

Biostatistik, WS 2013/2014

Wilcoxon's Rangsummen-Test

Matthias Birkner

<http://www.mathematik.uni-mainz.de/~birkner/Biostatistik1314/>

20.12.2013



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Inhalt

- 1 Wilcoxon's Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben

Inhalt

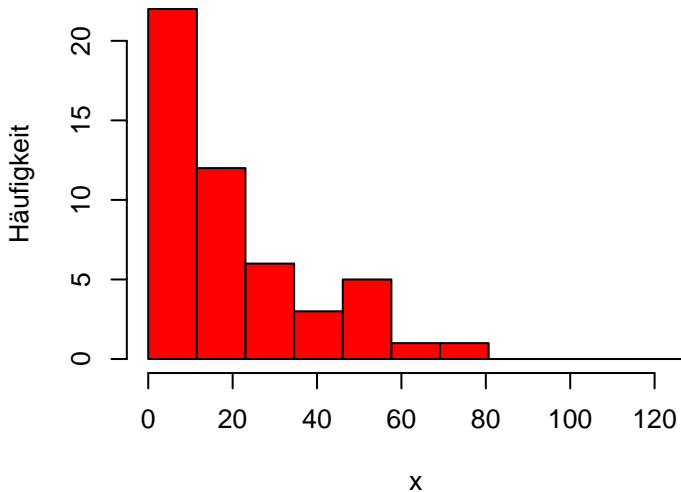
- 1 Wilcoxon's Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben

Bei (ungefähr) glockenförmigen und symmetrisch verteilten Beobachtungen oder wenn die Stichprobenumfänge genügend groß sind können wir den t -Test benutzen, um die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2$ zu testen: Die t -Statistik ist (annähernd) Student-verteilt.

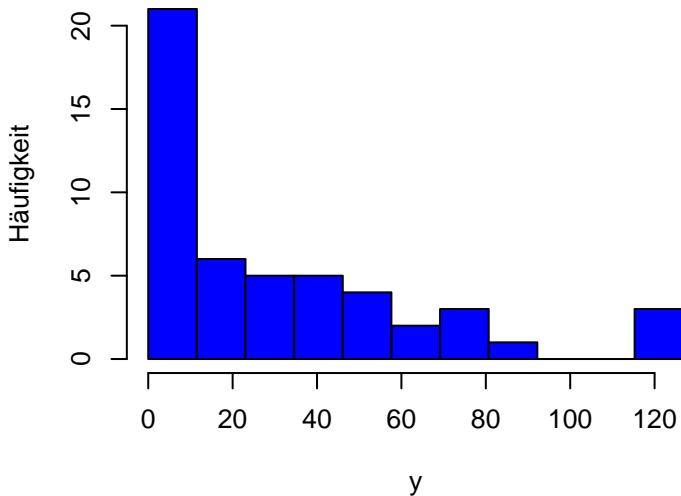
Bei (ungefähr) glockenförmigen und symmetrisch verteilten Beobachtungen oder wenn die Stichprobenumfänge genügend groß sind können wir den t -Test benutzen, um die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2$ zu testen: Die t -Statistik ist (annähernd) Student-verteilt.

Besonders bei sehr asymmetrischen und langschwänzigen Verteilungen kann das anders sein

Nehmen wir an, wir sollten folgende Verteilungen vergleichen:



Nehmen wir an, wir sollten folgende Verteilungen vergleichen:



Beispiele

Beispiele

- Wartezeiten

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen
- Zelltypenhäufigkeiten

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen
- Zelltypenhäufigkeiten

Gesucht:

ein „verteilungsfreier“ Test,
mit dem man die Lage zweier Verteilungen
zueinander testen kann

Inhalt

- 1 Wilcoxon's Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Wir möchten die **Nullhypothese**:
 X und Y aus derselben Population
(X und Y haben **diesselbe Verteilung**)
testen

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Wir möchten die **Nullhypothese**:
 X und Y aus derselben Population
(X und Y haben **diesselbe Verteilung**)
testen

gegen die **Alternative**:

Die beiden Verteilungen sind gegeneinander verschoben.

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Wir möchten die **Nullhypothese**:
 X und Y aus derselben Population
(X und Y haben **diesselbe Verteilung**)
testen

gegen die **Alternative**:

Die beiden Verteilungen sind gegeneinander verschoben.

Wir sind also in einer Situation, die wir schon beim t -Test getroffen haben: Die zwei Verteilungen sind möglicherweise gegeneinander verschoben (haben insbesondere möglicherweise unterschiedliche Mittelwerte), aber wir möchten *nicht* die implizite Annahme treffen, dass es sich dabei (wenigstens ungefähr) um Normalverteilungen handelt.

Idee

Beobachtungen:

$X : x_1, x_2, \dots, x_m$

$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.
- Wenn die Nullhypothese zutrifft, sind die m X -Ränge eine rein zufällige Wahl aus $\{1, 2, \dots, m + n\}$.

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

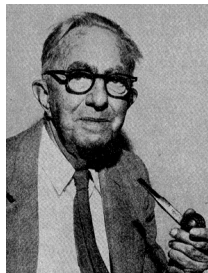
- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.
- Wenn die Nullhypothese zutrifft, sind die m X -Ränge eine rein zufällige Wahl aus $\{1, 2, \dots, m + n\}$.
- Berechne die Summe der X -Ränge, prüfe, ob dieser Wert untypisch groß oder klein.

Wilcoxons Rangsummenstatistik

Beobachtungen:

$X : x_1, x_2, \dots, x_m$

$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$



Frank Wilcoxon,
1892–1965

$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$
heißt

Wilcoxons Rangsummenstatistik

Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Bemerkung:

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$$

Wir könnten auch die Summe der Y -Ränge benutzen,

Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Bemerkung:

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$$

Wir könnten auch die Summe der Y -Ränge benutzen, denn

$$\begin{aligned} & \text{Summe der } X\text{-Ränge} + \text{Summe der } Y\text{-Ränge} \\ &= \text{Summe aller Ränge} \\ &= 1 + 2 + \dots + (m + n) = \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} \end{aligned}$$

Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Bemerkung:

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$$

Wir könnten auch die Summe der Y -Ränge benutzen, denn

$$\begin{aligned} & \text{Summe der } X\text{-Ränge} + \text{Summe der } Y\text{-Ränge} \\ &= \text{Summe aller Ränge} \\ &= 1 + 2 + \dots + (m + n) = \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung

Der Wilcoxon Test heißt auch Mann-Whitney-Test.
Die Mann-Whitney Statistik $U = W + \text{Konstante}$.

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

X : 1,5; 5,6; 35,2

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

X : 1,5; 5,6; 35,2

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:

1,5; 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

X : 1,5; 5,6; 35,2

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:

1,5; 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Bestimme Ränge:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

X : 1,5; 5,6; 35,2

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:

1,5; 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Bestimme Ränge:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

- Rangsumme: $W = 1 + 2 + 4 - (1 + 2 + 3) = 1$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W =$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X -Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X -Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W =$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X -Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X -Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 19$

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

Signifikanz

Nullhypothese:
 X -Stichprobe und Y -Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X -Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Es gibt $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ Möglichkeiten.

Signifikanz

Nullhypothese:
 X-Stichprobe und Y-Stichprobe
 stammen aus
 derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

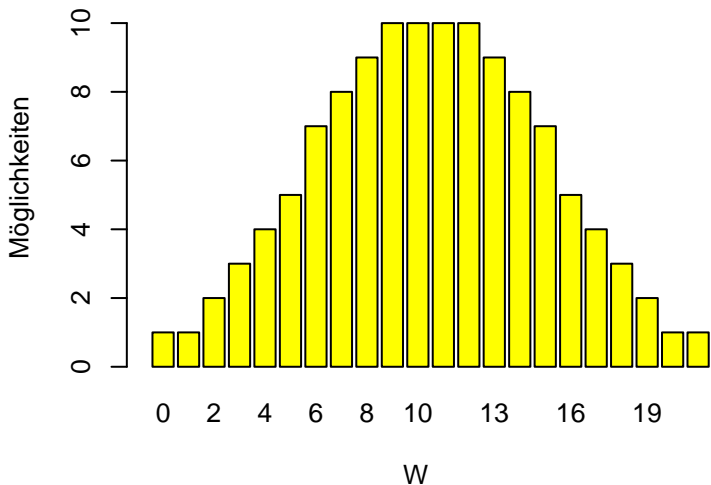
hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Es gibt $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ Möglichkeiten.

(Allgemein: $\frac{(m+n)(m+n-1)\dots(n+1)}{m(m-1)\dots 1} = \frac{(m+n)!}{n!m!} = \binom{m+n}{m}$ Möglichkeiten)

Verteilung der Wilcoxon-Statistik ($m = 3, n = 7$)

Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich
wahrscheinlich, also

$$\mathbb{P}(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich
wahrscheinlich, also

$$\mathbb{P}(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Wir beobachten in unserem Beispiel:

1,5, 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8
somit $W = 1$

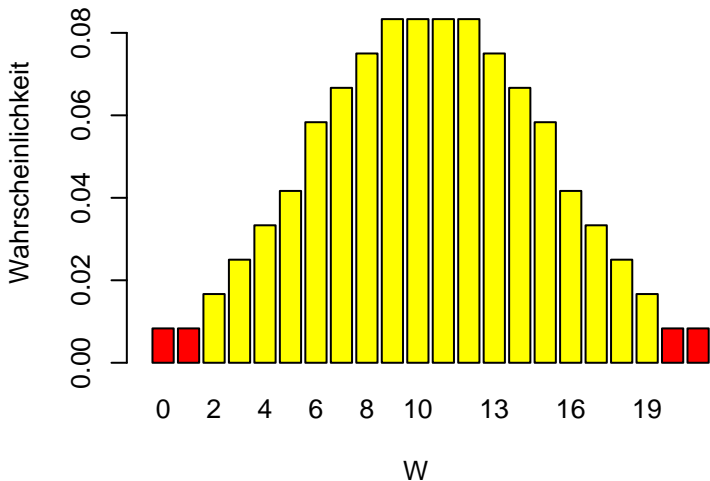
Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich
wahrscheinlich, also

$$\mathbb{P}(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Wir beobachten in unserem Beispiel:

1,5, 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8
somit $W = 1$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(W \leq 1) + \mathbb{P}(W \geq 20) \\ &= \mathbb{P}(W = 0) + \mathbb{P}(W = 1) + \mathbb{P}(W = 20) + \mathbb{P}(W = 21) \\ &= \frac{1+1+1+1}{120} \doteq 0,033 \end{aligned}$$

Verteilung der Wilcoxon-Statistik ($m = 3, n = 7$)

Für unser Beispiel ($W = 1$) also:

$$p\text{-Wert} = \mathbb{P}(\text{ein so extremes } W) = 4/120 = 0,033$$

Für unser Beispiel ($W = 1$) also:

$$p\text{-Wert} = \mathbb{P}(\text{ein so extremes } W) = 4/120 = 0,033$$

Wir **lehnen** die **Nullhypothese**,
dass die Verteilungen
von X und Y
identisch sind,
auf dem 5%-Niveau **ab**.

Achtung

Achtung!!!

Wenn der Wilcoxon-Test Signifikanz anzeigt, so kann das daran liegen, dass die zu grunde liegenden Verteilungen verschiedene Formen haben.

Achtung

Achtung!!!

Wenn der Wilcoxon-Test Signifikanz anzeigt, so kann das daran liegen, dass die zu grunde liegenden Verteilungen verschiedene Formen haben.

Der Wilcoxon-Test kann beispielsweise Signifikanz anzeigen, **selbst wenn die Stichproben-Mittelwerte übereinstimmen!**

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch
der Wilcoxon-Test können verwendet werden,
um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch der Wilcoxon-Test können verwendet werden, um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Der t -Test testet „nur“ auf Gleichheit der Erwartungswerte.

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch der Wilcoxon-Test können verwendet werden, um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Der t -Test testet „nur“ auf Gleichheit der Erwartungswerte.
Der Wilcoxon-Test dagegen testet auf Gleichheit der gesamten Verteilungen.

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch der Wilcoxon-Test können verwendet werden, um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Der t -Test testet „nur“ auf Gleichheit der Erwartungswerte.
Der Wilcoxon-Test dagegen testet auf Gleichheit der gesamten Verteilungen.

In den meisten Fällen liefern beide Tests dasselbe Ergebnis.
Im Allgemeinen empfehlen wir den t -Test, da er robuster ist.

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch der Wilcoxon-Test können verwendet werden, um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Der t -Test testet „nur“ auf Gleichheit der Erwartungswerte.
Der Wilcoxon-Test dagegen testet auf Gleichheit der gesamten Verteilungen.

In den meisten Fällen liefern beide Tests dasselbe Ergebnis.
Im Allgemeinen empfehlen wir den t -Test, da er robuster ist.

In besonderen Fällen

- Verteilungen sind asymmetrisch
- Stichprobenlänge ist klein

hat der Wilcoxon-Test eine höhere Testpower.

Vergleichen wir (spañeshalber) mit dem t -Test:

```
> x
[1] 1.5 5.6 35.2
> y
[1] 7.9 38.1 41.0 56.7 112.1 197.4 381.8
> t.test(x,y)
```

Welch Two Sample t -test

data: x and y

$t = -2.0662$, $df = 6.518$, $p\text{-value} = 0.08061$

alternative hypothesis: true difference in means is not e

95 percent confidence interval:

-227.39182 17.02039

sample estimates:

mean of x mean of y

14.1000 119.2857

