

Biostatistik, WS 2015/2016

Der Standardfehler

Matthias Birkner

<http://www.staff.uni-mainz.de/birkner/Biostatistik1516/>

20.11.2015



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

- 1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
 - Mittelwert und Standardabweichung
 - Ein Beispiel zur Warnung
- 2 Der Standardfehler
 - Ein Versuch
 - Ein allgemeiner Rahmen
 - Zur Verteilung von \bar{x}
 - Anwendungen
 - Zusammenfassung

Inhalt

1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik

- Mittelwert und Standardabweichung
- Ein Beispiel zur Warnung

2 Der Standardfehler

- Ein Versuch
- Ein allgemeiner Rahmen
- Zur Verteilung von \bar{x}
- Anwendungen
- Zusammenfassung

Inhalt

- 1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
 - Mittelwert und Standardabweichung
 - Ein Beispiel zur Warnung
- 2 Der Standardfehler
 - Ein Versuch
 - Ein allgemeiner Rahmen
 - Zur Verteilung von \bar{x}
 - Anwendungen
 - Zusammenfassung

Bachstelzen fressen Dungfliegen

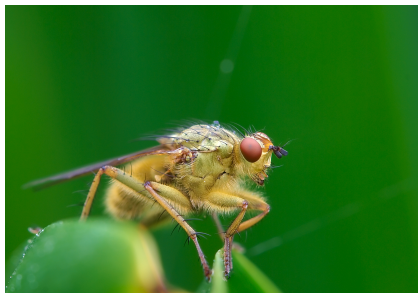
Räuber



Bachstelze (White Wagtail)
Motacilla alba alba

image (c) by Artur Mikolajewski

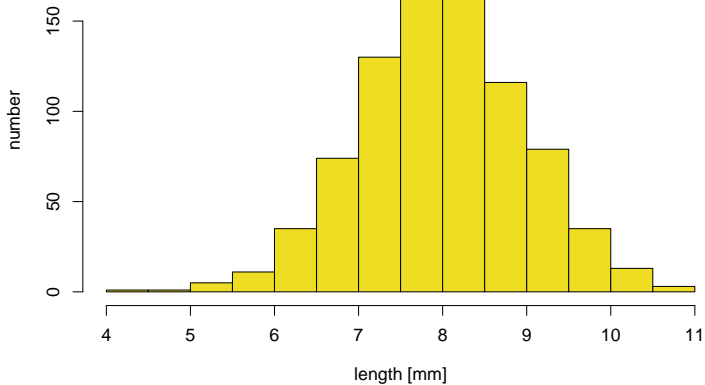
Beute



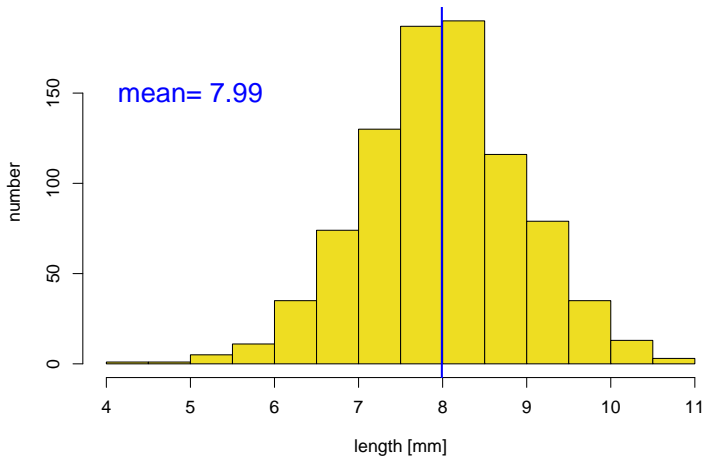
Gelbe Dungfliege
Scatophaga stercoraria

image (c) by Viatour Luc

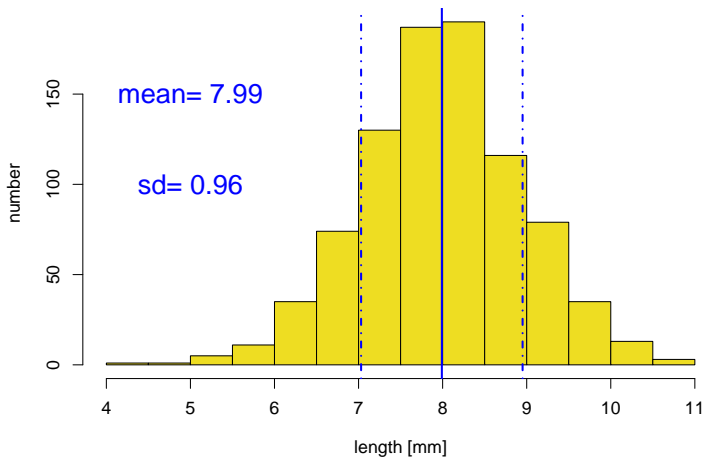
available dung flies



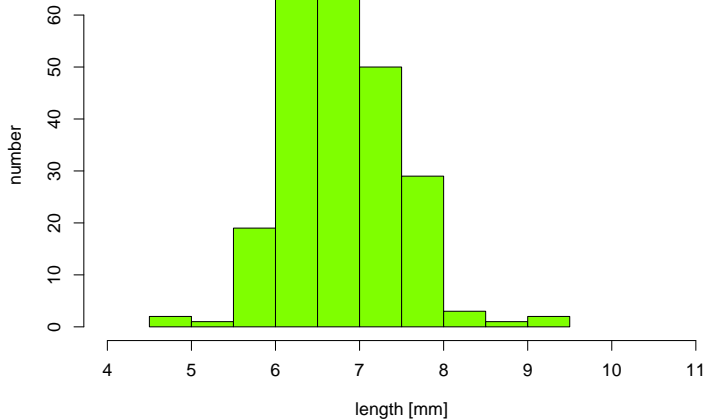
available dung flies



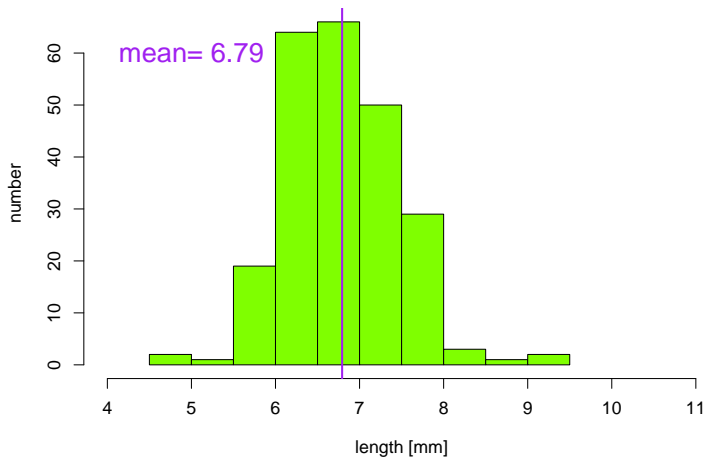
available dung flies



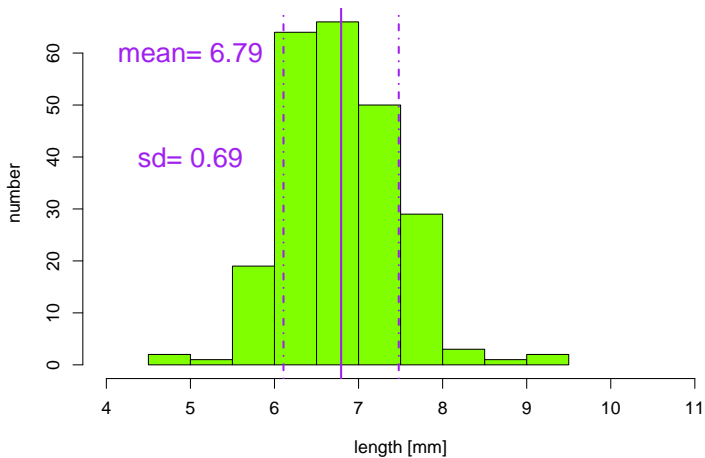
captured dung flies



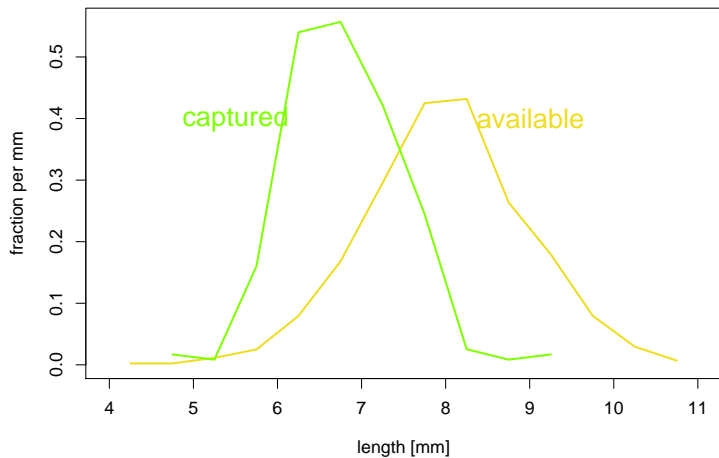
captured dung flies



captured dung flies



dung flies: available, captured

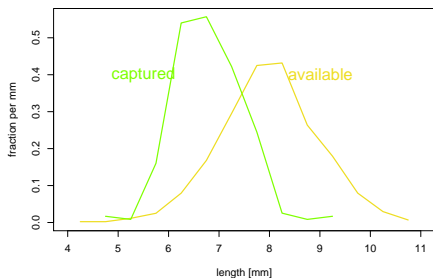


Wählerische Bachstelzen

Länge der Dungfliegen:

	gefangen		verfügbar
Mittelwert	6.79	<	7.99
Standardabw.	0.69	<	0.96

dung flies: available, captured



Interpretation: Die Bachstelzen bevorzugen Dungfliegen aus einem relativ engen Größenbereich um 7mm herum.

Beobachtung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den **Mittelwert** und die **Standardabweichung** angemessen beschrieben werden (z.B. die verfügbaren und die tatsächlich gefangenen Dungfliegen aus dem Bachstelzen-Beispiel).

Beobachtung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den **Mittelwert** und die **Standardabweichung** angemessen beschrieben werden (z.B. die verfügbaren und die tatsächlich gefangenen Dungfliegen aus dem Bachstelzen-Beispiel).

Es gibt aber auch Ausnahmen.

Inhalt

1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik

- Mittelwert und Standardabweichung
- Ein Beispiel zur Warnung

2 Der Standardfehler

- Ein Versuch
- Ein allgemeiner Rahmen
- Zur Verteilung von \bar{x}
- Anwendungen
- Zusammenfassung

Kupfertolerantes Rotes Straußgras



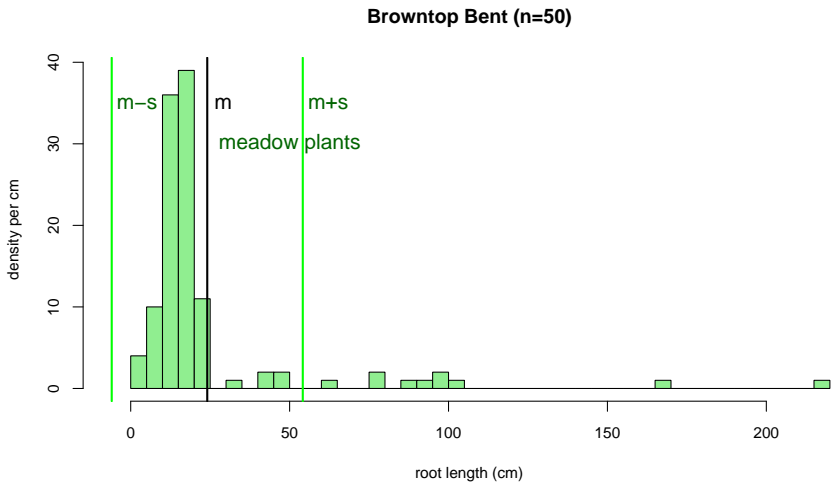
Rotes Straußgras
Agrostis tenuis

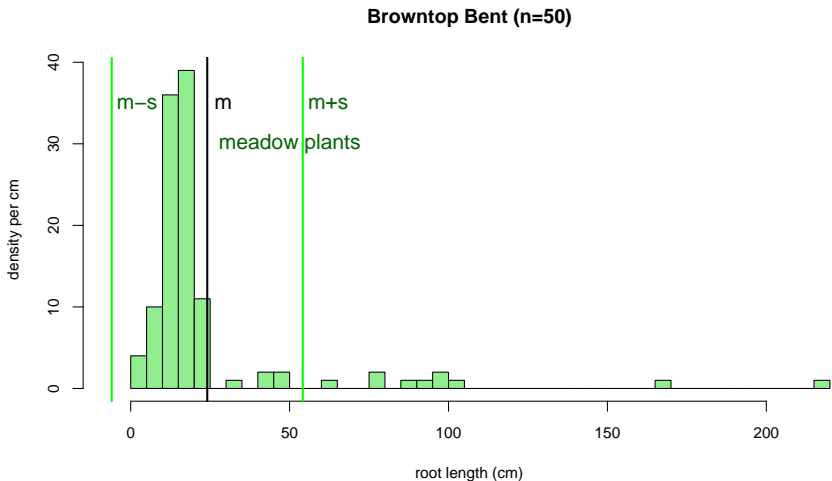
image (c) Kristian Peters



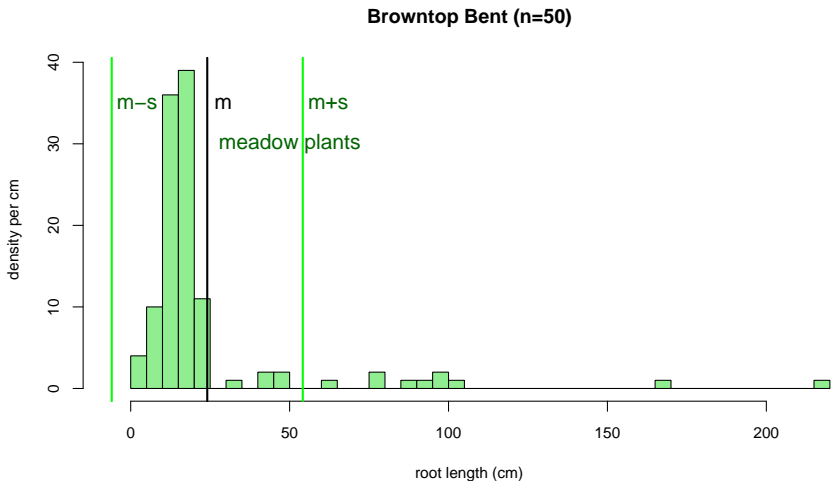
Kupfer
Cuprum

Hendrick met de Bles





In etwa 2/3 der Wurzellängen innerhalb $[m-sd, m+sd]$????



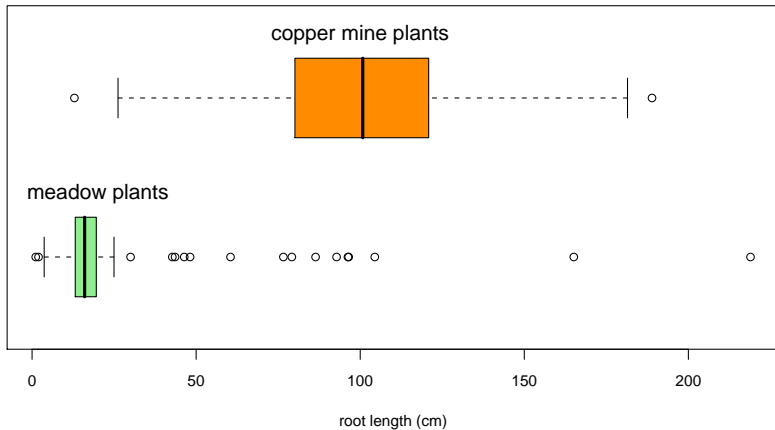
In etwa 2/3 der Wurzellängen innerhalb $[m-sd, m+sd]$????

Nein! Deutlich mehr.

Manche Verteilungen können nur mit mehr als zwei Variablen angemessen beschrieben werden,

Manche Verteilungen können nur mit mehr als zwei Variablen angemessen beschrieben werden,

z.B. mit den fünf Werten der Boxplots:
min, Q_1 , median, Q_3 , max

Browntop Bent n=50+50

Schlussfolgerung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den **Mittelwert** und die **Standardabweichung** angemessen beschrieben werden.

Schlussfolgerung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den **Mittelwert** und die **Standardabweichung** angemessen beschrieben werden.

Es gibt aber auch Ausnahmen. Also:
Immer die Daten erst mal graphisch untersuchen!

Schlussfolgerung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den **Mittelwert** und die **Standardabweichung** angemessen beschrieben werden.

Es gibt aber auch Ausnahmen. Also:
Immer die Daten erst mal graphisch untersuchen!

Verlassen Sie sich **nicht** allein auf numerische Kenngrößen!

Inhalt

- 1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
 - Mittelwert und Standardabweichung
 - Ein Beispiel zur Warnung
- 2 Der Standardfehler
 - Ein Versuch
 - Ein allgemeiner Rahmen
 - Zur Verteilung von \bar{x}
 - Anwendungen
 - Zusammenfassung

Inhalt

- 1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
 - Mittelwert und Standardabweichung
 - Ein Beispiel zur Warnung
- 2 **Der Standardfehler**
 - **Ein Versuch**
 - Ein allgemeiner Rahmen
 - Zur Verteilung von \bar{x}
 - Anwendungen
 - Zusammenfassung



Hirse

Bild: *Panicum miliaceum*

Ein Versuch

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen („trockengestresst“).

Ein Versuch

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen („trockengestresst“).

An den letzten drei Tagen wurde die Wasserabgabe der Pflanzen durch Wägung ermittelt und ein Mittelwert über drei Tage errechnet.

Ein Versuch

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen („trockengestresst“).

An den letzten drei Tagen wurde die Wasserabgabe der Pflanzen durch Wägung ermittelt und ein Mittelwert über drei Tage errechnet.

Zum Schluß des Versuchs wurden die Pflanzen abgeschnitten und die Blattfläche bestimmt.

$$\begin{aligned} &\text{Transpirationsrate} \\ &= \\ &(\text{Wasserabgabe pro Tag})/\text{Blattfläche} \end{aligned}$$

Transpirationsrate

=

(Wasserabgabe pro Tag)/Blattfläche

$$\left[\frac{\text{ml}}{\text{cm}^2 \cdot \text{Tag}} \right]$$

Ein Ziel des Versuchs: die mittlere
Transpirationsrate
(für diese Hirsesorte unter diesen
Bedingungen)
zu bestimmen.

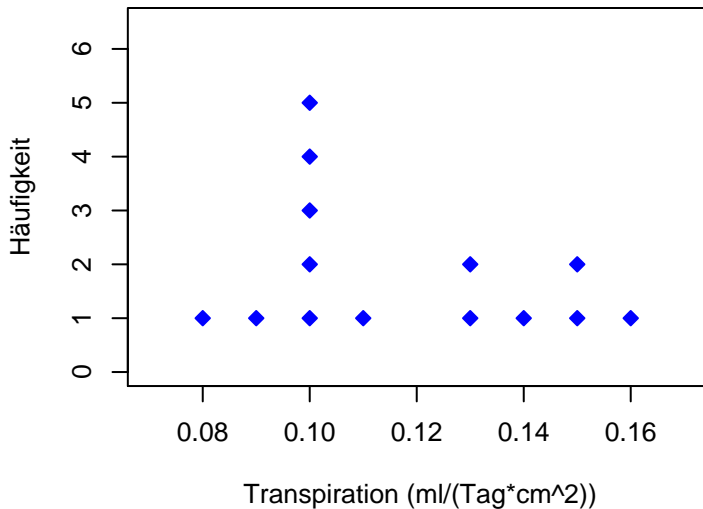
Ein Ziel des Versuchs: die mittlere
Transpirationsrate μ
(für diese Hirsesorte unter diesen
Bedingungen)
zu bestimmen.

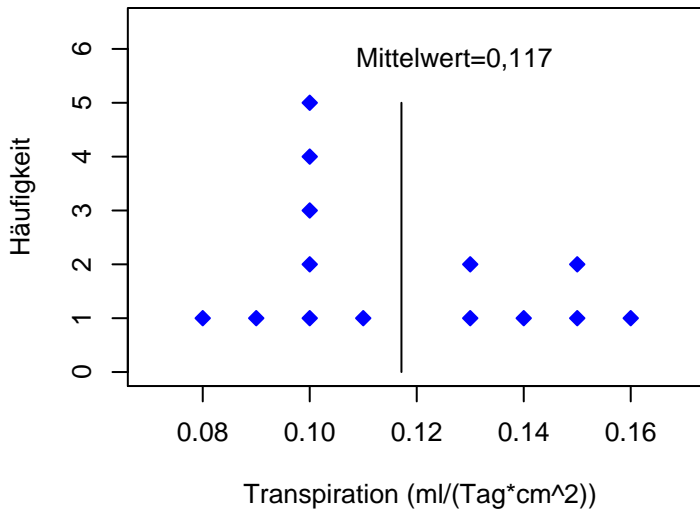
In einem großen Versuch mit sehr vielen Pflanzen könnte man μ beliebig genau bestimmen.

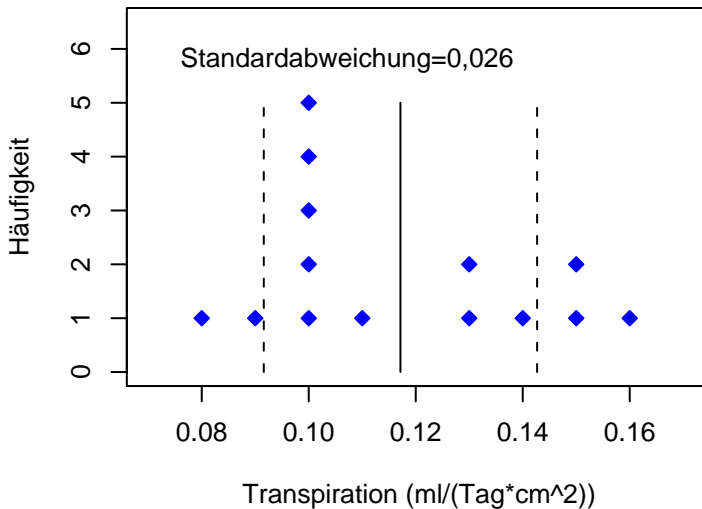
In einem großen Versuch mit sehr vielen Pflanzen könnte man μ beliebig genau bestimmen.

FRAGE:

Wie genau ist die Schätzung von μ in diesem kleinen ($n = 14$) Versuch?

Trockengestresste Hirse ($n = 14$)

Trockengestresste Hirse ($n = 14$)

Trockengestresste Hirse ($n = 14$)

Transpirationsdaten: x_1, x_2, \dots, x_{14}

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_{14}) / 14$$

Transpirationsdaten: x_1, x_2, \dots, x_{14}

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_{14})/14 = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} x_i$$

Transpirationsdaten: x_1, x_2, \dots, x_{14}

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_{14})/14 = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} x_i$$

$$\bar{x} = 0,117$$

Unsere Schätzung:

$$\mu \approx 0,117$$

Unsere Schätzung:

$$\mu \approx 0,117$$

Wie genau ist diese Schätzung?

Unsere Schätzung:

$$\mu \approx 0,117$$

Wie genau ist diese Schätzung?

Wie weit weicht \bar{X} (unser Schätzwert)
von μ (dem wahren Mittelwert) **ab?**

Inhalt

- 1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
 - Mittelwert und Standardabweichung
 - Ein Beispiel zur Warnung
- 2 **Der Standardfehler**
 - Ein Versuch
 - **Ein allgemeiner Rahmen**
 - Zur Verteilung von \bar{x}
 - Anwendungen
 - Zusammenfassung

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern 100 mal,

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern 100 mal,
1.000 mal,

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern 100 mal,
1.000 mal,
1.000.000 mal
wiederholt.

Unsere 14 Transpirationswerte
betrachten wir als
zufällige Stichprobe
aus dieser großen Population
von möglichen Werten.

Population

(sämtliche Transpirationsraten)

N sehr groß

(mathematische Idealisierung: $N = \infty$)

Population

(sämtliche Transpirationsraten)

N sehr groß

(mathematische Idealisierung: $N = \infty$)

Stichprobe

$n = 14$

Population

(sämtliche Transpirationsraten)

N sehr groß

(mathematische Idealisierung: $N = \infty$)

μ

Stichprobe

$n = 14$

\bar{x}

Wir schätzen
den Populationsmittelwert
 μ
durch
den Stichprobenmittelwert
 \bar{X} .

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen
Wert von \bar{x} .

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen
Wert von \bar{x} .

\bar{x} hängt vom Zufall ab:
eine *Zufallsgröße*

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen
Wert von \bar{x} .

\bar{x} hängt vom Zufall ab:
eine *Zufallsgröße*

FRAGE: Wie variabel ist \bar{x} ?

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen
Wert von \bar{x} .

\bar{x} hängt vom Zufall ab:
eine *Zufallsgröße*

FRAGE: Wie variabel ist \bar{x} ?

Genauer: Wie weit weicht \bar{x} typischerweise
von μ ab?

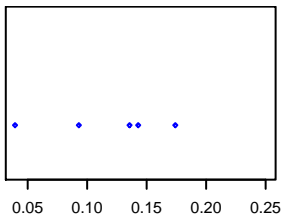
$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) / n$$

Wovon hängt die Variabilität von \bar{x} ab?

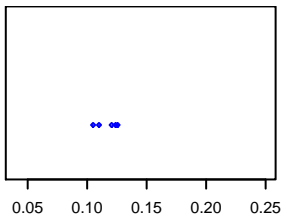
1.

von der
Variabilität
der einzelnen
Beobachtungen

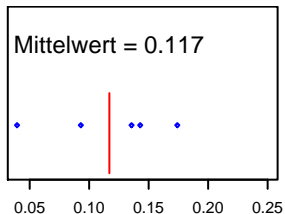
X_1, X_2, \dots, X_n



x variiert viel

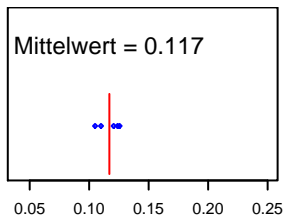


x variiert wenig



x variiert viel

$\Rightarrow \bar{x}$ variiert viel



x variiert wenig

$\Rightarrow \bar{x}$ variiert wenig

2.
vom
Stichprobenumfang
n

2.

vom
Stichprobenumfang

n

Je größer n ,
desto kleiner
die Variabilität von \bar{x} .

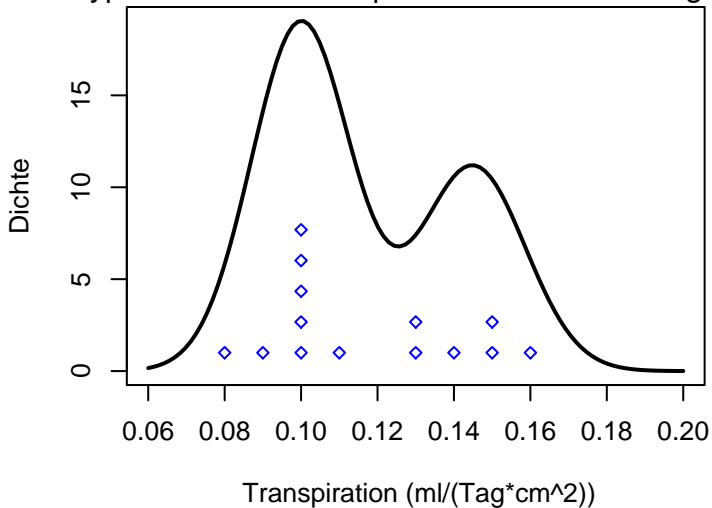
Um diese Abhängigkeit
zu untersuchen,
machen wir ein
(Computer-)Experiment.

Experiment:

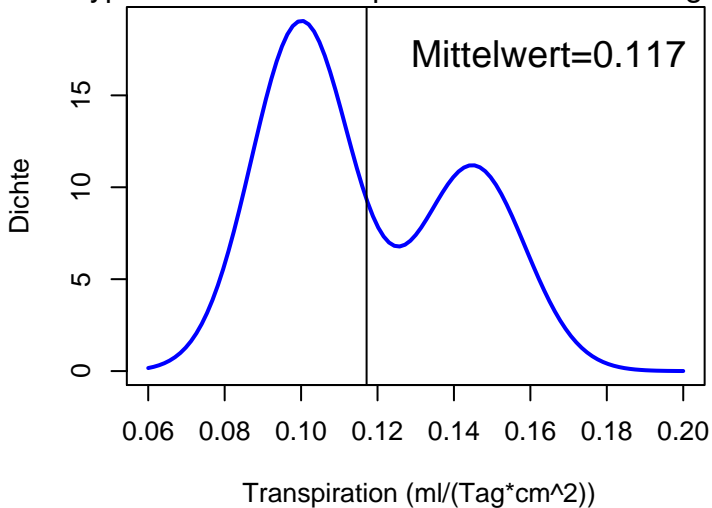
Wir nehmen eine Population,
ziehen Stichproben,
und schauen,
wie \bar{x} variiert.

Nehmen wir an,
die Verteilung
aller möglichen Transpirationswerte
sieht folgendermaßen aus:

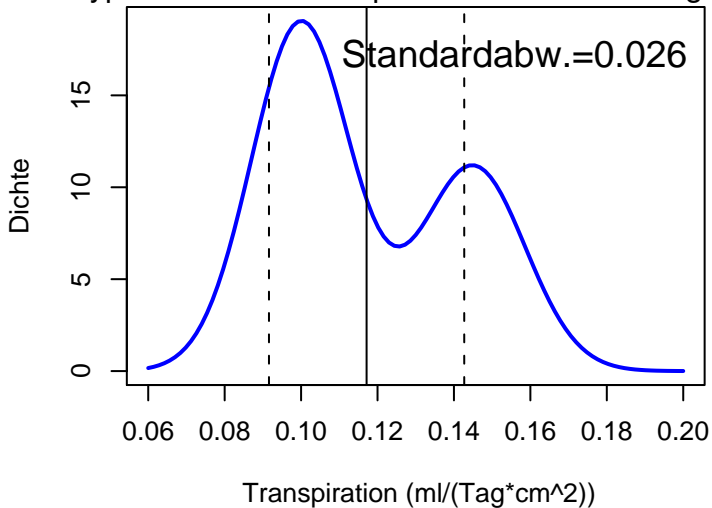
Hypothetische Transpirationsratenverteilung



Hypothetische Transpirationsratenverteilung



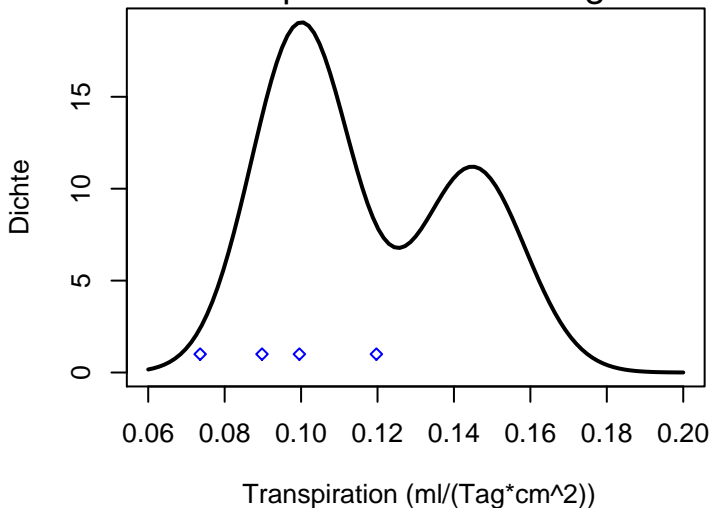
Hypothetische Transpirationsratenverteilung



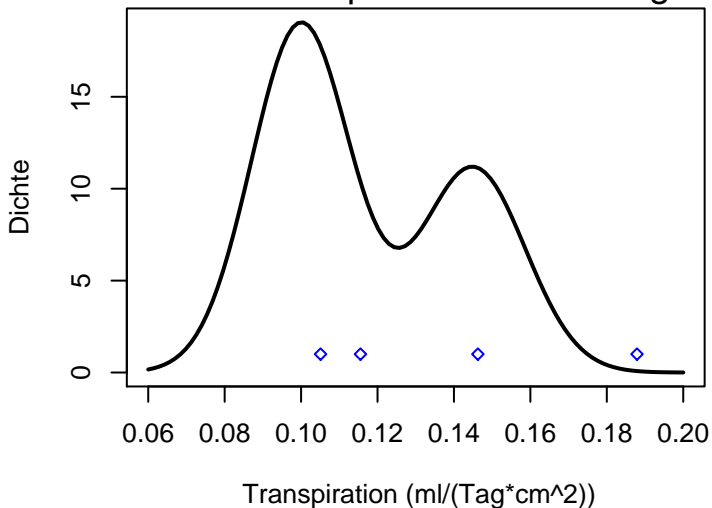
Wir beginnen mit kleinen Stichproben:

$$n = 4$$

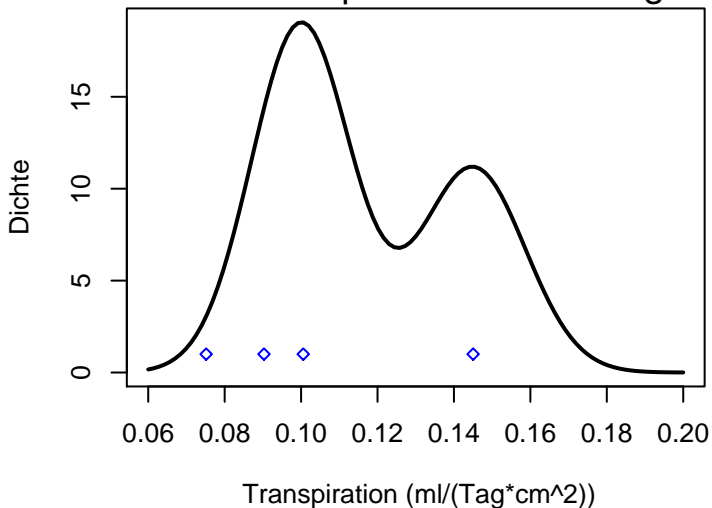
Eine Stichprobe vom Umfang 4



Eine zweite Stichprobe vom Umfang 4

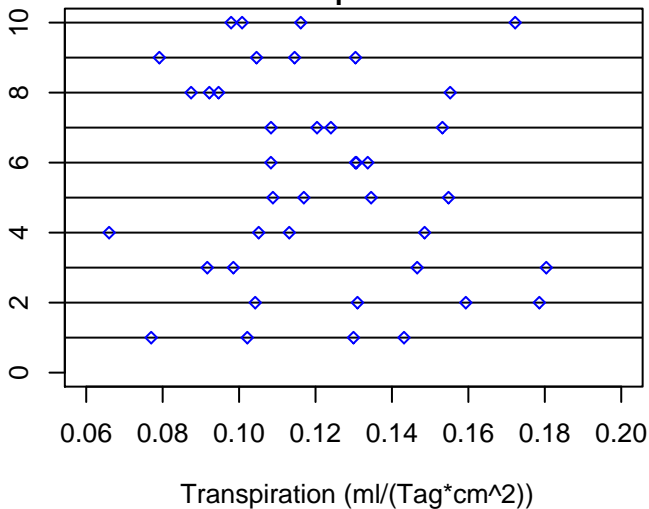


Eine dritte Stichprobe vom Umfang 4



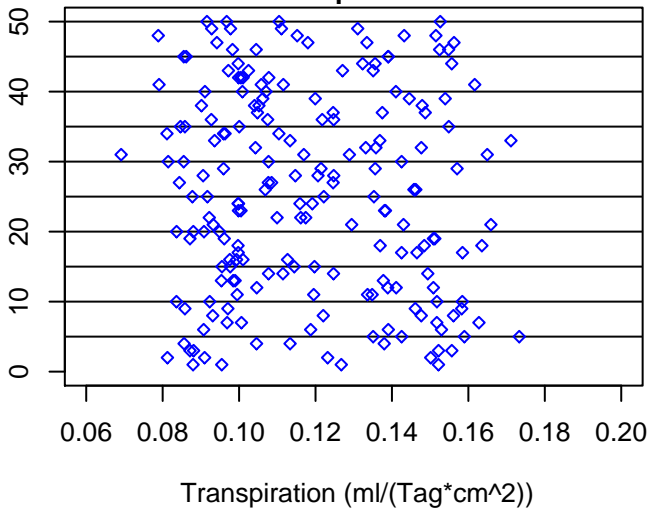
10 Stichproben

10 Stichproben



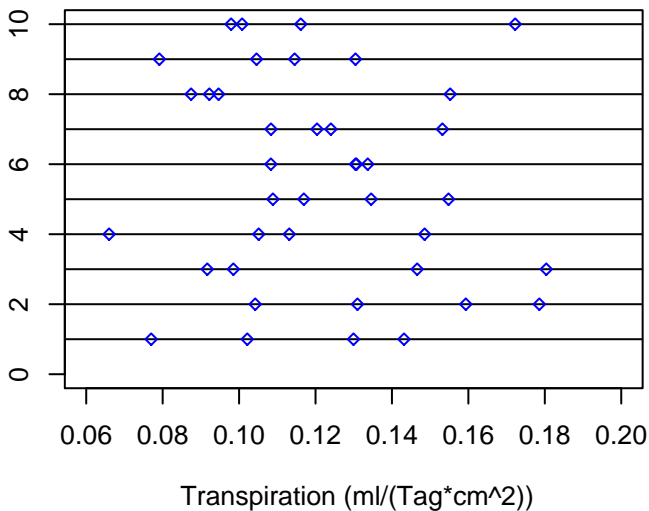
50 Stichproben

50 Stichproben

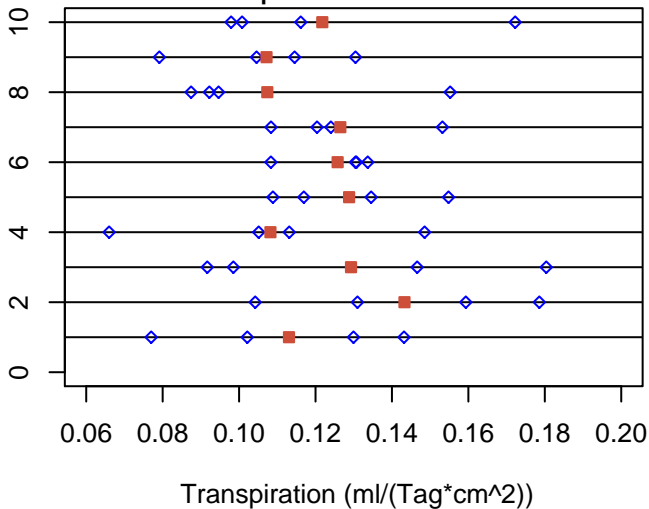


Wie variabel sind
die Stichprobenmittelwerte?

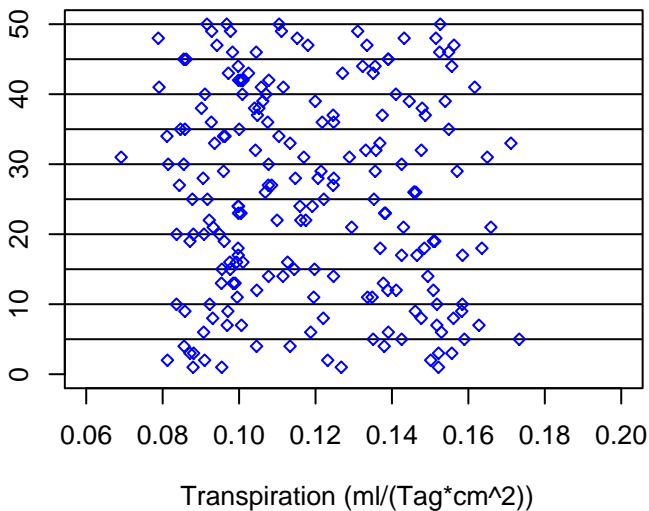
10 Stichproben vom Umfang 4



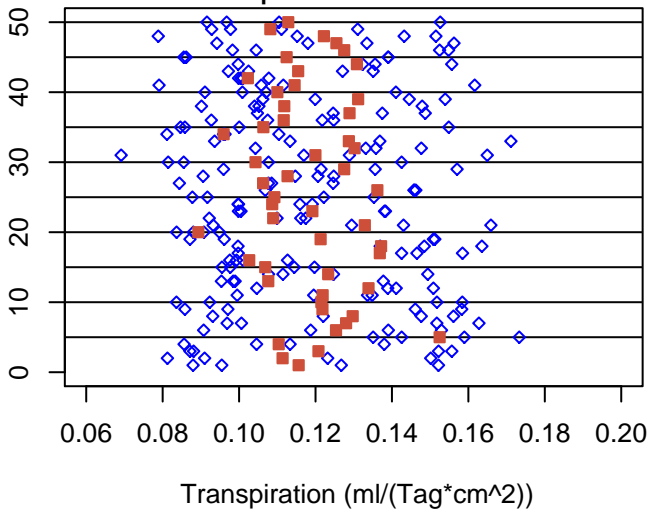
10 Stichproben vom Umfang 4 und die zugehörigen Stichprobenmittel



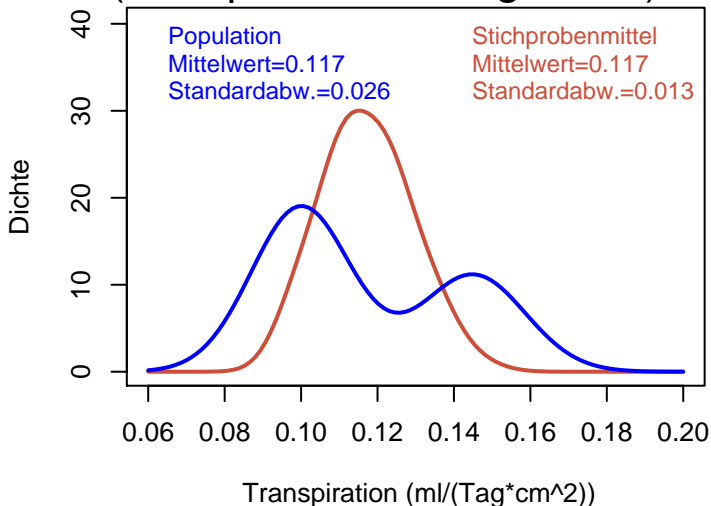
50 Stichproben vom Umfang 4



50 Stichproben vom Umfang 4 und die zugehörigen Stichprobenmittel



Verteilung der Stichprobenmittelwerte (Stichprobenumfang $n = 4$)



Population:
Standardabweichung = 0,026

Population:

Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 4$):

Standardabweichung = 0,013

Population:

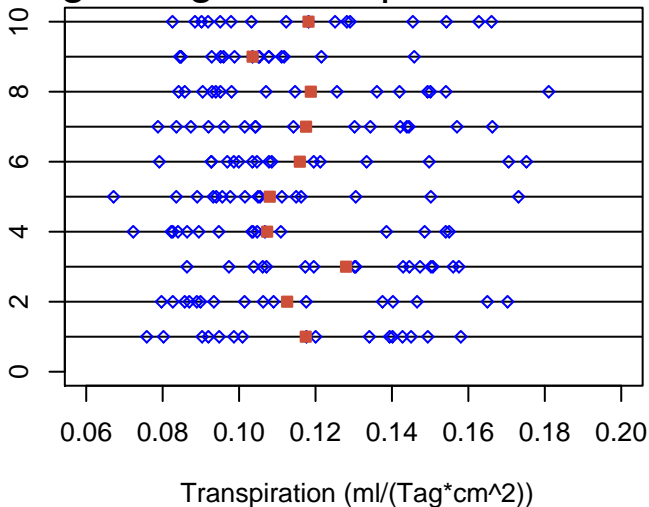
Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 4$):

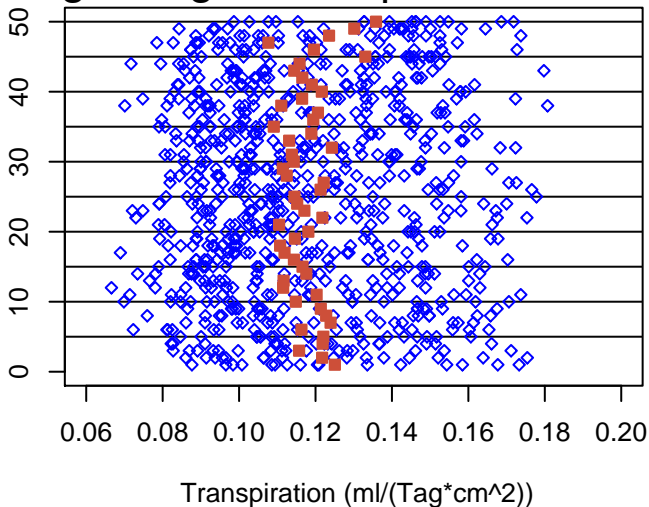
$$\begin{aligned}\text{Standardabweichung} &= 0,013 \\ &= 0,026 / \sqrt{4}\end{aligned}$$

Erhöhen wir
den Stichprobenumfang
von
4
auf
16

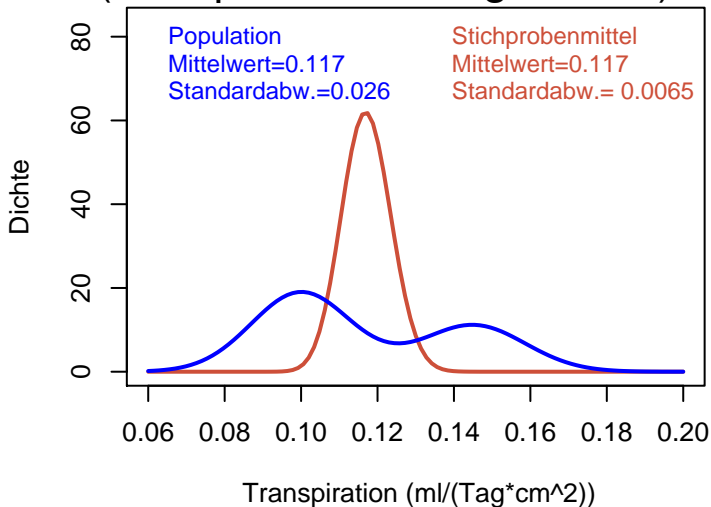
10 Stichproben vom Umfang 16 und die zugehörigen Stichprobenmittel



50 Stichproben vom Umfang 16 und die zugehörigen Stichprobenmittel



Verteilung der Stichprobenmittelwerte (Stichprobenumfang $n = 16$)



Population:
Standardabweichung = 0,026

Population:

Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 16$):

Standardabweichung = 0,0065

Population:

Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 16$):

$$\begin{aligned}\text{Standardabweichung} &= 0,0065 \\ &= 0,026/\sqrt{16}\end{aligned}$$

Die allgemeine Regel

Die Standardabweichung
des Mittelwerts einer Stichprobe vom
Umfang n

Die allgemeine Regel

Die Standardabweichung
des Mittelwerts einer Stichprobe vom
Umfang n

ist

$$1/\sqrt{n}$$

mal

der Standardabweichung
der Population.

Die Standardabweichung der Population
bezeichnet man mit

σ
(sigma).

Die Standardabweichung der Population
bezeichnet man mit

σ
(sigma).

Die Regel schreibt man häufig so:

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

In der Praxis ist σ unbekannt.

In der Praxis ist σ unbekannt.

Es wird durch

die Stichproben-Standardabweichung S

geschätzt:

In der Praxis ist σ unbekannt.

Es wird durch

die Stichproben-Standardabweichung S
geschätzt:

$$\sigma = ??$$

$$\text{(Erinnerung: } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \text{)}$$

In der Praxis ist σ unbekannt.

Es wird durch

die Stichproben-Standardabweichung S
geschätzt:

$$\sigma \approx S$$

(Erinnerung: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$)

$$s/\sqrt{n}$$

(die geschätzte
Standardabweichung
von \bar{x})
nennt man den
Standardfehler.

$$s/\sqrt{n}$$

(die geschätzte
Standardabweichung
von \bar{x})

nennt man den

Standardfehler.

(Englisch: *standard error of the mean,
standard error, SEM*)

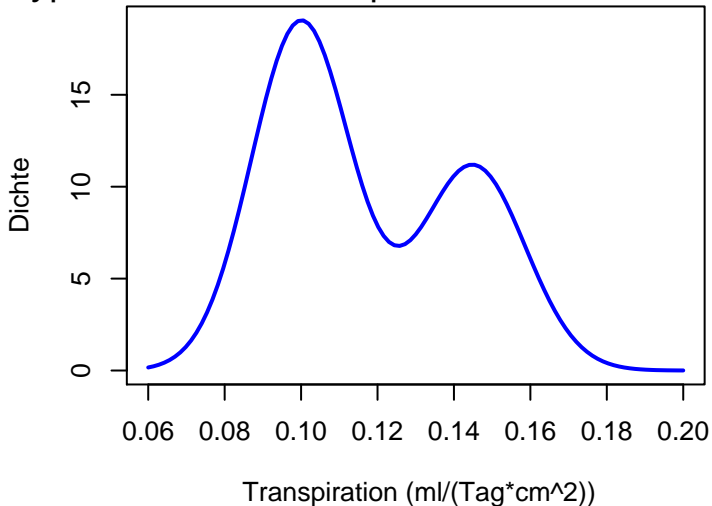
Inhalt

- 1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
 - Mittelwert und Standardabweichung
 - Ein Beispiel zur Warnung
- 2 Der Standardfehler
 - Ein Versuch
 - Ein allgemeiner Rahmen
 - **Zur Verteilung von \bar{x}**
 - Anwendungen
 - Zusammenfassung

Wir haben gesehen:

Auch wenn die Verteilung von
 x mehrgipfelig
&
asymmetrisch
ist

Hypothetische Transpirationsratenverteilung



ist die Verteilung von

\bar{x}

trotzdem

(annähernd)

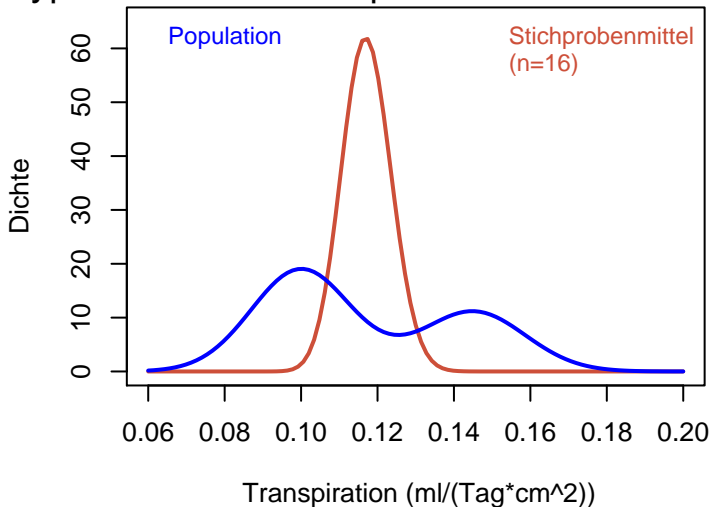
eingipfelig

&

symmetrisch

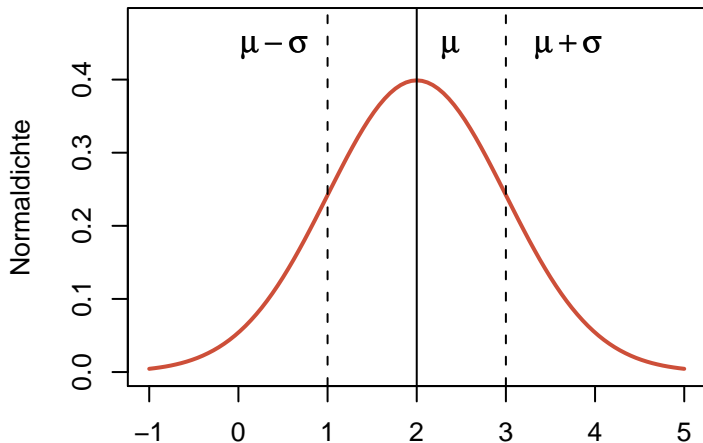
(wenn der Stichprobenumfang n nur groß genug ist)

Hypothetische Transpirationsratenverteilung

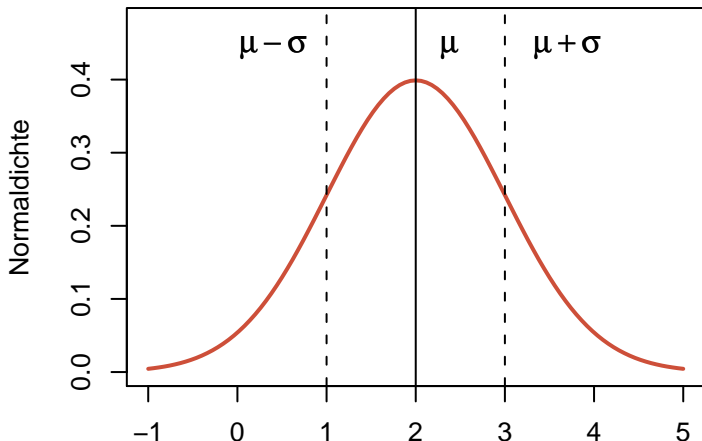


Die Verteilung von \bar{x}
hat annähernd
eine ganz bestimmte Form:
die Normalverteilung.

Dichte der Normalverteilung: $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$



Dichte der Normalverteilung: $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$



Die Normalverteilungsdichte heisst
auch *Gauß'sche Glockenkurve*

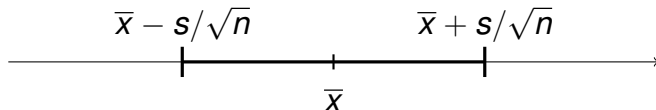
Dichte der Normalverteilung: $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$



Die Normalverteilungsdichte heisst
auch *Gauß'sche Glockenkurve*
(nach Carl Friedrich Gauß, 1777-1855)

Wichtige Folgerung

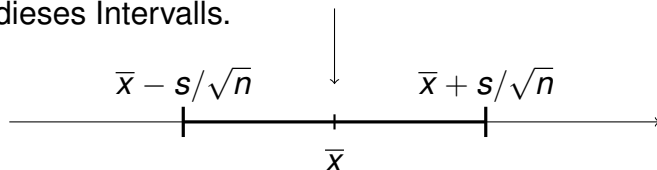
Wir betrachten das Intervall $[\bar{x} - s/\sqrt{n}, \bar{x} + s/\sqrt{n}]$



Wichtige Folgerung

Wir betrachten das Intervall $[\bar{x} - s/\sqrt{n}, \bar{x} + s/\sqrt{n}]$

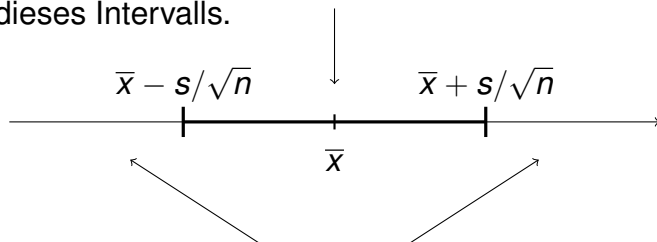
Mit Wahrscheinlichkeit ca. $2/3$ liegt μ innerhalb dieses Intervalls.



Wichtige Folgerung

Wir betrachten das Intervall $[\bar{x} - s/\sqrt{n}, \bar{x} + s/\sqrt{n}]$

Mit Wahrscheinlichkeit ca. $2/3$ liegt μ innerhalb dieses Intervalls.

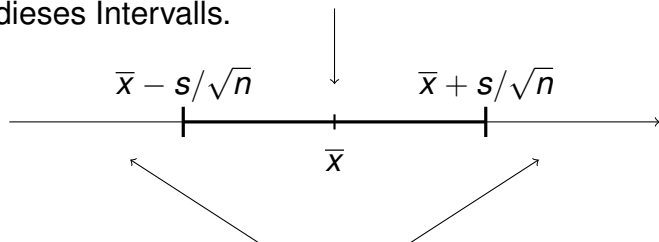


Mit Wahrscheinlichkeit ca. $1/3$ liegt μ ausserhalb des Intervalls.

Wichtige Folgerung

Wir betrachten das Intervall $[\bar{x} - s/\sqrt{n}, \bar{x} + s/\sqrt{n}]$

Mit Wahrscheinlichkeit ca. $2/3$ liegt μ innerhalb dieses Intervalls.



Mit Wahrscheinlichkeit ca. $1/3$ liegt μ ausserhalb des Intervalls.

Beachte: Das wahre μ ist unbekannt, aber nicht zufällig.

Die Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf das Verhalten von \bar{x} und s , die wir anhand der zufälligen Stichprobe berechnet haben.

Demnach:

Es kommt durchaus vor, dass \bar{x}
von μ
um mehr als
 s/\sqrt{n} abweicht.

Inhalt

- 1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
 - Mittelwert und Standardabweichung
 - Ein Beispiel zur Warnung
- 2 Der Standardfehler
 - Ein Versuch
 - Ein allgemeiner Rahmen
 - Zur Verteilung von \bar{x}
 - **Anwendungen**
 - Zusammenfassung

Anwendung 1:

Welche Werte von μ sind plausibel?

Anwendung 1: Welche Werte von μ sind plausibel?

$$\bar{x} = 0,12$$
$$s/\sqrt{n} = 0,007$$

Anwendung 1: Welche Werte von μ sind plausibel?

$$\bar{x} = 0,12$$
$$s/\sqrt{n} = 0,007$$

Frage: Könnte es sein, dass
 $\mu = 0,115$?

Antwort: Es ist gut möglich.

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{X} - \mu = 0,120 - 0,115 = 0,005.$$

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{x} - \mu = 0,120 - 0,115 = 0,005.$$

Standardfehler

$$s/\sqrt{n} = 0,007$$

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{x} - \mu = 0,120 - 0,115 = 0,005.$$

Standardfehler

$$s/\sqrt{n} = 0,007$$

Abweichungen dieser Größe
kommen häufig vor.

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{x} - \mu = 0,120 - 0,115 = 0,005.$$

Standardfehler

$$s/\sqrt{n} = 0,007$$

Abweichungen dieser Größe
kommen häufig vor.

(Die Frage, welche Abweichungen *nicht* mehr plausibel sind,
untersuchen wir im nächsten Kapitel.)

Anwendung 2: Vergleich von Mittelwerten

Anwendung 2: Vergleich von Mittelwerten

Beispiel: Eine Stichprobe von Springkrebse



Galathea: Carapaxlänge in einer Stichprobe

Männchen:

$$\bar{x}_1 = 3,04 \text{ mm}$$

$$s_1 = 0,9 \text{ mm}$$

$$n_1 = 25$$

Weibchen:

$$\bar{x}_2 = 3,23 \text{ mm}$$

$$s_2 = 0,9 \text{ mm}$$

$$n_2 = 29$$

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.
Ist das ernst zu nehmen?

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.

Ist das ernst zu nehmen?

Oder könnte es nur **Zufall** sein?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Männchen:

$$\bar{x}_1 = 3,04 \text{ mm}$$

$$s_1 = 0,9 \text{ mm}$$

$$n_1 = 25$$

$$s_1 / \sqrt{n_1} = 0,18 \text{ [mm]}$$

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Männchen:

$$\bar{x}_1 = 3,04 \text{ mm}$$

$$s_1 = 0,9 \text{ mm}$$

$$n_1 = 25$$

$$s_1 / \sqrt{n_1} = 0,18 \text{ [mm]}$$

Mit Schwankungen von

$$\pm 0,18 \text{ (mm) in } \bar{x}_1$$

müssen wir rechnen.

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Weibchen:

$$\bar{x}_2 = 3,23 \text{ mm}$$

$$s_2 = 0,9 \text{ mm}$$

$$n_2 = 29$$

$$s_2 / \sqrt{n_2} = 0,17 \text{ [mm]}$$

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Weibchen:

$$\bar{x}_2 = 3,23 \text{ mm}$$

$$s_2 = 0,9 \text{ mm}$$

$$n_2 = 29$$

$$s_2 / \sqrt{n_2} = 0,17 \text{ [mm]}$$

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass \bar{x}_2 um mehr als $\pm 0,17$ (mm) vom wahren Mittelwert abweicht.

Die Differenz der Mittelwerte

$$3,23 - 3,04 = 0,19 \text{ [mm]}$$

Die Differenz der Mittelwerte

$$3,23 - 3,04 = 0,19 \text{ [mm]}$$

ist kaum größer als
die zu erwartenden Schwankungen.

Die Differenz der Mittelwerte

$$3,23 - 3,04 = 0,19 \text{ [mm]}$$

ist kaum größer als
die zu erwartenden Schwankungen.

Es könnte also einfach **Zufall** sein,
dass

$$\bar{X}_2 > \bar{X}_1$$

Genauer formuliert:

Wenn in Wirklichkeit
die Populationsmittelwerte
gleich sind,

$$\mu_{\text{Weibchen}} = \mu_{\text{Männchen}}$$

Genauer formuliert:

Wenn in Wirklichkeit
die Populationsmittelwerte
gleich sind,

$$\mu_{\text{Weibchen}} = \mu_{\text{Männchen}}$$

kann es trotzdem leicht passieren,
dass die Stichprobenmittelwerte

$$\bar{X}_2 \text{ und } \bar{X}_1$$

so weit auseinander liegen.

Der Statistiker sagt:

Die Differenz
der Mittelwerte
ist
(statistisch)
nicht signifikant.

Der Statistiker sagt:

Die Differenz
der Mittelwerte
ist

(statistisch)

nicht signifikant.

nicht signifikant

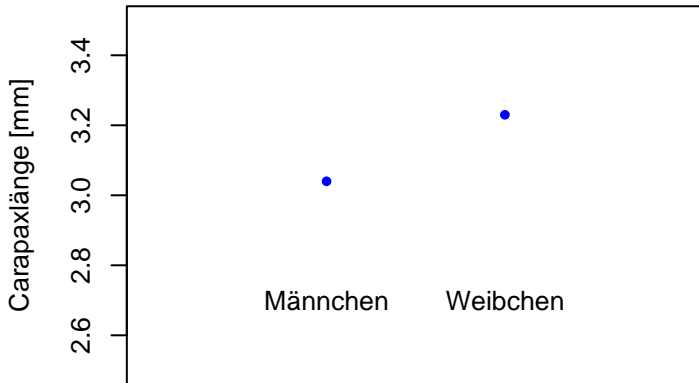
=

könnte Zufall sein

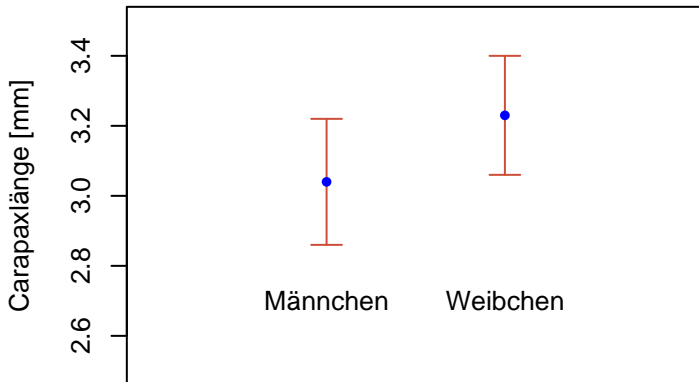
Anwendung 3:

Wenn man Mittelwerte
graphisch darstellt,
sollte man auch
ihre Genauigkeit
 $(\pm s/\sqrt{n})$
anzeigen.

Also nicht so: Carapaxlängen: Mittelwerte nach Geschlecht



sondern so:
Carapaxlängen:
Mittelwerte \pm Standardfehler nach Geschlecht



Anwendung 4:

Bei der Versuchsplanung:

Anwendung 4:

Bei der Versuchsplanung:

Wieviele Beobachtungen
brauche ich?

(Wie groß sollte n sein?)

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler s/\sqrt{n})
für \bar{x} man erreichen will,

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler s/\sqrt{n})
für \bar{x} man erreichen will,

und wenn man (aus Erfahrung oder aus
einem Vorversuch) s ungefähr kennt,

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler s/\sqrt{n})
für \bar{x} man erreichen will,

und wenn man (aus Erfahrung oder aus
einem Vorversuch) s ungefähr kennt,
dann kann man
das notwendige n ungefähr abschätzen:

$$s/\sqrt{n} = g$$

(g = gewünschter Standardfehler)

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\bar{x} = 0,18$$

$$s = 0,06$$

$$n = 13$$

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\bar{x} = 0,18$$

$$s = 0,06$$

$$n = 13$$

Nehmen wir an, der Versuch soll wiederholt
werden und man will
Standardfehler $\approx 0,01$ erreichen.

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\bar{x} = 0,18$$

$$s = 0,06$$

$$n = 13$$

Nehmen wir an, der Versuch soll wiederholt
werden und man will
Standardfehler $\approx 0,01$ erreichen.

Wie groß sollte n sein?

Lösung:

gewünscht:

$$s/\sqrt{n} \approx 0,01$$

Lösung:

gewünscht:

$$s/\sqrt{n} \approx 0,01$$

aus dem Vorversuch wissen wir:

$$s \approx 0,06,$$

Lösung:

gewünscht:

$$s/\sqrt{n} \approx 0,01$$

aus dem Vorversuch wissen wir:

$$s \approx 0,06,$$

$$\text{also } \sqrt{n} \approx 6$$

Lösung:

gewünscht:

$$s/\sqrt{n} \approx 0,01$$

aus dem Vorversuch wissen wir:

$$s \approx 0,06,$$

$$\text{also } \sqrt{n} \approx 6$$

$$n \approx 36$$

Inhalt

- 1 Ein kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
 - Mittelwert und Standardabweichung
 - Ein Beispiel zur Warnung
- 2 **Der Standardfehler**
 - Ein Versuch
 - Ein allgemeiner Rahmen
 - Zur Verteilung von \bar{x}
 - Anwendungen
 - **Zusammenfassung**

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ .

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ .
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n , mit Stichprobenmittelwert \bar{x} .

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ .
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n , mit Stichprobenmittelwert \bar{x} .
- \bar{x} ist eine Zufallsgröße

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ .
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n , mit Stichprobenmittelwert \bar{x} .
- \bar{x} ist eine Zufallsgröße mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ/\sqrt{n} .

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ .
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n , mit Stichprobenmittelwert \bar{x} .
- \bar{x} ist eine Zufallsgröße mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ/\sqrt{n} .
- Man schätzt die Standardabweichung von \bar{x} mit s/\sqrt{n} .

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ .
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n , mit Stichprobenmittelwert \bar{x} .
- \bar{x} ist eine Zufallsgröße mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ/\sqrt{n} .
- Man schätzt die Standardabweichung von \bar{x} mit s/\sqrt{n} .
- s/\sqrt{n} nennt man den **Standardfehler**.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ .
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n , mit Stichprobenmittelwert \bar{x} .
- \bar{x} ist eine Zufallsgröße mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ/\sqrt{n} .
- Man schätzt die Standardabweichung von \bar{x} mit s/\sqrt{n} .
- s/\sqrt{n} nennt man den **Standardfehler**.
- Schwankungen in \bar{x} von der Größe s/\sqrt{n} kommen häufig vor.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ .
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n , mit Stichprobenmittelwert \bar{x} .
- \bar{x} ist eine Zufallsgröße mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ/\sqrt{n} .
- Man schätzt die Standardabweichung von \bar{x} mit s/\sqrt{n} .
- s/\sqrt{n} nennt man den **Standardfehler**.
- Schwankungen in \bar{x} von der Größe s/\sqrt{n} kommen häufig vor.
Solche Schwankungen sind „**nicht signifikant**“: sie könnten Zufall sein.