Z = 5)$?

Antwort: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}(Z = x) = 0$

Was wird dann aus $\mathbb{E}Z = \sum_{a \in S} a \cdot \mathbb{P}(Z = a)$?

Muss reformiert werden:

$$\mathbb{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x$$

Aber zum Glück kennen wir schon das Ergebnis $\mathbb{E}Z = \mu$.

Inhalt

Normalapproximation

Für große n und p, die nicht zu nahe bei 0 oder 1 liegen, kann man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit dem entsprechenden Erwartungswert und der entsprechenden Varianz approximieren:

Normalapproximation

Für große n und p, die nicht zu nahe bei 0 oder 1 liegen, kann man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit dem entsprechenden Erwartungswert und der entsprechenden Varianz approximieren:

Ist $X \sim \text{bin}(n, p)$ und $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

so gilt

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) \approx \mathbb{P}(Z \in [a, b])$$

Normalapproximation

Für große n und p, die nicht zu nahe bei 0 oder 1 liegen, kann man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit dem entsprechenden Erwartungswert und der entsprechenden Varianz approximieren:

Ist $X \sim \text{bin}(n, p)$ und $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
so gilt

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) \approx \mathbb{P}(Z \in [a, b])$$

Normalapproximation

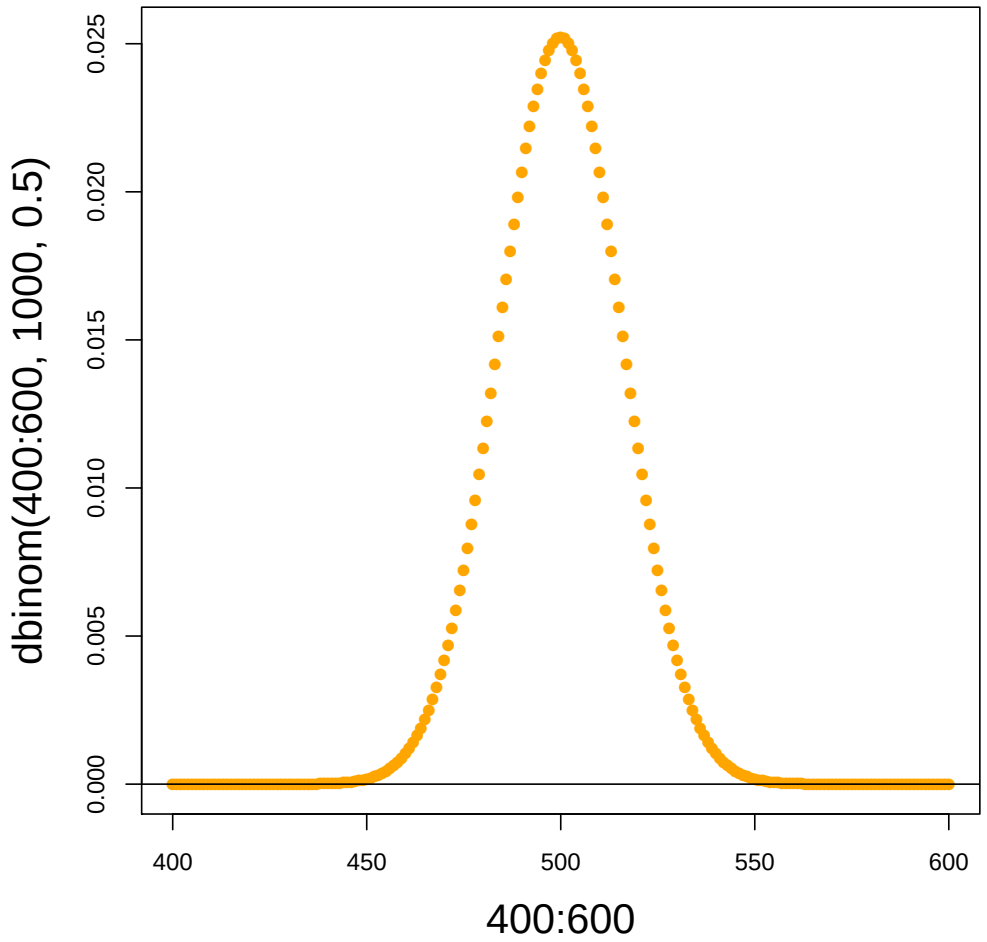
Für große n und p, die nicht zu nahe bei 0 oder 1 liegen, kann man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit dem entsprechenden Erwartungswert und der entsprechenden Varianz approximieren:

Ist $X \sim \text{bin}(n, p)$ und $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
so gilt

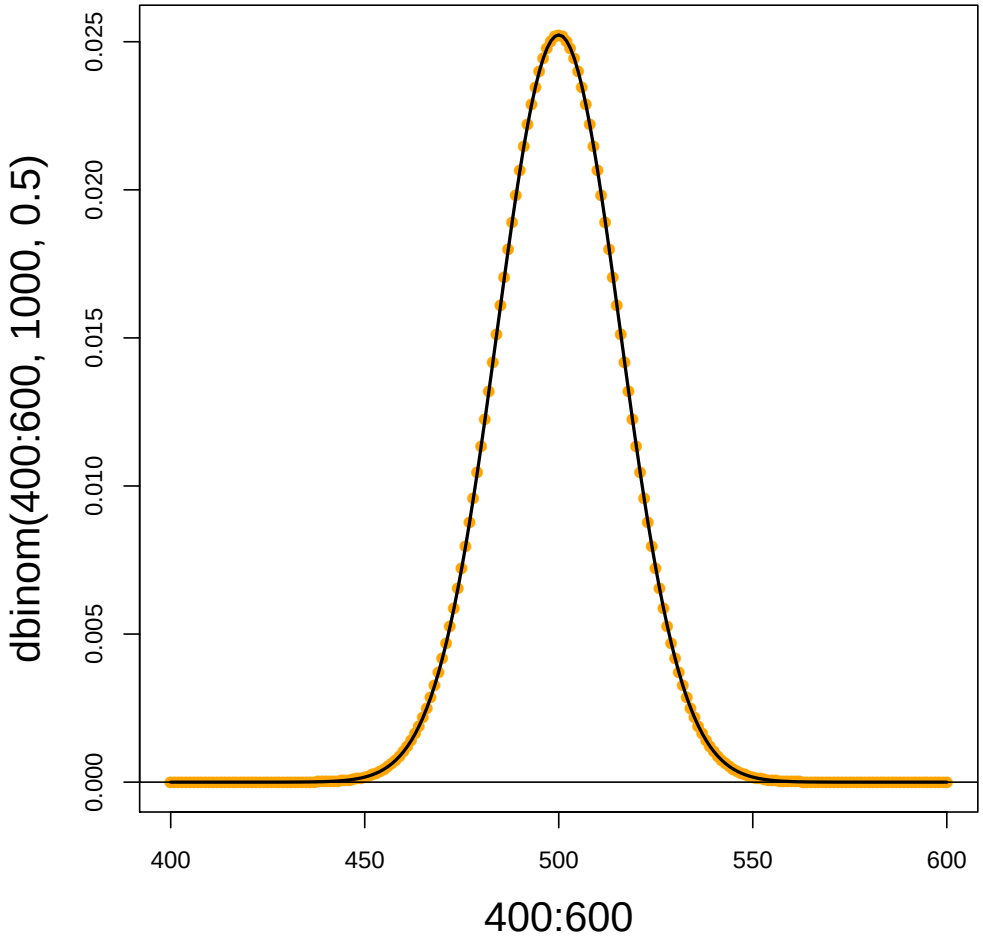
$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) \approx \mathbb{P}(Z \in [a, b])$$

(eine Faustregel: für den Hausgebrauch meist okay, wenn $n \cdot p \cdot (1 - p) \geq 9$)

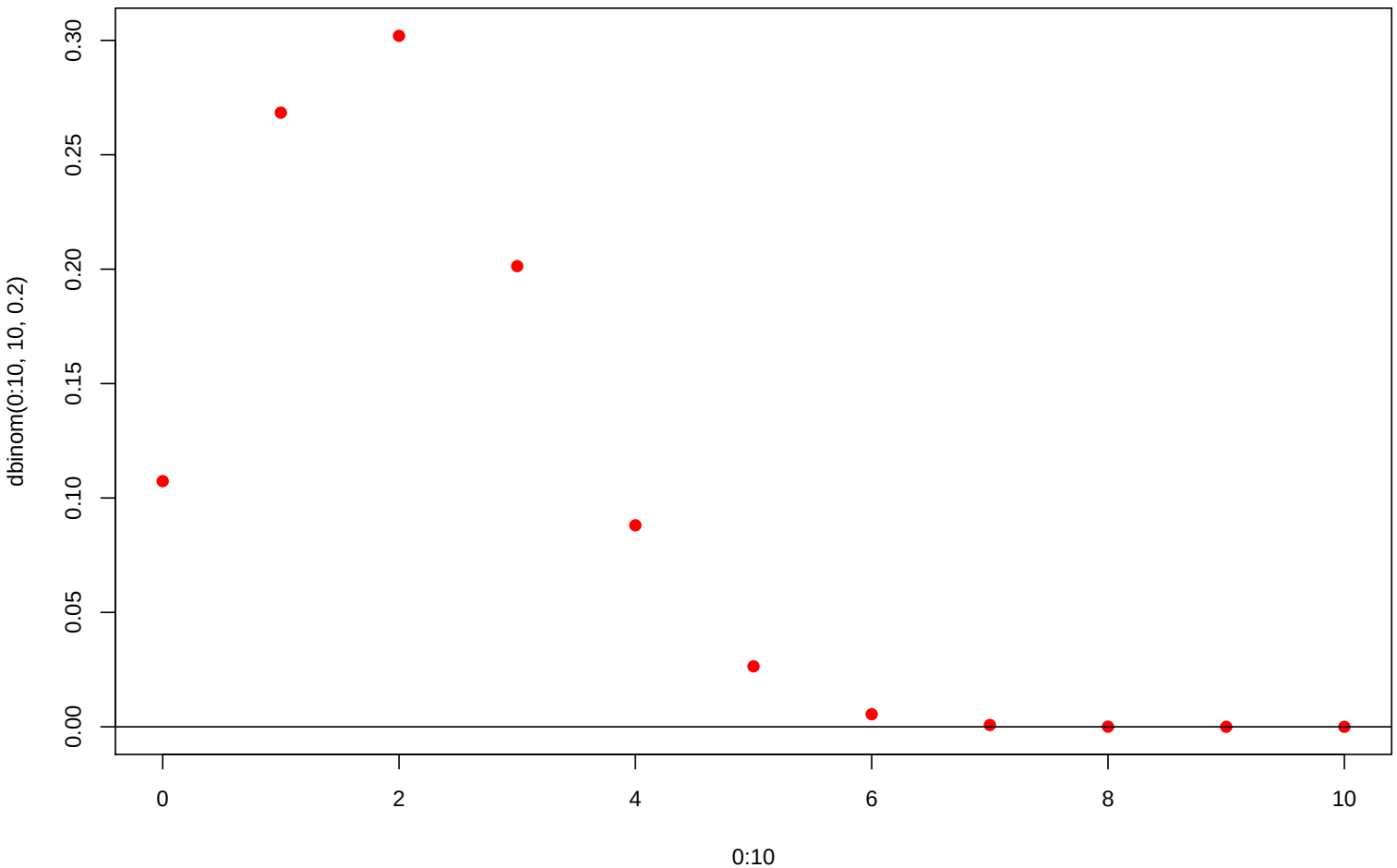
$n = 1000$, $p = 0.5$, $n \cdot p \cdot (1 - p) = 250$



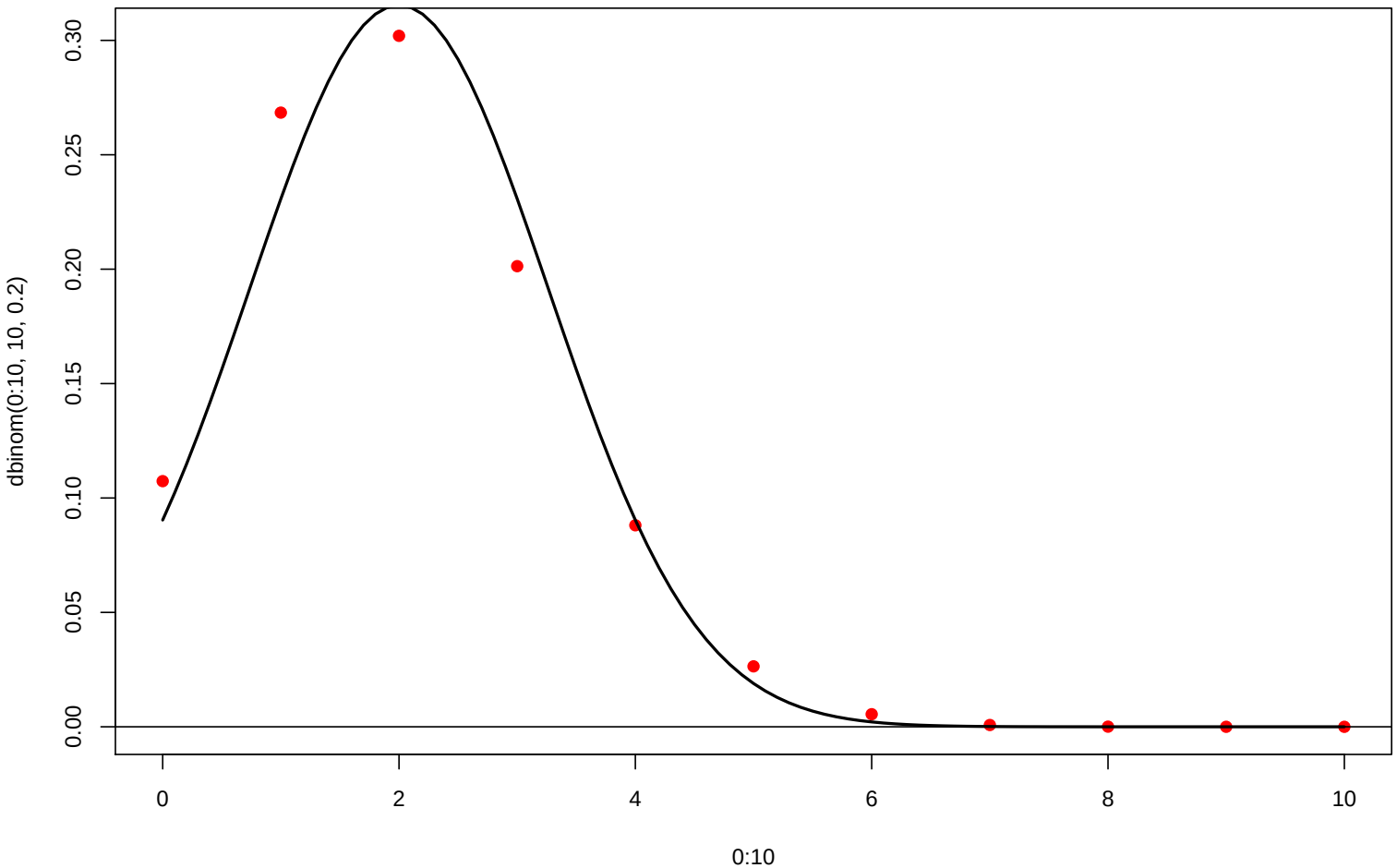
$n = 1000$, $p = 0.5$, $n \cdot p \cdot (1 - p) = 250$



$n = 10, p = 0.2, n \cdot p \cdot (1 - p) = 1.6$



$n = 10, p = 0.2, n \cdot p \cdot (1 - p) = 1.6$



Zentraler Grenzwertsatz

Ein anderer Ausdruck für *Normalapproximation* ist Zentraler Grenzwertsatz.

Zentraler Grenzwertsatz

Ein anderer Ausdruck für *Normalapproximation* ist
Zentraler Grenzwertsatz.

Der zentrale Grenzwertsatz besagt,
dass die Verteilung von Summen
unabhängiger und identisch verteilter
Zufallsvariablen in etwa
die Normalverteilung ist.

Zentraler Grenzwertsatz

Die $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch verteilt mit endlicher Varianz $0 < \sigma^2 = \operatorname{Var} X_i < \infty$. Sei außerdem

$$Z_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

die Summe der ersten n Variablen.

Zentraler Grenzwertsatz

Die $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch verteilt mit endlicher Varianz $0 < \sigma^2 = \operatorname{Var} X_i < \infty$. Sei außerdem

$$Z_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

die Summe der ersten n Variablen. Dann ist die zentrierte und reskalierte Summe im Limes $n \to \infty$ standardnormalverteilt, d.h.

$$Z_n^* := \frac{Z_n - \mathbb{E} Z_n}{\sqrt{\operatorname{Var} Z_n}} \text{ ist ungefähr } \sim \mathcal{N}(0,1)$$

für große n.

Zentraler Grenzwertsatz

Die $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch verteilt mit endlicher Varianz $0 < \sigma^2 = \operatorname{Var} X_i < \infty$. Sei außerdem

$$Z_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

die Summe der ersten n Variablen. Dann ist die zentrierte und reskalierte Summe im Limes $n \to \infty$ standardnormalverteilt, d.h.

$$Z_n^* := \frac{Z_n - \mathbb{E} Z_n}{\sqrt{\operatorname{Var} Z_n}} \text{ ist ungefähr } \sim \mathcal{N}(0,1)$$

für große n. Formal: Es gilt für alle $-\infty \leq a < b \leq \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_n^* \leq b) = \mathbb{P}(a \leq Z \leq b),$$

wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Anders formuliert: Für große n gilt (approximativ)

$$Z_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \text{mit } \mu = \mathbb{E}Z_n, \sigma^2 = \text{Var } Z_n$$

Anders formuliert: Für große n gilt (approximativ)

$$Z_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \text{mit } \mu = \mathbb{E}Z_n, \sigma^2 = \text{Var } Z_n$$

Die Voraussetzungen „unabhängig“ und „identisch verteilt“ lassen sich noch deutlich abschwächen.

Anders formuliert: Für große n gilt (approximativ)

$$Z_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \text{mit } \mu = \mathbb{E}Z_n, \sigma^2 = \text{Var } Z_n$$

Die Voraussetzungen „unabhängig“ und „identisch verteilt“ lassen sich noch deutlich abschwächen.

Für den Hausgebrauch:

Anders formuliert: Für große n gilt (approximativ)

$$Z_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \text{mit } \mu = \mathbb{E}Z_n, \sigma^2 = \text{Var } Z_n$$

Die Voraussetzungen „unabhängig“ und „identisch verteilt“ lassen sich noch deutlich abschwächen.

Für den Hausgebrauch:

Ist Y das Resultat von vielen kleinen Beiträgen, die großteils unabhängig voneinander sind, so ist Y in etwa normalverteilt,

d.h.

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right), \quad \text{mit } \mu = \mathbb{E}Y, \sigma^2 = \text{Var } Y$$

Inhalt

Zurück zu dem Beispiel mit den Prolin-Codons im Genom-Beispiel

Zurück zu dem Beispiel mit den Prolin-Codons im Genom-Beispiel

CCT kommt $k = 101844$ mal vor
CCA kommt $n - k = 106159$ mal vor

Zurück zu dem Beispiel mit den Prolin-Codons im Genom-Beispiel

CCT kommt $k = 101844$ mal vor
CCA kommt $n - k = 106159$ mal vor

Frage: Kann dies Zufall sein?

Zurück zu dem Beispiel mit den Prolin-Codons im Genom-Beispiel

CCT kommt $k = 101844$ mal vor
CCA kommt $n - k = 106159$ mal vor

Frage: Kann dies Zufall sein?
Wir meinen: Nein.

Zurück zu dem Beispiel mit den Prolin-Codons im Genom-Beispiel

CCT kommt $k = 101844$ mal vor
CCA kommt $n - k = 106159$ mal vor

Frage: Kann dies Zufall sein?
Wir meinen: Nein.

Die Skeptiker sagen:
„Nur Zufall.“

Die Hypothese

Reiner Zufall
Kein Unterschied

Die Hypothese

Reiner Zufall
Kein Unterschied

nennt man die
Nullhypothese.

Die Hypothese

Reiner Zufall
Kein Unterschied

nennt man die
Nullhypothese.

Um die Skeptiker zu überzeugen,
müssen wir die
Nullhypothese entkräften

Die Hypothese

Reiner Zufall
Kein Unterschied

nennt man die
Nullhypothese.

Um die Skeptiker zu überzeugen,
müssen wir die
Nullhypothese entkräften
d.h. zeigen, dass unter der Nullhypothese
die Beobachtung sehr unwahrscheinlich ist.

CCT kommt $k = 101844$ mal vor
CCA kommt $n - k = 106159$ mal vor

Unter der Nullhypothese „alles nur Zufall“
ist die Anzahl X der CCT $\text{bin}(n, p)$-verteilt
mit $n = 208003$ und $p = 0.5$.

CCT kommt $k = 101844$ mal vor
CCA kommt $n - k = 106159$ mal vor

Unter der Nullhypothese „alles nur Zufall“
ist die Anzahl X der CCT bin(n, p)-verteilt
mit $n = 208003$ und $p = 0.5$.

Normalapproximation: X ist ungefähr $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit

$$\mu = n \cdot p = 104001.5$$

CCT kommt $k = 101844$ mal vor
CCA kommt $n - k = 106159$ mal vor

Unter der Nullhypothese „alles nur Zufall“
ist die Anzahl X der CCT bin(n, p)-verteilt
mit $n = 208003$ und $p = 0.5$.

Normalapproximation: X ist ungefähr $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit

$$\mu = n \cdot p = 104001.5 \approx 104000$$

und

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 228.0367$$

CCT kommt $k = 101844$ mal vor
CCA kommt $n - k = 106159$ mal vor

Unter der Nullhypothese „alles nur Zufall“
ist die Anzahl X der CCT bin(n, p)-verteilt
mit $n = 208003$ und $p = 0.5$.

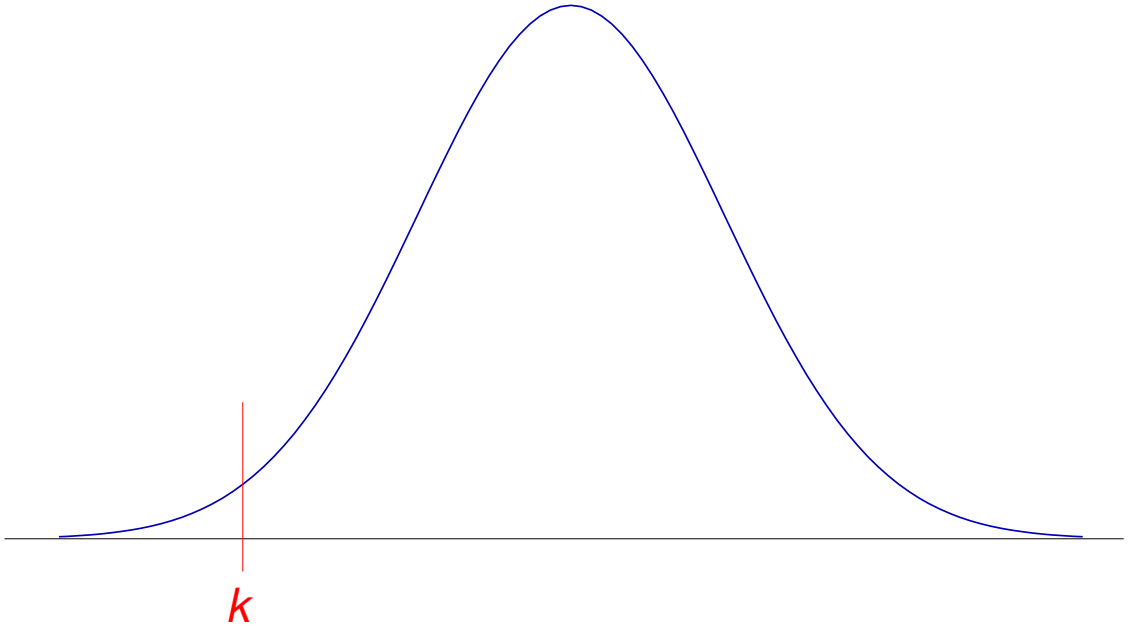
Normalapproximation: X ist ungefähr $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit

$$\mu = n \cdot p = 104001.5 \approx 104000$$

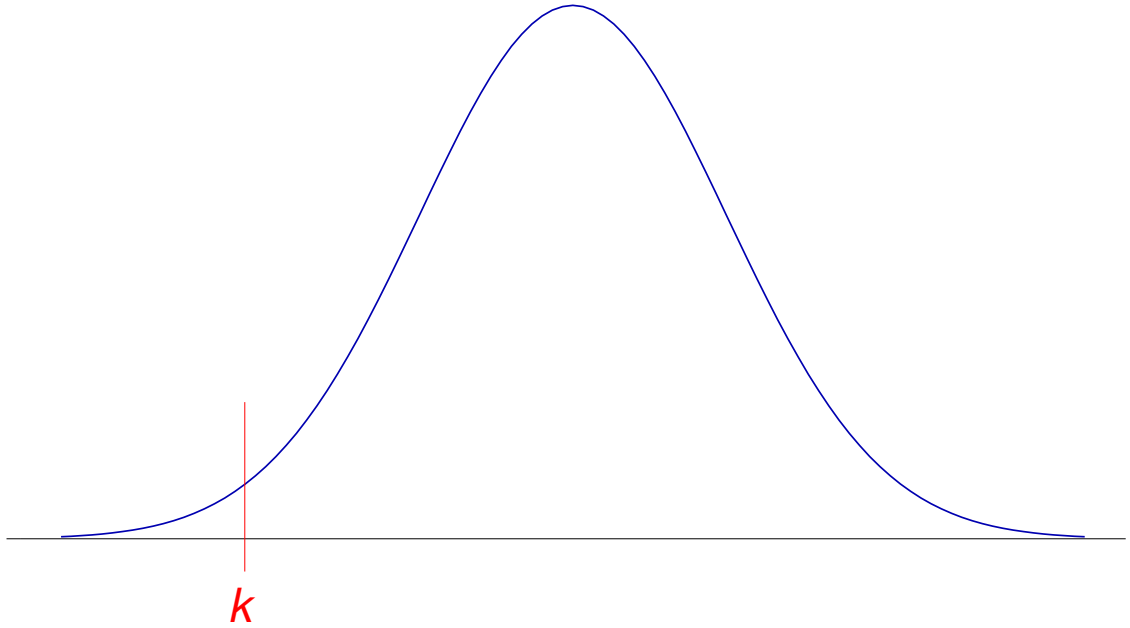
und

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 228.0367 \approx 228$$

Frage: Ist es plausibel, dass eine Größe X, die den Wert $k = 101844$ angenommen hat, ungefähr $\mathcal{N}(104000, 228^2)$-verteilt ist?



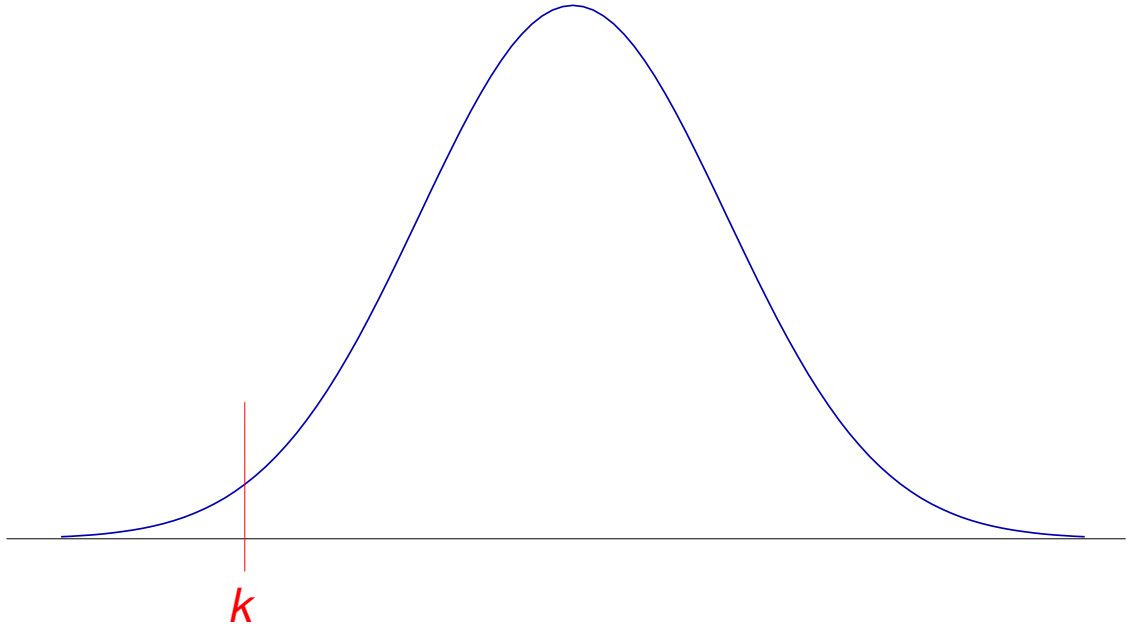
Frage: Ist es plausibel, dass eine Größe X, die den Wert $k = 101844$ angenommen hat, ungefähr $\mathcal{N}(104000, 228^2)$-verteilt ist?



Wenn diese Nullhypothese H_0 gilt, dann folgt

$$\mathbb{P}(X = 101844) =$$

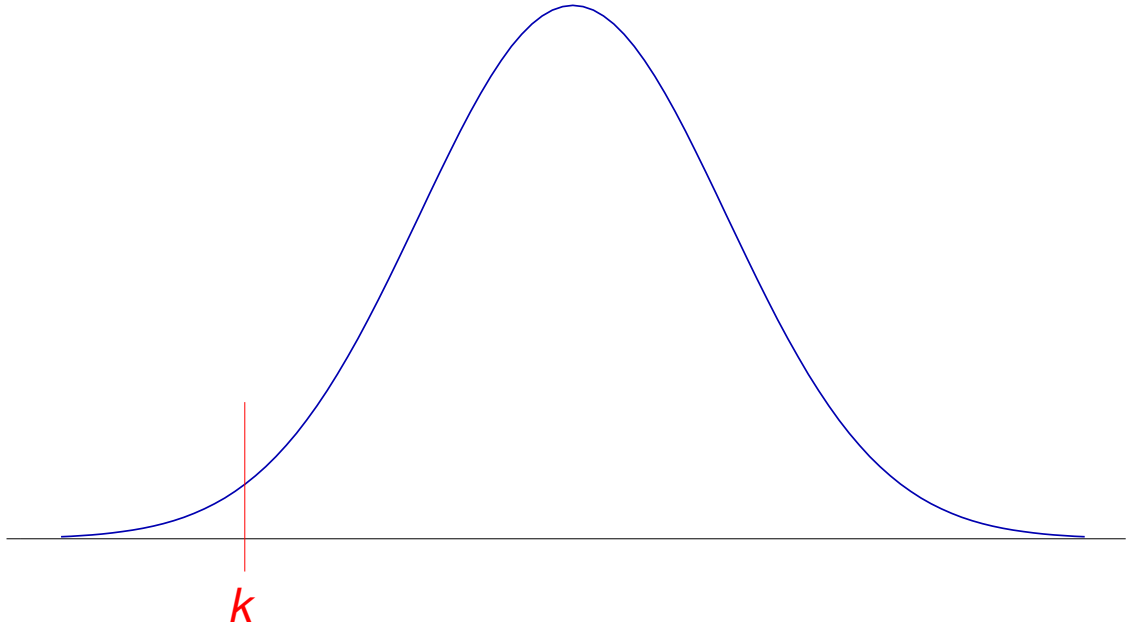
Frage: Ist es plausibel, dass eine Größe X, die den Wert $k = 101844$ angenommen hat, ungefähr $\mathcal{N}(104000, 228^2)$-verteilt ist?



Wenn diese Nullhypothese H_0 gilt, dann folgt

$$\mathbb{P}(X = 101844) = 0$$

Frage: Ist es plausibel, dass eine Größe X, die den Wert $k = 101844$ angenommen hat, ungefähr $\mathcal{N}(104000, 228^2)$-verteilt ist?

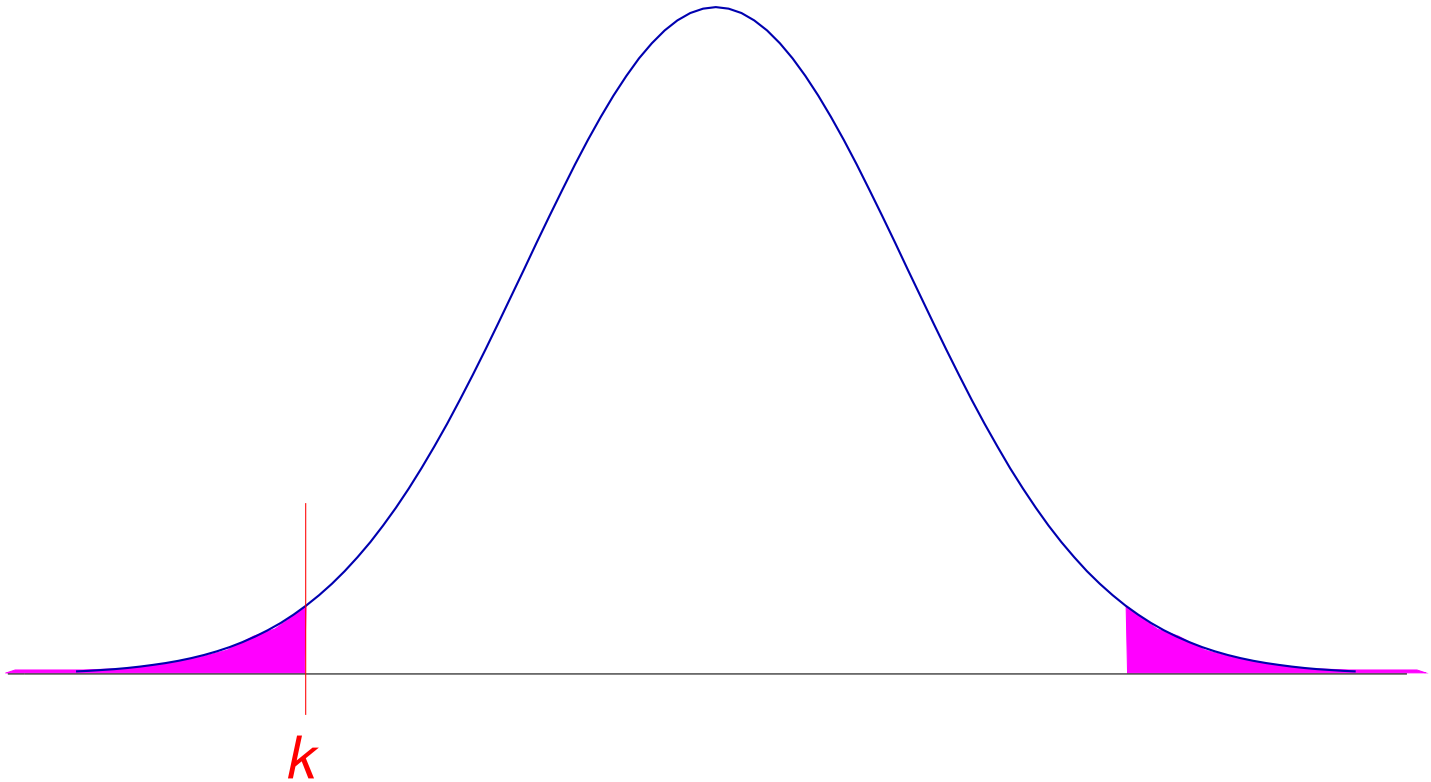


Wenn diese Nullhypothese H_0 gilt, dann folgt

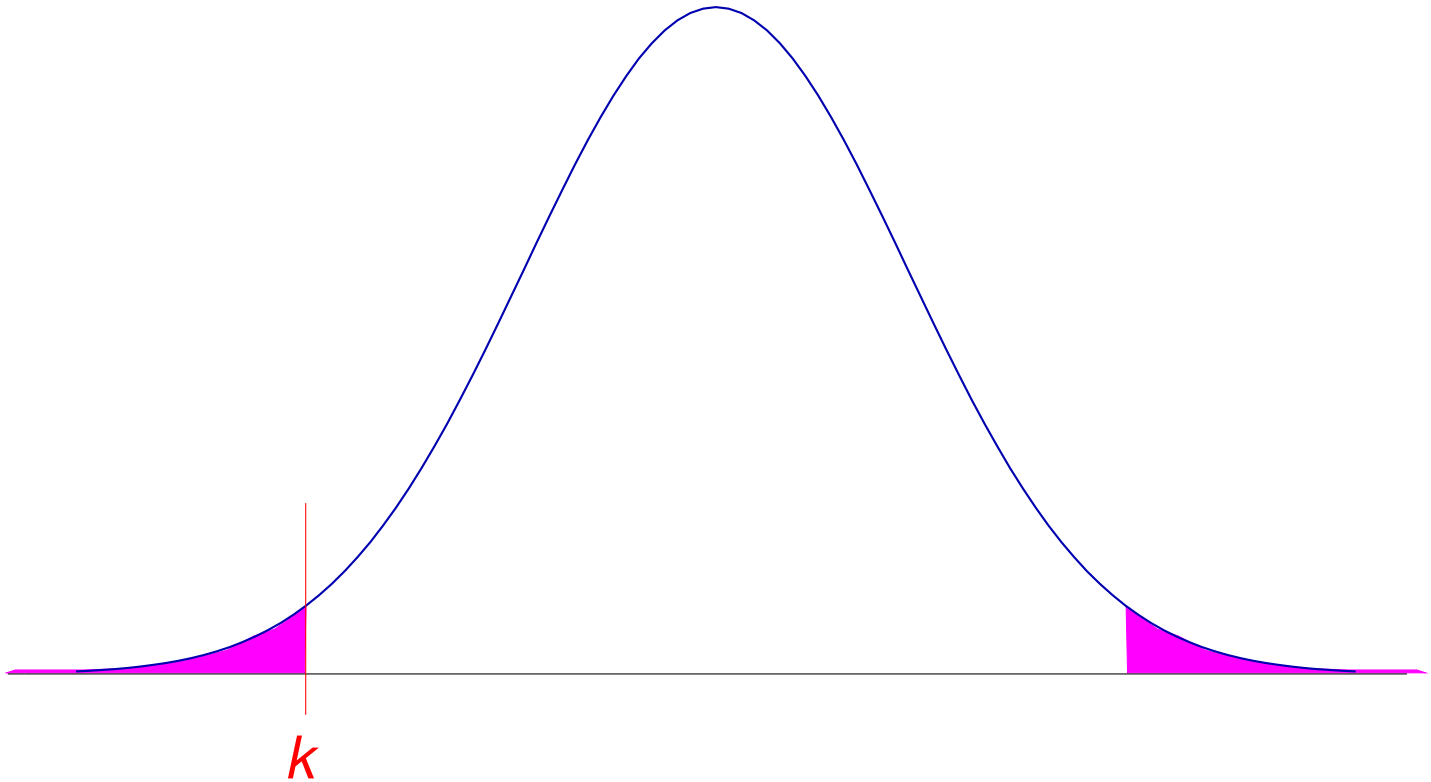
$$\mathbb{P}(X = 101844) = 0$$

Aber das bedeutet nichts, denn $\mathbb{P}(X = k) = 0$ gilt für jeden Wert k!

Entscheidend ist die Wahrscheinlichkeit, dass X (unter Annahme der H_0) einen mindestens so extremen Wert wie k annimmt:

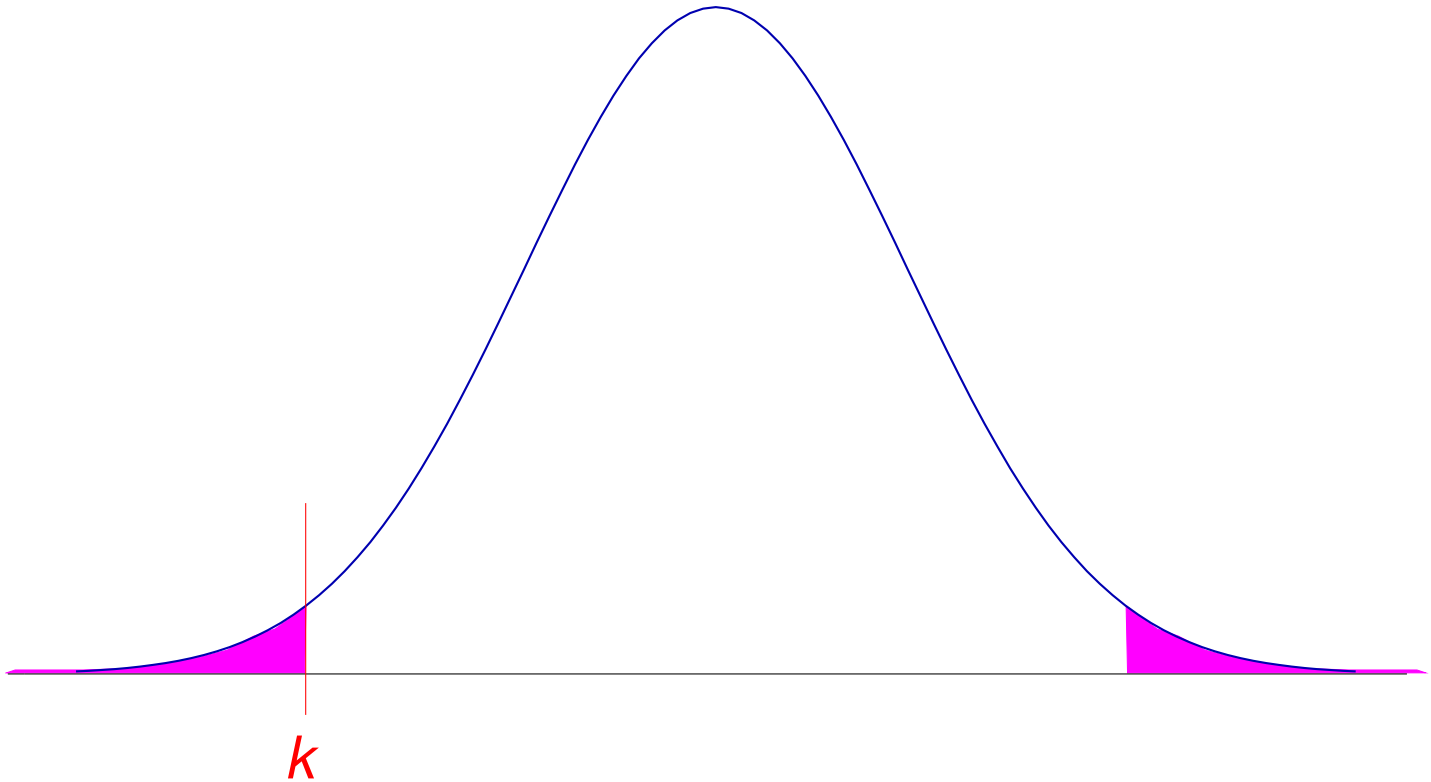


Entscheidend ist die Wahrscheinlichkeit, dass X (unter Annahme der H_0) einen mindestens so extremen Wert wie k annimmt:



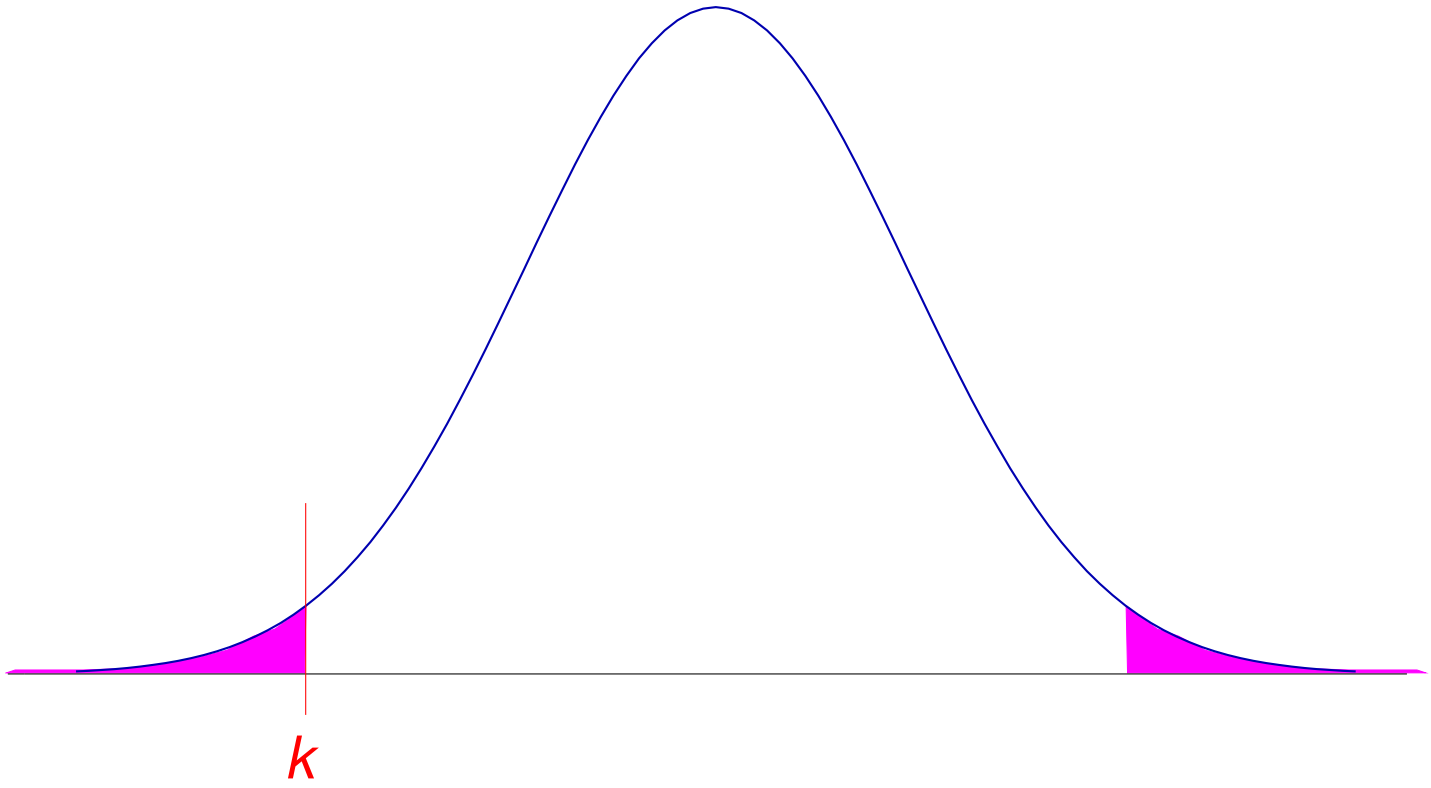
$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq |k - \mu|)$$

Entscheidend ist die Wahrscheinlichkeit, dass X (unter Annahme der H_0) einen mindestens so extremen Wert wie k annimmt:



$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq |k - \mu|) = \mathbb{P}(|X - \mu| \geq 2156)$$

Entscheidend ist die Wahrscheinlichkeit,
dass X (unter Annahme der H_0) einen
mindestens so extremen Wert wie k annimmt:



$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq |k-\mu|) = \mathbb{P}(|X-\mu| \geq 2156) \approx \mathbb{P}(|X-\mu| \geq 9.5 \cdot \sigma)$$

Wir wissen bereits:

$$Pr(|X - \mu| \geq 3 \cdot \sigma) \approx 0.003$$

Wir wissen bereits:

$$Pr(|X - \mu| \geq 3 \cdot \sigma) \approx 0.003 \qquad \text{(siehe Merkregeln!)}$$

Wir wissen bereits:

$$Pr(|X - \mu| \geq 3 \cdot \sigma) \approx 0.003 \qquad \text{(siehe Merkregeln!)}$$

Also muss $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq 9.5 \cdot \sigma)$ extrem klein sein.

Wir wissen bereits:

$$Pr(|X - \mu| \geq 3 \cdot \sigma) \approx 0.003 \qquad \text{(siehe Merkregeln!)}$$

Also muss $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq 9.5 \cdot \sigma)$ extrem klein sein.
In der Tat:
Mit Normalapproximation ist
$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq 9{,}5 \cdot \sigma) \approxeq \mathbb{P}(|Z| \geq 9{,}5) \doteq 3 \cdot 10^{-21}$ (wo $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$)

(Der exakte Wert für die Binomialverteilung mit $n = 208003$, $p = 1/2$ ist $3{,}1 \cdot 10^{-21}$.)

Wir können also argumentieren,
dass eine derartig starke Abweichung vom Erwartungswert
nur durch einen extremen Zufall zu erklären ist.

Wir werden also die
Nullhypothese “alles nur Zufall” verwerfen
und nach alternativen Erklärungen suchen,
etwa unterschiedliche Effizienz von CCA und CCT
oder unterschiedliche Verfügbarkeit von A und T.

Zusammenfassung z-Test

Nullhypothese H_0 (möchte man meistens verwerfen): der beobachtete Wert x kommt aus einer Normalverteilung mit Mittelwert μ und **bekannter** Varianz σ^2.

Zusammenfassung z-Test

Nullhypothese H_0 (möchte man meistens verwerfen): der beobachtete Wert x kommt aus einer Normalverteilung mit Mittelwert μ und **bekannter** Varianz σ^2.

p-Wert $= \mathbb{P}(|X - \mu| \geq |x - \mu|)$, wobei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, also die Wahrscheinlichkeit einer *mindestens* so großen Abweichung wie der beobachteten.

Zusammenfassung z-Test

Nullhypothese H_0 (möchte man meistens verwerfen): der beobachtete Wert x kommt aus einer Normalverteilung mit Mittelwert μ und **bekannter** Varianz σ^2.

***p*-Wert** $=\mathbb{P}(|X-\mu| \geq |x-\mu|)$, wobei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, also die Wahrscheinlichkeit einer *mindestens* so großen Abweichung wie der beobachteten.

Signifikanzniveau α : oft 0.05. Wenn der p-Wert kleiner ist als α, verwerfen wir die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau α und suchen nach einer alternativen Erklärung.

Grenzen des z-Tests

Der z-Test kann nur angewendet werden, wenn die Varianz der Normalverteilung bekannt ist oder zumindest in der Nullhypothese als bekannt angenommen wird.

Grenzen des z-Tests

Der z-Test kann nur angewendet werden, wenn die Varianz der Normalverteilung bekannt ist oder zumindest in der Nullhypothese als bekannt angenommen wird.

Das ist meistens nicht der Fall, wenn die Normalverteilung beim statistischen Testen verwendet wird:

Meistens wird die Varianz aus den Daten geschätzt. Dann wird anstelle des z-Tests der (wesentlich berühmtere)

t-Test

angewendet.

Tabelle: Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, so ist $\mathbb{P}(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = \Phi(x)$

Beispiel: $\Phi(1.74) = 0.9591$. Für $x < 0$ verwende $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$