Biostatistik

2. Exponential- und Logarithmusfunktionen

Matthias Birkner

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Inhalt

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$,

also ist ($m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$):

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

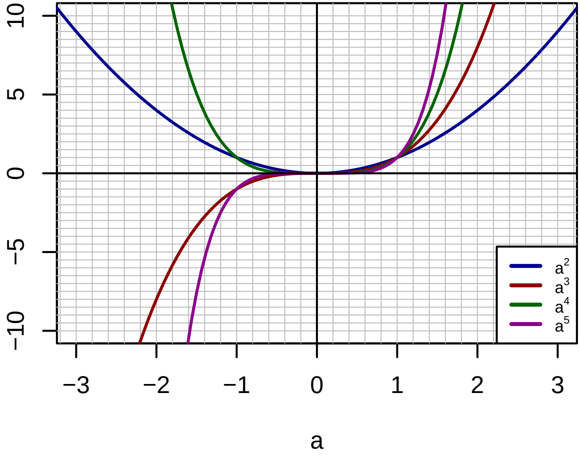
$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}} \cdots \underbrace{(a \cdots a)}_{m \text{ mal}}}_{n \text{ mal}} = a^{mn}$$

$$a^n b^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ mal}} = \underbrace{(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ mal}} = (ab)^n$$

Man setzt $a^0 := 1$, $a^{-1} := \frac{1}{a}$, damit gelten obige Rechenregeln auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.

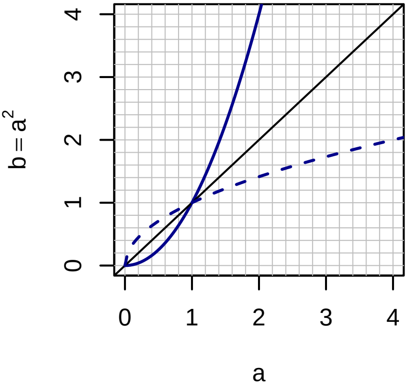
Bsp.: $(a^{-5})^{-2} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^5 \right)^{-2} = \left(\frac{1}{a^5} \right)^{-2} = (a^5)^2 = a^{10} = a^{(-5)(-2)}$

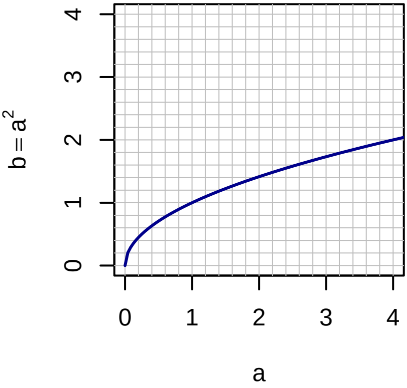
Potenzfunktionen



Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $a \mapsto a^n$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$, d.h. $a^n > b^n$ für $a > b \geq 0$.

Wurzelfunktionen





Die Umkehrfunktion von $a \mapsto a^n$ (für $a \geq 0$) ist die n-te Wurzel:
$\sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Man schreibt $b^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{b}$.

Bem.: Für $b < 0$ ist $b^{\frac{1}{n}}$ keine reelle Zahl (jedenfalls wenn n gerade ist).

Potenzrechenregeln: Gebrochene Exponenten sind ok

$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Für $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ setzt man $b^p = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$

Die „alten“ Potenzrechenregeln gelten weiter, wenn man statt ganzzahliger Exponenten rationale zulässt, beispielsweise ist

$$(*) \qquad (b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

denn $\left(\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^{nm} = \left(\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m = (b)^m$,

d.h. die rechte Seite in $(*)$ erfüllt die Definition der linken Seite.

Exponentialfunktionen (Motivation)

Erinnerung:
Geometrische Folgen: $1 = a^0, a = a^1, a^2, a^3, \ldots$ (mit einem $a > 0$)

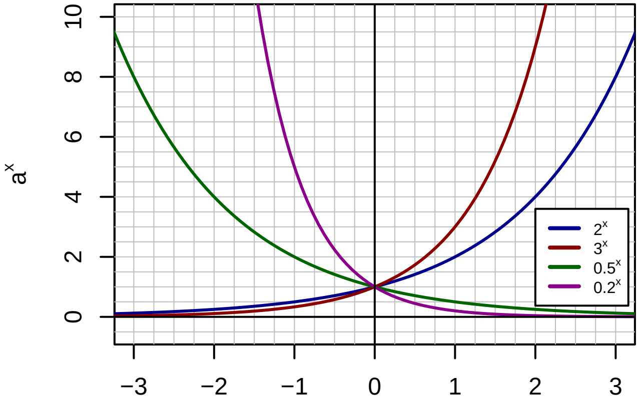
Beispiel: Die Höhe der Schaumkrone in einem frisch eingeschenkten Bierglas betrage 5cm und nehme (gleichmäßig) pro Minute um 30% ab.

Zeit [Min]	0	1	2	3	4
Höhe [cm]	5	$5 \cdot 0{,}7$ $= 3{,}5$	$5 \cdot 0{,}7^2$ $= 2{,}45$	$5 \cdot 0{,}7^3$ $= 1{,}715$	$5 \cdot 0{,}7^4$ $\doteq 1{,}2$

Frage: Wie hoch ist die Schaumkrone nach 40 Sekunden?
Wir erwarten pro Sekunde eine Abnahme um den Faktor $(0{,}7)^{\frac{1}{60}}$, denn 1 Minute = 60 Sekunden und $\left((0{,}7)^{\frac{1}{60}}\right)^{60} = 0{,}7$.
Demnach: $5 \cdot \left((0{,}7)^{\frac{1}{60}}\right)^{40} = 5 \cdot 0{,}7^{\frac{2}{3}} \doteq 3{,}94$ [cm].
Allgemein: Höhe nach x Minuten: $h(x) = 5 \cdot 0{,}7^x$
(für $x \in \mathbb{R}$ beliebig, in dieser Anwendung ist nur $x \geq 0$ sinnvoll)

Exponentialfunktionen

Für $a > 0$ ist die Funktion $f(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert (und $a^x > 0$).



a^x ist monoton wachsend für $a > 1$, fallend für $a < 1$.

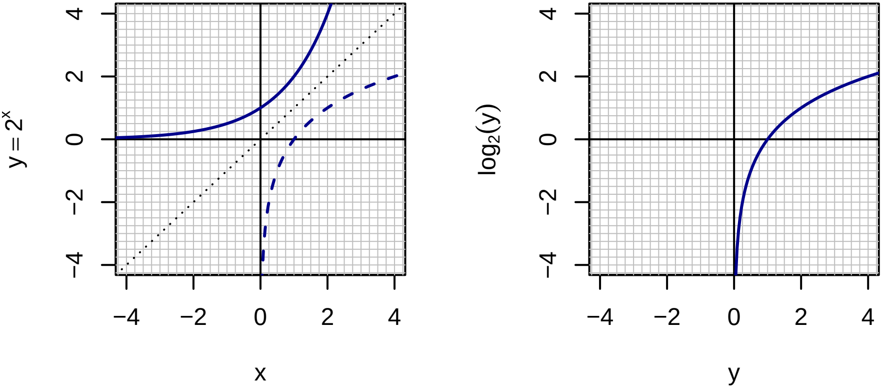
Bemerkung: Die Mathematiker sprechen von einer „stetigen Fortsetzung“ der Funktion a^x, die zunächst nur für rationale x erklärt war, auf $x \in \mathbb{R}$.

Rechenregeln für allgemeine Exponentialausdrücke

Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ (beliebig) gilt

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ a^0 &= 1 \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ a^x b^x &= (ab)^x \end{aligned}$$

Logarithmusfunktion(en) als Umkehrung von Exponentialfunktion(en)



Die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$ (für $a \geq 0$) ist der Logarithmus (zur Basis a): $\log_a y$ ist dasjenige x mit $a^x = y$

Beispiel: $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$

Logarithmus: Rechenregeln

Für $a > 0$ gilt

$$(*) \qquad \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y), \quad x, y > 0$$

$$\log_a\left(\tfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x), \quad x > 0$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x), \quad x > 0, y \in \mathbb{R}$$

denn beispielsweise

$$a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y,$$

d.h. die linke Seite von $(*)$ erfüllt die Definition der rechten Seite.

Bemerkung (Umrechnung der Basis): $a, b > 0, x > 0$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

denn $b = a^{\log_a(b)}$, also $b^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(b)\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(x)} = x$

Umrechnung der Basis

Für $a, b > 0, x > 0$ gilt

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

In der „Praxis“ häufige Basen sind 10, 2 und $e = 2{,}718282...$ (die sog. Eulersche Zahl, man schreibt auch $\ln(x)$ für $\log_e(x)$).

Insbesondere also

$$\ln(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)} \qquad \left(\log_{10}(e) = 0{,}4342945...\right)$$

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \qquad \left(\ln(10) = \frac{1}{\log_{10}(e)} = 2{,}302585...\right)$$

$$\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)} \qquad \left(\log_{10}(2) = 0{,}30103...\right)$$

Eulersche Zahl und natürlicher Logarithmus

Leonhard Euler, 1707–1783

Die *Eulersche Zahl*

$$e = e^1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718282\ldots$$

spielt in der Mathematik eine besondere Rolle.

Man schreibt häufig $e^x = \exp(x)$ und
nennt dies *die* Exponentialfunktion.

Ihre Umkehrfunktion, $\log_e(x)$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird oft $\ln(x)$ geschrieben
(manchmal in der Literatur auch einfach nur $\log(x)$).

(Wir werden später genauer sehen, was so bemerkenswert „natürlich“ an $e = \exp(1)$ ist.)

Eulersche Zahl

Es gilt auch

$$
\begin{aligned}
e = e^1 &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

wobei $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ (sprich: „n-Fakultät“), mit Vereinbarung $0! := 1$.

Eulersche Zahl

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (*)$$

Man prüft leicht, z.B. mit dem Taschenrechner, dass

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \doteq 2{,}71667\end{aligned}$$

und dass

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{7} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \doteq 2{,}71825\end{aligned}$$

gilt. Die Reihe in $(*)$ konvergiert tatsächlich sehr schnell.

Exponentielles Wachstum, „Malthusscher Parameter“

Thomas Robert Malthus
1766–1834

An Essay on the Principle of Population, 1798

$N(t)$ = Populationsgröße zur Zeit t

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

α = Wachstumsparameter oder „Malthusscher Parameter“,

es ist $\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = N(0)\frac{e^{\alpha(t+h)}-e^{\alpha t}}{h} = N(0)e^{\alpha t}\frac{e^{\alpha h}-1}{h} \approx \alpha N(t)$ (sofern h klein), d.h. Änderung ist proportional zur aktuellen Anzahl.

Modell plausibel, wenn $N(0)$ (halbwegs) groß und es keine Ressourcenbeschränkung gibt.

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

Beispiel: Eine Hefekultur bestehe zur Zeit $t = 0$ [h] aus 1000 Zellen, $\alpha = 0{,}17$

- Wieviele Zellen enthält die Kultur nach 2 Stunden?
  $N(2) = 1000 \cdot e^{0{,}17 \cdot 2} \doteq 1405$
- Wie lange dauert es, bis sich die Kultur verdoppelt hat?
  Bestimme t_2 so, dass $N(t_2) = N(0)e^{0{,}17 \cdot t_2} = 2N(0)$ gilt,
  d.h. $e^{0{,}17 \cdot t_2} = 2$ oder $t_2 = \frac{\ln(2)}{0{,}17} \doteq 4{,}1$ [h].
- Beachte: Im Modell bestünde die Kultur nach 20 Tagen aus $1000 \cdot e^{0{,}17 \cdot 24 \cdot 20} \doteq 2{,}744 \cdot 10^{38}$ Zellen.
  Bei einem mittleren Gewicht von $7{,}9 \cdot 10^{-11}$g pro Zelle[‡]
  wöge sie also ca. $2{,}744 \cdot 10^{38} \cdot 7{,}9 \cdot 10^{-11} \doteq 2{,}168 \cdot 10^{28}$ g
  Zum Vergleich: Die Masse der Erde beträgt ca. $5{,}972 \cdot 10^{27}$g (und das Modell ist in diesem Bereich sinnlos).

‡ Samir A. Haddad and Carl C. Lindegren, A Method for Determining the Weight of an Individual Yeast Cell, Appl. Microbiol. 1(3):153–156, (1953).

Was ist so bemerkenswert an *e*?

Eulersche Zahl $e \doteq 2{,}718282...$

(Taylor-)Reihe der Exponentialfunktion („Exponentialreihe“)

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots$$

man kürzt ab $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ (sprich: „*n*-Fakultät“) und vereinbart $0! := 1$, z.B.

$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, \ldots$, also

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exkurs:

Geometrische Summenformel: Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $a \neq 1$ ist

$1 + a + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, denn

$$
\begin{aligned}
&(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n) \cdot (1 - a) \\
&= 1 + a + a^2 + a^3 \cdots + a^{n-1} + a^n \\
&\qquad - a - a^2 - a^3 - a^4 - \cdots - a^n - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}
\end{aligned}
$$

Geometrische Reihe: Für $|a| < 1$ ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a^n &= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}
\end{aligned}
$$

(Für $|a| \geq 1$ konvergiert die Reihe nicht.)

Exkurs: Warum konvergiert die Exponentialreihe?

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Betrachte Quotienten aufeinanderfolgender Summanden: $\frac{\frac{x^1}{1!}}{\frac{x^0}{0!}} = \frac{x}{1}$,

$$\frac{\frac{x^2}{2!}}{\frac{x^1}{1!}} = \frac{1!}{2!}x = \frac{x}{2},\ \frac{\frac{x^3}{3!}}{\frac{x^2}{2!}} = \frac{2!}{3!}x = \frac{x}{3},\ \ldots,\ \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!}x = \frac{x}{n},\ \ldots$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 - 1 < 2|x| \leq n_0$, dann ist für $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \underbrace{\left|\frac{\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}}{\frac{x^{n_0}}{n_0!}}\right| \cdot \left|\frac{\frac{x^{n_0+2}}{(n_0+2)!}}{\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}}\right| \cdot \cdots \cdot \left|\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}\right|}_{n-n_0 \text{ Faktoren, jeder } \leq \frac{1}{2}} \leq \left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 2^{n_0}\left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Also (Bem.: Wir haben gerade das Quotientenkriterium benutzt/bewiesen.)

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq 2^{n_0}\left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$$

exp ist seine eigene Ableitung

Erinnerung/Vorschau: Ableitung (Steigung einer Funktion)
$f(x) = x^n$, so ist $f'(x) = nx^{n-1}$

Wenn summandenweises Ableiten erlaubt ist (was hier der Fall ist):

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)' \\
&= 0 + \frac{1x^0}{1!} + \frac{2x^1}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots \\
&= 0 + 1 + \frac{2x^1}{2 \cdot 1!} + \frac{3x^2}{3 \cdot 2!} + \frac{4x^3}{4 \cdot 3!} + \cdots \\
&= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \exp(x)
\end{aligned}$$

Dies ist der Grund, warum $e^x = \exp(x)$ die „natürlichste“ Exponentialfunktion ist, ihre Umkehrfunktion heißt daher auch „natürlicher Logarithmus“.)

Leonhard Euler, 1707–1783