Biostatistik, WS 2024/25

Handout zu Exponential- und Logarithmusfunktionen

Matthias Birkner

1.11.2025 / 8.11.2025

Zusammenfassung

Dieser Text stellt Material zum Thema Exponential- und Logarithmusfunktionen zum Selbststudium und als Anregung zur Diskussion in den Übungsgruppen zusammen (vermutlich kennen viele Teilnehmerinnen und Teilnehmer schon einiges oder sogar alles davon bereits aus der Schule, in diesem Sinne dient es auch ggfs. zur Auffrischung von Schulstoff).

Inhaltsverzeichnis

1 Exponential- und Logarithmusfunktion

1.1 Potenzen und Rechenregeln

Potenzrechenregeln Es ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}} \tag{1}$$

für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, also ist (für $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n} \tag{2}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}} \cdots \underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}}}_{n \text{ mal}} = a^{mn} \tag{3}$$

$$a^n b^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ mal}} = \underbrace{(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ mal}} = (ab)^n \tag{4}$$

Man setzt

$$a^0 := 1, \quad a^{-1} := \frac{1}{a} \tag{5}$$

damit gelten obige Rechenregeln auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.

Beispiel. $(a^{-5})^{-2} = \left((\frac{1}{a})^5 \right)^{-2} = \left(\frac{1}{a^5} \right)^{-2} = (a^5)^2 = a^{10} = a^{(-5)(-2)}$

1.2 Potenzfunktionen

Eine Funktion $a \mapsto a^n$ für $a \in \mathbb{R}$ nennt man eine *Potenzfunktion*. Siehe Abbildung 1 für Beispiele.

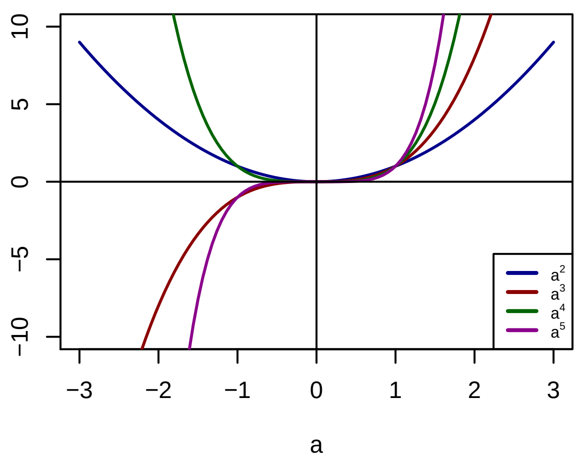

Abbildung 1: Einige Potenzfunktionen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $a \mapsto a^n$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$, d.h. $a^n > b^n$ für $a > b \geq 0$.

1.3 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen Die Umkehrfunktion von $a \mapsto a^n$ (für $a \geq 0$) ist die n-te Wurzel:

$$\sqrt[n]{b} \text{ ist dasjenige } a \text{ mit } a^n = b \tag{6}$$

Man schreibt

$$b^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{b} \tag{7}$$

(Siehe auch Abbildung 2.)

Bemerkung. Für $b < 0$ ist $b^{\frac{1}{n}}$ keine reelle Zahl (jedenfalls wenn n gerade ist).

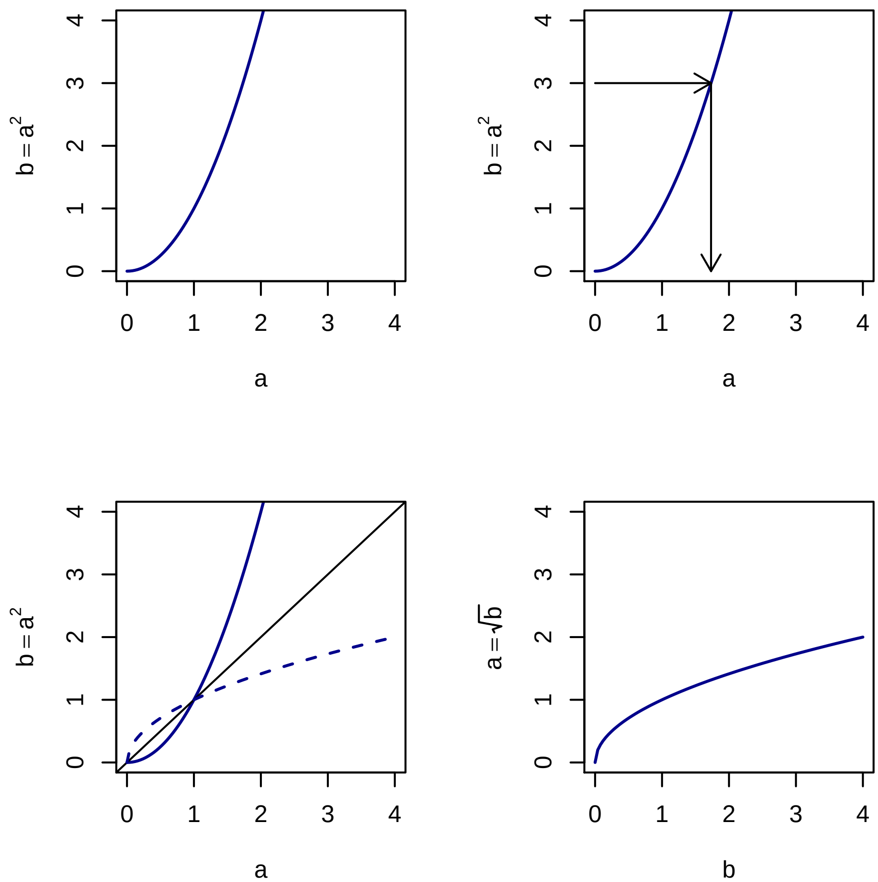

Abbildung 2: Die Umkehrfunktion von $a \mapsto a^2$ (für $a \geq 0$) ist die (Quadrat-)Wurzel): $\sqrt{b}$ ist dasjenige $a \geq 0$ mit $a^2 = b$ (im Bild: $a = 2$). Die vier Bilder zeigen auch, wie man den Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen gewinnt.

1.4 Potenzrechenregeln

Gebrochene Exponenten sind ok Betrachten wir zunächst $n \in \mathbb{N}$:

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b} \text{ ist dasjenige } a \text{ mit } a^n = b \tag{8}$$

Man setzt dann

$$b^p = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m \quad \text{für } p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \tag{9}$$

Die „alten“ Potenzrechenregeln (2), (3), (4) gelten auch, wenn man statt ganzzahliger Exponenten rationale zulässt, beispielsweise ist

$$(b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m \tag{10}$$

denn $\left(\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^{nm} = \left(\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m = (b)^m$, d.h. die rechte Seite in (10) erfüllt die Definition der linken Seite.

1.5 Exponentialfunktionen

Beispiel (Bierschaumzerfall)**.** Die Höhe der Schaumkrone in einem frisch eingeschenkten Bierglas betrage 5cm und nehme (gleichmäßig) pro Minute um 30% ab.

Zeit [Min]	0	1	2	3	4
Höhe [cm]	5	$5 \cdot 0{,}7$ $= 3{,}5$	$5 \cdot 0{,}7^2$ $= 2{,}45$	$5 \cdot 0{,}7^3$ $= 1{,}715$	$5 \cdot 0{,}7^4$ $\doteq 1{,}2$

Frage: Wie hoch ist die Schaumkrone nach 40 Sekunden?

Wir erwarten pro Sekunde eine Abnahme um den Faktor $(0{,}7)^{\frac{1}{60}}$, denn 1 Minute = 60 Sekunden und $\left((0{,}7)^{\frac{1}{60}}\right)^{60} = 0{,}7$. Demnach:

$$5 \cdot \left((0{,}7)^{\frac{1}{60}}\right)^{40} = 5 \cdot 0{,}7^{\frac{2}{3}} \doteq 3{,}94 \text{ [cm]}$$

Allgemein gilt: Die Höhe nach x Minuten ist $h(x) = 5 \cdot 0{,}7^x$ (mathematisch gesehen für $x \in \mathbb{R}$ beliebig, in dieser Anwendung ist nur $x \geq 0$ sinnvoll). Demnach ist $h(x)$ eine Exponentialfunktion.

Exponentialfunktionen (allgemein) Für $a > 0$ ist die Funktion

$$f_a(x) = a^x \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \tag{11}$$

definiert (und $f_a(x) = a^x > 0$). f_a heißt die *Exponentialfunktion* zur Basis a.

(Siehe auch Abbildungen 3 und 4 für Beispiele.)

Bemerkung. In Abschnitt 1.4 hatten wir gesehen, wie Ausdrücke der Form a^x für rationales $x \in \mathbb{Q}$ erklärt sind. In (11) sind auch $x \in \mathbb{R}$, die keine rationalen Zahlen sind – z.B. $x = \pi$ – zugelassen. Die Mathematiker sprechen von einer „stetigen Fortsetzung“ der Funktion a^x, die zunächst nur für rationale x erklärt war, auf $x \in \mathbb{R}$.

Rechenregeln für Exponentialfunktionen Aus den Potenzrechenregeln (und obiger Bemerkung) ergeben sich folgende Eigenschaften von Exponentialfunktionen: $f_a(x) = a^x$ für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

$$f_a(0) = 1, \; f_a(1) = a \tag{12}$$

$$f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \tag{13}$$

$$f_a(x) = f_{1/a}(-x) \tag{14}$$

$$f_a(-x) = \frac{1}{f_a(x)} \tag{15}$$

(Übrigens: Die drei Eigenschaften aus (12) und (13) legen die Funktion f_a eindeutig fest.)

Asymptotik der Exponentialfunktionen

1. Für $a > 1$ gilt $a < a^2 < a^3 < \ldots$ und

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \tag{16}$$

Also

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \infty \quad \text{falls} \;\; a > 1 \tag{17}$$

Wegen $f_a(-x) \cdot f_a(x) = f_a(-x+x) = f_a(0) = 1$ ist $f_a(-x) = 1/f_a(x)$. Also gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = 0 \quad \text{falls} \;\; a > 1 \tag{18}$$

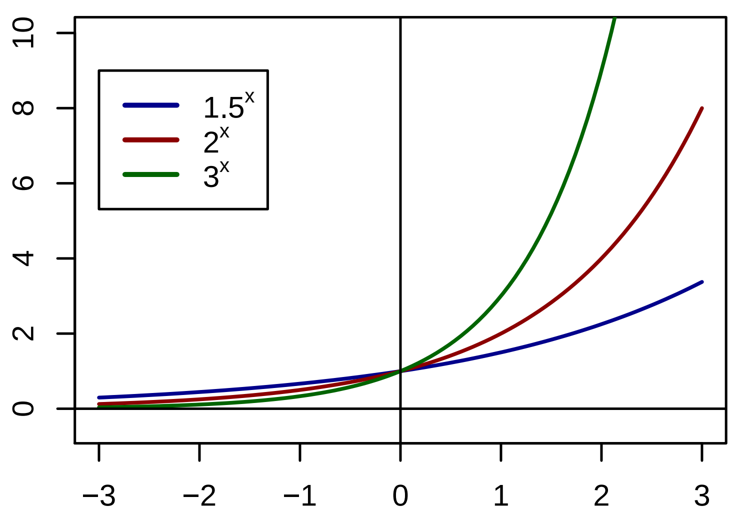

Abbildung 3: Einige Exponentialfunktionen (mit $a > 1$)

2. Für $a < 1$ gilt $a > a^2 > a^3 > \ldots$ und

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \tag{19}$$

Also

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0 \quad \text{falls} \;\; a < 1 \tag{20}$$

Wie oben gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty \quad \text{falls} \;\; a < 1 \tag{21}$$

(Dies folgt auch aus $f_a(x) = a^x = (1/a)^{-x} = f_{1/a}(-x)$.)

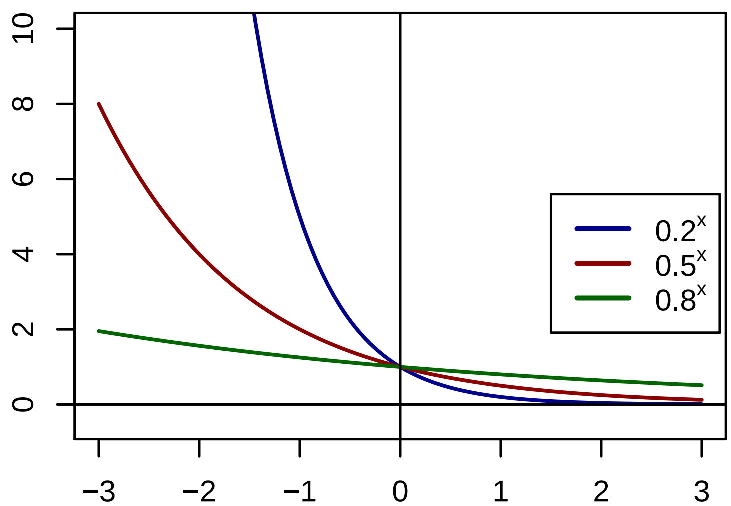

Abbildung 4: Einige Exponentialfunktionen (mit $a < 1$)

Rechenregeln für allgemeine Exponentialausdrücke Wir halten hier noch einmal die Rechenregeln für allgemeine Exponentialausdrücke fest (diese entsprechen (2)–(5), dort hatten wir allerdings in der Diskussion zunächst Einschränkungen an x und y, die m und n hießen, gemacht; sie entsprechen auch (12)–(12) in anderer Notation):

Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ (beliebig) gilt

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \tag{22}$$

$$a^0 = 1 \tag{23}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{24}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{25}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \tag{26}$$

1.6 Eulersche Zahl und „natürliche“ Exponentialfunktion

Die *Eulersche Zahl*[1]

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}718282\ldots \tag{27}$$

spielt in der Mathematik eine besondere Rolle. (In (27) ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ die *Fakultät* von n.)

Man schreibt häufig

$$e^x = \exp(x) \tag{28}$$

und nennt dies die *natürliche* Exponentialfunktion oder kurz einfach *die* Exponentialfunktion.

Man prüft leicht, z.B. mit dem Taschenrechner, dass

$$\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \doteq 2{,}71667$$

und dass

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{7} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \doteq 2{,}71825 \end{aligned}$$

gilt. Die Reihe in (27) konvergiert tatsächlich sehr schnell.

(Falls Sie Lust haben, finden Sie in Abschnitt 3 weitere Informationen und Hintergrundwissen zu e. Das Material aus Abschnitt 3 stellt eine *Ergänzung* zum Vorlesungsstoff dar, es wird nicht in der Klausur vorkommen.)

1.7 Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktion(en): Umkehrung von Exponentialfunktion(en) Sei $a > 1$ und $y > 0$. Wir wollen

$$f_a(x) = a^x = y \tag{29}$$

nach x auflösen. Wir wissen: $a^x \to 0$, falls $x \to -\infty$ und $a^x \to \infty$, falls $x \to \infty$. Also gibt es eine Lösung von (29).

Wir nennen die Lösung x aus (29) den *Logarithmus von y zur Basis a* und schreiben

$$x = \log_a(y) \tag{30}$$

Es gilt also

$$a^{\log_a(y)} = y \quad \text{für jedes } \ y > 0 \tag{31}$$

[1] nach dem Mathematiker Leonhard Euler, 1707–1783, benannt

Andererseits ist

$$\log_a(a^x) = \log_a(y) = x \quad \text{für jedes } \ x \in \mathbb{R} \tag{32}$$

Demnach: $\log_a$ ist die *Umkehrfunktion* von f_a.

(Analog wird $\log_a$ für $0 < a < 1$ definiert.)

Beispiel. $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$.

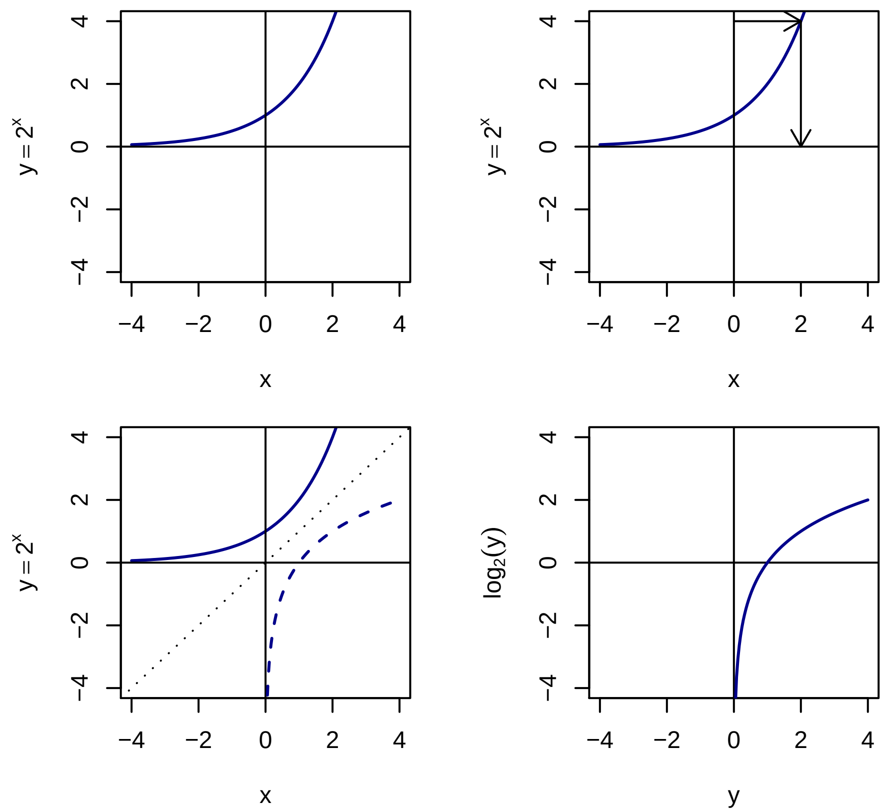

Abbildung 5: Die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$ (für $a \geq 0$) ist der Logarithmus (zur Basis a): $\log_a y$ ist dasjenige x mit $a^x = y$ (im Bild: $a = 2$). Die vier Bilder zeigen auch, wie man den Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen gewinnt.

Rechenregeln für Logarithmen Für $a > 0$ $(a \neq 1)$ gilt

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y), \quad x, y > 0 \tag{33}$$

$$\log_a\left(\tfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x), \quad x > 0 \tag{34}$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x), \quad x > 0, y \in \mathbb{R} \tag{35}$$

denn beispielsweise

$$a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y,$$

gemäß (22), d.h. die linke Seite von (33) erfüllt die Definition der rechten Seite.

Weiter ist

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1 \tag{36}$$

Natürlicher Logarithmus Für $a = e = 2{,}718\ldots$ die Euler'sche Zahl aus (27) nennt man

$$\ln = \log = \log_e$$

den *natürlichen Logarithmus*. Dies ist die Umkehrfunktion zur natürlichen Exponentialfunktion exp aus (28).

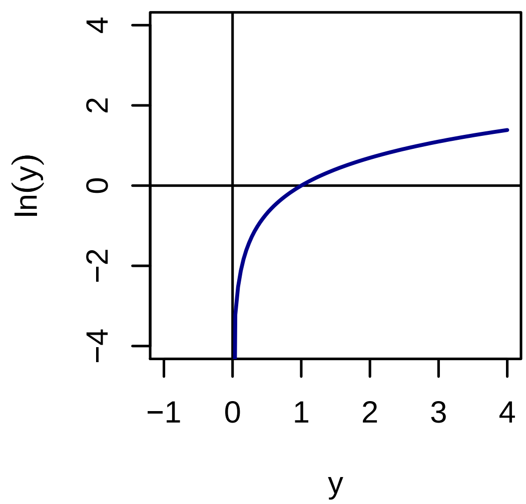

Abbildung 6: Die natürliche Logarithmusfunktion ln. Für $y \downarrow 0$ gilt $\ln(y) \downarrow -\infty$, für $y \to \infty$ gilt $\ln(y) \to \infty$.

Bemerkung (Umrechnung der Basis)**.** Für $a, b > 1$ und $x > 0$ gilt

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \tag{37}$$

denn $b = a^{\log_a(b)}$, also $b^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(b)\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(x)} = x$.

In der „Praxis" häufige Basen sind 10, 2 und $e = 2{,}718282...$ (die Eulersche Zahl aus (27), man schreibt oft $\ln(x)$ für $\log_e(x)$). Insbesondere also

$$\ln(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)} \qquad \big(\log_{10}(e) = 0{,}4342945...\big) \tag{38}$$

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \qquad \big(\ln(10) = \tfrac{1}{\log_{10}(e)} = 2{,}302585...\big) \tag{39}$$

$$\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)} \qquad \big(\log_{10}(2) = 0{,}30103...\big) \tag{40}$$

2 Anwendungsbeispiel: Exponentielles Wachstum

Wir betrachten eine Population – von Tieren oder Pflanzen, sagen wir –, deren Mitglieder sich frei und ohne gegenseitige Beeinträchtigung vermehren.

Sei

$$N(t) = \text{Populationsgröße zur Zeit } t$$

wir nehmen das folgende (mathematische) Modell für deren Verhalten an:

$$N(t) = N(0)e^{\alpha t} \quad \text{für } t \geq 0 \tag{41}$$

Man mennt α den Wachstumsparameter oder „Malthus'schen Parameter“ (nach Thomas Robert Malthus, 1766–1834, der solche Populationen in seinem einflussreichen Buch *An Essay on the Principle of Population*, 1798 beschrieb).

Es ist

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N(0)\frac{e^{\alpha(t+h)} - e^{\alpha t}}{h} = N(0)e^{\alpha t}\frac{e^{\alpha h} - 1}{h} \approx \alpha N(t) \tag{42}$$

(sofern h klein), d.h. die Änderung der Populationsgröße ist proportional zur aktuellen Anzahl (mit Proportionalitätsfaktor α).

Das Modell (41) ist plausibel, wenn $N(0)$ (halbwegs) groß und es keine Ressourcenbeschränkung gibt.

Beispiel. Eine Hefekultur bestehe zur Zeit $t = 0$ [h] aus 1000 Zellen, $\alpha = 0{,}17$

- Wieviele Zellen enthält die Kultur nach 2 Stunden?

  $N(2) = 1000 \cdot e^{0{,}17 \cdot 2} \doteq 1405$

- Wie lange dauert es, bis sich die Kultur verdoppelt hat?

  Bestimme t_2 so, dass $N(t_2) = N(0)e^{0{,}17 \cdot t_2} = 2N(0)$ gilt,

  d.h. $e^{0{,}17 \cdot t_2} = 2$ oder $t_2 = \frac{\ln(2)}{0{,}17} \doteq 4{,}1$ [h].

- Beachte: Im Modell bestünde die Kultur nach 20 Tagen aus $1000 \cdot e^{0{,}17 \cdot 24 \cdot 20} \doteq 2{,}744 \cdot 10^{38}$ Zellen.

  Bei einem mittleren Gewicht von $7{,}9 \cdot 10^{-11}$g pro Zelle[2] wöge sie also ca. $2{,}744 \cdot 10^{38} \cdot 7{,}9 \cdot 10^{-11} \doteq 2{,}168 \cdot 10^{28}$ g

  Zum Vergleich: Die Masse der Erde beträgt ca. $5{,}972 \cdot 10^{27}$g (und das Modell ist in diesem Bereich sinnlos).

[2] Samir A. Haddad and Carl C. Lindegren, A Method for Determining the Weight of an Individual Yeast Cell, Appl. Microbiol. 1(3):153–156, (1953).

3 Ergänzung: Mehr zur Eulerschen Zahl und die „natürliche“ Exponentialfunktion

Das Material in diesem Abschnitt stellt eine *Ergänzung* zum Vorlesungsstoff dar, das ich neugierigen Leserinnen und Lesern gerne ans Herz lege, speziell wenn sie sich für mathematische Hintergründe und Details interessieren. Es wird aber nicht in der Klausur vorkommen.

Was ist so bemerkenswert an e? Die Eulersche Zahl

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}718282\ldots$$

hatten wir in (27) definiert.

(Taylor-)Reihe der Exponentialfunktion („Exponentialreihe“) Betrachten wir die Funktion

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{43}$$

Man kürzt ab $n! := 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$ (sprich: „n-Fakultät“) und vereinbart $0! := 1$, z.B. $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, \ldots$, also

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{44}$$

(somit ist $e = \exp(1) = e^1$).

Geometrische Summenformel Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $a \neq 1$ ist

$$1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \tag{45}$$

denn

$$(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n)\cdot(1 - a) \tag{46}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + a + a^2 + a^3 \cdots + a^{n-1} + a^n \\ &\qquad - a - a^2 - a^3 - a^4 - \cdots - a^n - a^{n+1} = 1 - a^{n+1} \end{aligned} \tag{47}$$

Geometrische Reihe Für $|a| < 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots \tag{48}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n\right) \tag{49}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \tag{50}$$

(Für $|a| \geq 1$ konvergiert die Reihe nicht.)

Warum konvergiert die Exponentialreihe?

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{51}$$

Betrachte Quotienten aufeinanderfolgender Summanden:

$$\frac{\frac{x^1}{1!}}{\frac{x^0}{0!}} = \frac{x}{1}, \quad \frac{\frac{x^2}{2!}}{\frac{x^1}{1!}} = \frac{1!}{2!}x = \frac{x}{2}, \quad \frac{\frac{x^3}{3!}}{\frac{x^2}{2!}} = \frac{2!}{3!}x = \frac{x}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!}x = \frac{x}{n}, \quad \ldots \tag{52}$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $2n_0 - 1 < |x| \leq 2n_0$, dann ist für $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \underbrace{\left|\frac{\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}}{\frac{x^{n_0}}{n_0!}}\right| \cdot \left|\frac{\frac{x^{n_0+2}}{(n_0+2)!}}{\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}}\right| \cdot \cdots \cdot \left|\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\right|}_{n-n_0 \text{ Faktoren, jeder } \leq \frac{1}{2}} \leq \left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 2^{n_0}\left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{53}$$

Also

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq 2^{n_0}\left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty \tag{54}$$

Bemerkung. Wir haben gerade das sogenannte Quotientenkriterium benutzt/bewiesen.

Die Funktion exp **ist ihre eigene Ableitung** Erinnerung/Vorschau[3] an die Ableitung (Steigung einer Funktion): für $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = nx^{n-1}$.

Wenn summandenweises Ableiten erlaubt ist (was hier der Fall ist):

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)' \\ &= 0 + \frac{1x^0}{1!} + \frac{2x^1}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots \\ &= 0 + 1 + \frac{2x^1}{2 \cdot 1!} + \frac{3x^2}{3 \cdot 2!} + \frac{4x^3}{4 \cdot 3!} + \cdots \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \exp(x) \end{aligned} \tag{55}$$

Dies ist der Grund, warum $e^x = \exp(x)$ die „natürlichste“ Exponentialfunktion ist, ihre Umkehrfunktion heißt daher auch „natürlicher Logarithmus“.

[3] Wir kommen in der Vorlesung darauf zurück.