

Biostatistik

2. Exponential- und Logarithmusfunktionen

Matthias Birkner



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

- 1 Exponential- und Logarithmusfunktion
 - Potenzen und Rechenregeln
 - Anwendung: exponentielles Wachstum
 - Ergänzung: Mehr zur Eulerschen Zahl und „natürliche“ Exponentialfunktion

Potenzrechenregeln

Es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$,

also ist $(m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0)$:

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$$

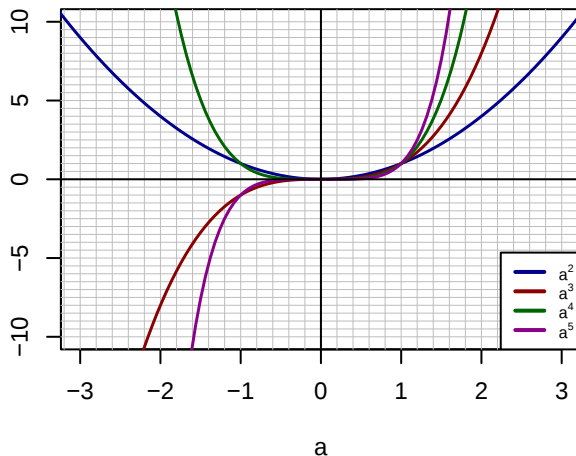
$$(a^m)^n = \underbrace{(\underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}})}_{m \text{ mal}} \cdots (\underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}})_{n \text{ mal}} = a^{mn}$$

$$a^n b^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ mal}} = \underbrace{(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ mal}} = (ab)^n$$

Man setzt $a^0 := 1$, $a^{-1} := \frac{1}{a}$, damit gelten obige Rechenregeln auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.

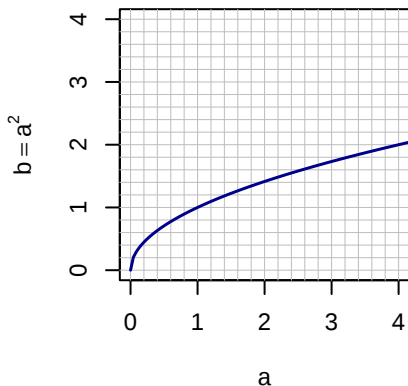
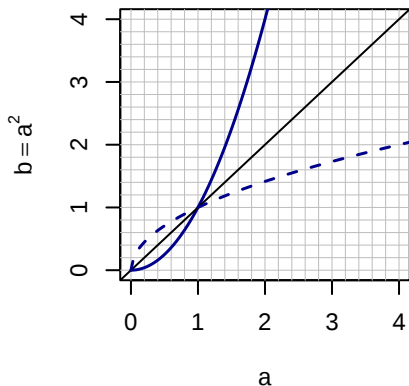
$$\text{Bsp.: } (a^{-5})^{-2} = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^5 \right)^{-2} = \left(\frac{1}{a^5} \right)^{-2} = (a^5)^2 = a^{10} = a^{(-5)(-2)}$$

Potenzfunktionen



Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $a \mapsto a^n$ streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$, d.h. $a^n > b^n$ für $a > b \geq 0$.

Wurzelfunktionen



Die Umkehrfunktion von $a \mapsto a^n$ (für $a \geq 0$) ist die n -te Wurzel:
 $\sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Man schreibt $b^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{b}$.

Bem.: Für $b < 0$ ist $b^{\frac{1}{n}}$ keine reelle Zahl (jedenfalls wenn n gerade ist).

Potenzrechenregeln: Gebrochene Exponenten sind ok

$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ist dasjenige a mit $a^n = b$

Für $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ setzt man $b^p = (b^{\frac{1}{n}})^m$

Die „alten“ Potenzrechenregeln gelten weiter, wenn man statt ganzzahliger Exponenten rationale zulässt, beispielsweise ist

$$(*) \quad (b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}} = (b^{\frac{1}{n}})^m,$$

denn $((b^{\frac{1}{n}})^m)^n = (b^{\frac{1}{n}})^{nm} = ((b^{\frac{1}{n}})^n)^m = (b)^m,$

d.h. die rechte Seite in $(*)$ erfüllt die Definition der linken Seite.

Exponentialfunktionen (Motivation)

Erinnerung:

Geometrische Folgen: $1 = a^0, a = a^1, a^2, a^3, \dots$ (mit einem $a > 0$)

Beispiel: Die Höhe der Schaumkrone in einem frisch eingeschenkten Bierglas betrage 5cm und nehme (gleichmäßig) pro Minute um 30% ab.

Zeit [Min]	0	1	2	3	4
Höhe [cm]	5	$5 \cdot 0,7$ $= 3,5$	$5 \cdot 0,7^2$ $= 2,45$	$5 \cdot 0,7^3$ $= 1,715$	$5 \cdot 0,7^4$ $\doteq 1,2$



Frage: Wie hoch ist die Schaumkrone nach 40 Sekunden?

Wir erwarten pro Sekunde eine Abnahme um den Faktor $(0,7)^{\frac{1}{60}}$, denn 1 Minute = 60 Sekunden und $((0,7)^{\frac{1}{60}})^{60} = 0,7$.

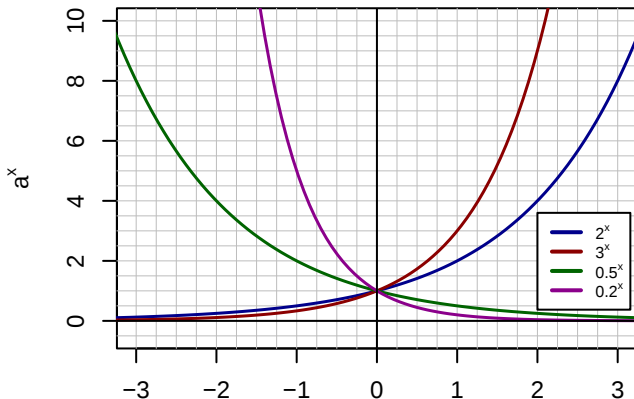
Demnach: $5 \cdot ((0,7)^{\frac{1}{60}})^{40} = 5 \cdot 0,7^{\frac{2}{3}} \doteq 3,94$ [cm].

Allgemein: Höhe nach x Minuten: $h(x) = 5 \cdot 0,7^x$

(für $x \in \mathbb{R}$ beliebig, in dieser Anwendung ist nur $x \geq 0$ sinnvoll)

Exponentialfunktionen

Für $a > 0$ ist die Funktion $f(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert (und $a^x > 0$).



a^x ist monoton wachsend für $a > 1$, fallend für $a < 1$.

Bemerkung: Die Mathematiker sprechen von einer „stetigen Fortsetzung“ der Funktion a^x , die zunächst nur für rationale x erklärt war, auf $x \in \mathbb{R}$.

Rechenregeln für allgemeine Exponentialausdrücke

Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ (beliebig) gilt

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

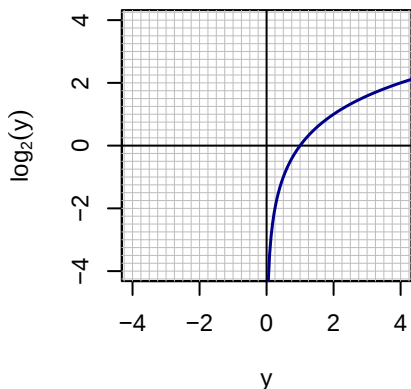
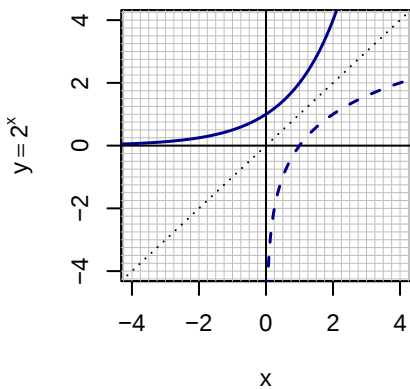
$$a^0 = 1$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

Logarithmusfunktion(en) als Umkehrung von Exponentialfunktion(en)



Die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$ (für $a \geq 0$) ist der Logarithmus (zur Basis a): $\log_a y$ ist dasjenige x mit $a^x = y$

Beispiel: $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$

Logarithmus: Rechenregeln

Für $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} (*) \quad \log_a(x) + \log_a(y) &= \log_a(x \cdot y), \quad x, y > 0 \\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_a(x), \quad x > 0 \\ \log_a(x^y) &= y \log_a(x), \quad x > 0, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

denn beispielsweise

$$a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y,$$

d.h. die linke Seite von $(*)$ erfüllt die Definition der rechten Seite.

Bemerkung (Umrechnung der Basis): $a, b > 0, x > 0$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

denn $b = a^{\log_a(b)}$, also $b^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(b) \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(x)} = x$

Umrechnung der Basis

Für $a, b > 0, x > 0$ gilt

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

In der „Praxis“ häufige Basen sind 10, 2 und $e = 2,718282\dots$
(die sog. Eulersche Zahl, man schreibt auch $\ln(x)$ für $\log_e(x)$).

Insbesondere also

$$\ln(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)} \quad (\log_{10}(e) = 0,4342945\dots)$$

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \quad (\ln(10) = \frac{1}{\log_{10}(e)} = 2,302585\dots)$$

$$\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)} \quad (\log_{10}(2) = 0,30103\dots)$$

Eulersche Zahl und natürlicher Logarithmus



Leonhard Euler, 1707–1783

Die *Eulersche Zahl*

$$e = e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718282\dots$$

spielt in der Mathematik eine besondere Rolle.

Man schreibt häufig $e^x = \exp(x)$ und nennt dies *die* Exponentialfunktion.

Ihre Umkehrfunktion, $\log_e(x)$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird oft $\ln(x)$ geschrieben (manchmal in der Literatur auch einfach nur $\log(x)$).

(Wir werden später genauer sehen, was so bemerkenswert „natürlich“ an $e = \exp(1)$ ist.)

Eulersche Zahl

Es gilt auch

$$\begin{aligned} e = e^1 &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

wobei $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (sprich: „ n -Fakultät“), mit Vereinbarung $0! := 1$.

Eulersche Zahl

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (*)$$

Man prüft leicht, z.B. mit dem Taschenrechner, dass

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \doteq 2,71667 \end{aligned}$$

und dass

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^7 \frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \doteq 2,71825 \end{aligned}$$

gilt. Die Reihe in (*) konvergiert tatsächlich sehr schnell.

Exponentielles Wachstum, „Malthusscher Parameter“



Thomas Robert Malthus
1766–1834

An Essay on the Principle of Population, 1798

$N(t)$ = Populationsgröße zur Zeit t

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

α = Wachstumsparameter oder „Malthusscher Parameter“,

es ist $\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = N(0) \frac{e^{\alpha(t+h)} - e^{\alpha t}}{h} = N(0) e^{\alpha t} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} \approx \alpha N(t)$
(sofern h klein), d.h. Änderung ist proportional zur aktuellen Anzahl.

Modell plausibel, wenn $N(0)$ (halbwegs) groß und es keine Ressourcenbeschränkung gibt.

Modell: $N(t) = N(0)e^{\alpha t}$

Beispiel: Eine Hefekultur bestehe zur Zeit $t = 0$ [h] aus 1000 Zellen, $\alpha = 0,17$

- Wieviele Zellen enthält die Kultur nach 2 Stunden?
 $N(2) = 1000 \cdot e^{0,17 \cdot 2} \doteq 1405$
- Wie lange dauert es, bis sich die Kultur verdoppelt hat?
Bestimme t_2 so, dass $N(t_2) = N(0)e^{0,17 \cdot t_2} = 2N(0)$ gilt,
d.h. $e^{0,17 \cdot t_2} = 2$ oder $t_2 = \frac{\ln(2)}{0,17} \doteq 4,1$ [h].
- Beachte: Im Modell bestünde die Kultur nach 20 Tagen aus $1000 \cdot e^{0,17 \cdot 24 \cdot 20} \doteq 2,744 \cdot 10^{38}$ Zellen.

Bei einem mittleren Gewicht von $7,9 \cdot 10^{-11}$ g pro Zelle[‡]
wöge sie also ca. $2,744 \cdot 10^{38} \cdot 7,9 \cdot 10^{-11} \doteq 2,168 \cdot 10^{28}$ g
Zum Vergleich: Die Masse der Erde beträgt ca. $5,972 \cdot 10^{27}$ g
(und das Modell ist in diesem Bereich sinnlos).

[‡] Samir A. Haddad and Carl C. Lindegren, A Method for Determining the Weight of an Individual Yeast Cell, Appl. Microbiol. 1(3):153–156, (1953).

Was ist so bemerkenswert an e ?

Eulersche Zahl $e \doteq 2,718282\dots$

(Taylor-)Reihe der Exponentialfunktion („Exponentialreihe“)

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots$$

man kürzt ab $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (sprich: „ n -Fakultät“) und vereinbart $0! := 1$, z.B.

$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, \dots$, also

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exkurs:

Geometrische Summenformel: Für $n = 1, 2, 3, \dots$ und $a \neq 1$ ist

$$1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \text{ denn}$$

$$\begin{aligned} & (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n) \cdot (1 - a) \\ &= 1 + a + a^2 + a^3 \dots + a^{n-1} + a^n \\ &\quad - a - a^2 - a^3 - a^4 - \dots - a^n - a^{n+1} = 1 - a^{n+1} \end{aligned}$$

Geometrische Reihe: Für $|a| < 1$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a^n &= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \end{aligned}$$

(Für $|a| \geq 1$ konvergiert die Reihe nicht.)

Exkurs: Warum konvergiert die Exponentialreihe?

$$\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Betrachte Quotienten aufeinanderfolgender Summanden: $\frac{\frac{x^1}{1!}}{\frac{x^0}{0!}} = \frac{x}{1}$,

$$\frac{\frac{x^2}{2!}}{\frac{x^1}{1!}} = \frac{1!}{2!}x = \frac{x}{2}, \quad \frac{\frac{x^3}{3!}}{\frac{x^2}{2!}} = \frac{2!}{3!}x = \frac{x}{3}, \dots, \quad \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!}x = \frac{x}{n}, \dots$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 - 1 < 2|x| \leq n_0$, dann ist für $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \frac{x^{n_0}}{n_0!} \right| \underbrace{\left| \frac{\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}}{\frac{x^{n_0}}{n_0!}} \right| \cdot \left| \frac{\frac{x^{n_0+2}}{(n_0+2)!}}{\frac{x^{n_0+1}}{(n_0+1)!}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} \right|}_{n - n_0 \text{ Faktoren, jeder } \leq \frac{1}{2}} \leq \left| \frac{x^{n_0}}{n_0!} \right| \left(\frac{1}{2} \right)^{n-n_0} = 2^{n_0} \left| \frac{x^{n_0}}{n_0!} \right| \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Also (Bem.: Wir haben gerade das Quotientenkriterium benutzt/bewiesen.)

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 2^{n_0} \left| \frac{x^{n_0}}{n_0!} \right| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n < \infty$$

exp ist seine eigene Ableitung

Erinnerung/Vorschau: Ableitung (Steigung einer Funktion)

$$f(x) = x^n, \text{ so ist } f'(x) = nx^{n-1}$$

Wenn summandenweises Ableiten erlaubt ist (was hier der Fall ist):

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)' \\ &= 0 + \frac{1x^0}{1!} + \frac{2x^1}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots \\ &= 0 + 1 + \frac{2x^1}{2 \cdot 1!} + \frac{3x^2}{3 \cdot 2!} + \frac{4x^3}{4 \cdot 3!} + \dots \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \exp(x)\end{aligned}$$

Dies ist der Grund, warum $e^x = \exp(x)$ die „natürlichste“ Exponentialfunktion ist, ihre Umkehrfunktion heißt daher auch „natürlicher Logarithmus“.)



Leonhard Euler, 1707–1783