

Exkurs: Exakte Konfidenzintervalle für den Erfolgsparameter in der Binomialverteilung

27. Januar 2014

Unter n unabhängigen Versuchen seien x Erfolge beobachtet worden,
wir fassen x als Realisierung einer $\text{Bin}_{n,\vartheta}$ -verteilten ZV auf und wollen anhand der Beobachtung auf ϑ schließen.

Unter n unabhängigen Versuchen seien x Erfolge beobachtet worden,
wir fassen x als Realisierung einer $\text{Bin}_{n,\vartheta}$ -verteilten ZV auf und wollen anhand der Beobachtung auf ϑ schließen.

Wir hatten in der Vorlesung das auf asymptotischer Normalität fußende (approximative) Konfidenzintervall für ϑ zum Niveau $1 - \alpha$ kennen gelernt:

$$\left[\hat{\vartheta} - q \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\vartheta} + q \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

mit $\hat{\vartheta} = \frac{x}{n}$, $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\vartheta}(1 - \hat{\vartheta})}$, q das $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Quantil von $\mathcal{N}_{0,1}$

Unter n unabhängigen Versuchen seien x Erfolge beobachtet worden,
wir fassen x als Realisierung einer $\text{Bin}_{n,\vartheta}$ -verteilten ZV auf und wollen anhand der Beobachtung auf ϑ schließen.

Wir hatten in der Vorlesung das auf asymptotischer Normalität fußende (approximative) Konfidenzintervall für ϑ zum Niveau $1 - \alpha$ kennen gelernt:

$$\left[\hat{\vartheta} - q \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\vartheta} + q \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

mit $\hat{\vartheta} = \frac{x}{n}$, $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\vartheta}(1 - \hat{\vartheta})}$, q das $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Quantil von $\mathcal{N}_{0,1}$

Wie könnten wir vorgehen, wenn wir uns nicht auf die Asymptotik verlassen möchten?

Beobachte $X \sim P_{\vartheta} := \text{Bin}_{n,\vartheta}$,
Konfidenzintervall für $\vartheta \in \Theta = [0, 1]$?

Beobachte $X \sim P_\vartheta := \text{Bin}_{n,\vartheta}$,
Konfidenzintervall für $\vartheta \in \Theta = [0, 1]$?

Idee: Zu $\vartheta \in \Theta := [0, 1]$ wähle $c_\vartheta \in (0, 1)$, so dass für

$$C_\vartheta := \{x \in \{0, 1, \dots, n\} : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x\}) \geq c_\vartheta\}$$

gilt $\text{Bin}_{n,\vartheta}(C_\vartheta) \geq 1 - \alpha$

(und c_ϑ möglichst groß, so dass C_ϑ möglichst klein).

Beobachte $X \sim P_\vartheta := \text{Bin}_{n,\vartheta}$,
Konfidenzintervall für $\vartheta \in \Theta = [0, 1]$?

Idee: Zu $\vartheta \in \Theta := [0, 1]$ wähle $c_\vartheta \in (0, 1)$, so dass für

$$C_\vartheta := \{x \in \{0, 1, \dots, n\} : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x\}) \geq c_\vartheta\}$$

gilt $\text{Bin}_{n,\vartheta}(C_\vartheta) \geq 1 - \alpha$

(und c_ϑ möglichst groß, so dass C_ϑ möglichst klein).

Setze $C(x) := \{\vartheta \in \Theta : x \in C_\vartheta\}$ für $x \in \mathcal{X} := \{0, 1, \dots, n\}$,
dann gilt

$$\forall \vartheta \in \Theta : P_\vartheta(\vartheta \in C(X)) = P_\vartheta(X \in C_\vartheta) \geq 1 - \alpha$$

nach Konstruktion.

Es gilt

1. Für $\vartheta \in (0, 1)$ ist $\{0, \dots, n\} \ni x \mapsto \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x\})$ strikt wachsend auf $\{0, 1, \dots, \lceil (n+1)\vartheta - 1 \rceil\}$, strikt fallend auf $\{\lfloor (n+1)\vartheta \rfloor, \dots, n\}$, also maximal auf $x = \lfloor (n+1)\vartheta \rfloor$ (und auf $(n+1)\vartheta - 1$, wenn $(n+1)\vartheta \in \mathbb{Z}$).

Es gilt

1. Für $\vartheta \in (0, 1)$ ist $\{0, \dots, n\} \ni x \mapsto \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x\})$ strikt wachsend auf $\{0, 1, \dots, \lceil (n+1)\vartheta - 1 \rceil\}$, strikt fallend auf $\{\lfloor (n+1)\vartheta \rfloor, \dots, n\}$, also maximal auf $x = \lfloor (n+1)\vartheta \rfloor$ (und auf $(n+1)\vartheta - 1$, wenn $(n+1)\vartheta \in \mathbb{Z}$).
2. Für $x \in \{1, \dots, n\}$ ist $[0, 1] \ni \vartheta \mapsto \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, x+1, \dots, n\})$ stetig, strikt monoton wachsend mit

$$\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, x+1, \dots, n\}) = \text{Beta}_{x, n-x+1}([0, \vartheta]),$$

wo $\text{Beta}_{a,b}$ die Dichte

$$f_{\text{Beta}_{a,b}}(u) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} (1-u)^{b-1}$$

auf $(0, 1)$ hat.

denn:

1.

$$\begin{aligned} \frac{\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x\})}{\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x-1\})} &= \frac{\binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}}{\binom{n}{x-1} \vartheta^{x-1} (1-\vartheta)^{n-x+1}} \\ &= \frac{(n-x+1)\vartheta}{x(1-\vartheta)} \\ &> 1 \\ &\iff x < (n+1)\vartheta \end{aligned}$$

denn:

1.

$$\begin{aligned}\frac{\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x\})}{\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x-1\})} &= \frac{\binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}}{\binom{n}{x-1}\vartheta^{x-1}(1-\vartheta)^{n-x+1}} \\ &= \frac{(n-x+1)\vartheta}{x(1-\vartheta)} \\ &> 1 \\ &\iff x < (n+1)\vartheta\end{aligned}$$

2. U_1, \dots, U_n unabhängig und uniform auf $[0, 1]$,

$$S_\vartheta := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0,\vartheta]}(U_i)$$

ist $\text{Bin}_{n,\vartheta}$ -verteilt.

Sei $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)}$ die „Ordnungsstatistik“.

$$\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, \dots, n\}) = P(S_\vartheta \geq x) = P(U_{(x)} \leq \vartheta)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{B \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{k\} \\ |B|=x-1}} P\left(\begin{array}{l} U_k \leq \vartheta, U_m \leq U_k \text{ für } m \in B, \\ U_l > U_k \text{ für } l \in \{1, \dots, n\} \setminus (\{k\} \cup B) \end{array} \right)$$

$$= \int_0^\vartheta u^{|B|} (1-u)^{n-|B|-1} du = \int_0^\vartheta u^{x-1} (1-u)^{n-x} du$$

$$\begin{aligned}
\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, \dots, n\}) &= P(S_\vartheta \geq x) = P(U_{(x)} \leq \vartheta) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{B \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{k\} \\ |B|=x-1}} P\left(\underbrace{\begin{array}{l} U_k \leq \vartheta, U_m \leq U_k \text{ für } m \in B, \\ U_l > U_k \text{ für } l \in \{1, \dots, n\} \setminus (\{k\} \cup B) \end{array}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \int_0^\vartheta u^{|B|} (1-u)^{n-|B|-1} du = \sum_{k=1}^n \int_0^\vartheta u^{x-1} (1-u)^{n-x} du \\
&= \underbrace{n \binom{n-1}{x-1}}_{\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}} \int_0^\vartheta u^{x-1} (1-u)^{n-x} du \\
&= \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(x)\Gamma(n-x+1)}
\end{aligned}$$

Wähle $C_\vartheta := \{x_-(\vartheta), x_-(\vartheta) + 1, \dots, x_+(\vartheta)\}$ mit
 $x_-(\vartheta) = \max\{x : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \dots, x-1\}) \leq \frac{\alpha}{2}\}$ und
 $x_+(\vartheta) = \min\{x : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x+1, \dots, n\}) \leq \frac{\alpha}{2}\}.$

Wähle $C_\vartheta := \{x_-(\vartheta), x_-(\vartheta) + 1, \dots, x_+(\vartheta)\}$ mit
 $x_-(\vartheta) = \max\{x : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \dots, x-1\}) \leq \frac{\alpha}{2}\}$ und
 $x_+(\vartheta) = \min\{x : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x+1, \dots, n\}) \leq \frac{\alpha}{2}\}$.

Es gilt:

- ▶ $x \leq x_+(\vartheta) \iff$
 $\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, \dots, n\}) = \text{Beta}_{x, n-x+1}([0, \vartheta]) > \frac{\alpha}{2}$
 $\iff \vartheta > p_-(x) := \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von Beta}_{x, n-x+1}$.
- ▶ $x \geq x_+(\vartheta) \iff \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \dots, x\}) =$
 $1 - \text{Bin}(\{x+1, \dots, n\}) = \text{Beta}_{x+1, n-x}([\vartheta, 1]) \geq \frac{\alpha}{2}$.
 $\iff \vartheta < p_+(x) := 1 - \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von Beta}_{x+1, n-x}$.

Wähle $C_\vartheta := \{x_-(\vartheta), x_-(\vartheta) + 1, \dots, x_+(\vartheta)\}$ mit
 $x_-(\vartheta) = \max\{x : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \dots, x-1\}) \leq \frac{\alpha}{2}\}$ und
 $x_+(\vartheta) = \min\{x : \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x+1, \dots, n\}) \leq \frac{\alpha}{2}\}$.

Es gilt:

- ▶ $x \leq x_+(\vartheta) \iff$
 $\text{Bin}_{n,\vartheta}(\{x, \dots, n\}) = \text{Beta}_{x,n-x+1}([0, \vartheta]) > \frac{\alpha}{2}$
 $\iff \vartheta > p_-(x) := \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von Beta}_{x,n-x+1}$.
- ▶ $x \geq x_+(\vartheta) \iff \text{Bin}_{n,\vartheta}(\{0, \dots, x\}) =$
 $1 - \text{Bin}(\{x+1, \dots, n\}) = \text{Beta}_{x+1,n-x}([\vartheta, 1]) \geq \frac{\alpha}{2}$.
 $\iff \vartheta < p_+(x) := 1 - \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von Beta}_{x+1,n-x}$.

Satz (exaktes Konfidenzintervall im Binomialmodell)

$$p_-(x) := \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von Beta}_{x,n-x+1},$$

$$p_+(x) := 1 - \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von Beta}_{x+1,n-x}$$

$x \mapsto [p_-(x), p_+(x)]$ ist ein Konfidenzintervall für ϑ zum
 Sicherheitsniveau $1 - \alpha$.

Satz (exaktes Konfidenzintervall im Binomialmodell)

$$p_-(x) := \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von Beta}_{x,n-x+1},$$

$$p_+(x) := 1 - \frac{\alpha}{2}\text{-Quantil von Beta}_{x+1,n-x}$$

$x \mapsto [p_-(x), p_+(x)]$ ist ein Konfidenzintervall für ϑ zum Sicherheitsniveau $1 - \alpha$.

Bem.:

- ▶ Quantile der Beta-Verteilungen sind tabelliert, gelegentlich kann beim Nachschlagen in Tabellen die Symmetrieeigenschaft

$$\text{Beta}_{a,b}([0, x]) = \text{Beta}_{b,a}([1-x, 1]) = 1 - \text{Beta}_{b,a}([0, 1-x])$$

nützlich sein.

- ▶ R kennt die Beta-Verteilungen, ihre Verteilungsfunktionen $p_{\text{beta}}(x, a, b)$ und ihre Quantile $q_{\text{beta}}(p, a, b)$

Beispiel: $n = 53$, $x = 23$, wähle $\alpha = 0,05$

$$\hat{\vartheta} = \frac{23}{53} \approx 0,434, \hat{\sigma} \approx 0,496, q_{0,975} \approx 1,96$$

$$\left[\hat{\vartheta} \pm q \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{53}} \right] \approx [0,30, 0,57]$$

$$p_-(23) = 0,025\text{-Quantil von Beta}_{23,31} \approx 0,30,$$

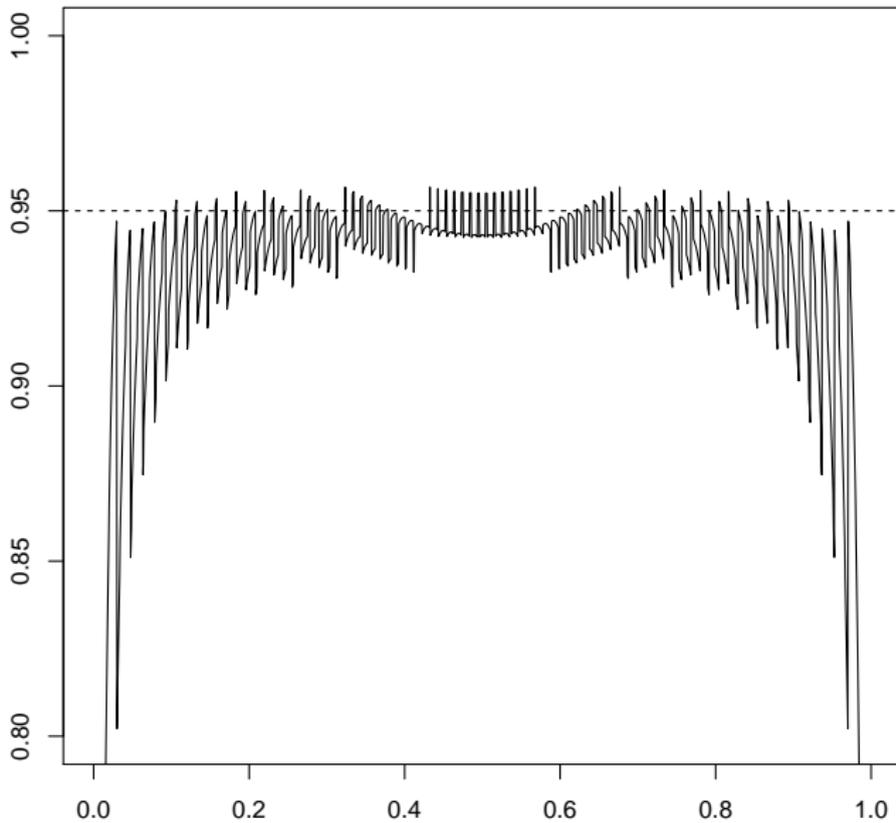
$$p_+(23) = 0,975\text{-Quantil von Beta}_{24,30} \approx 0,57$$

Absurd präzise Werte wären:

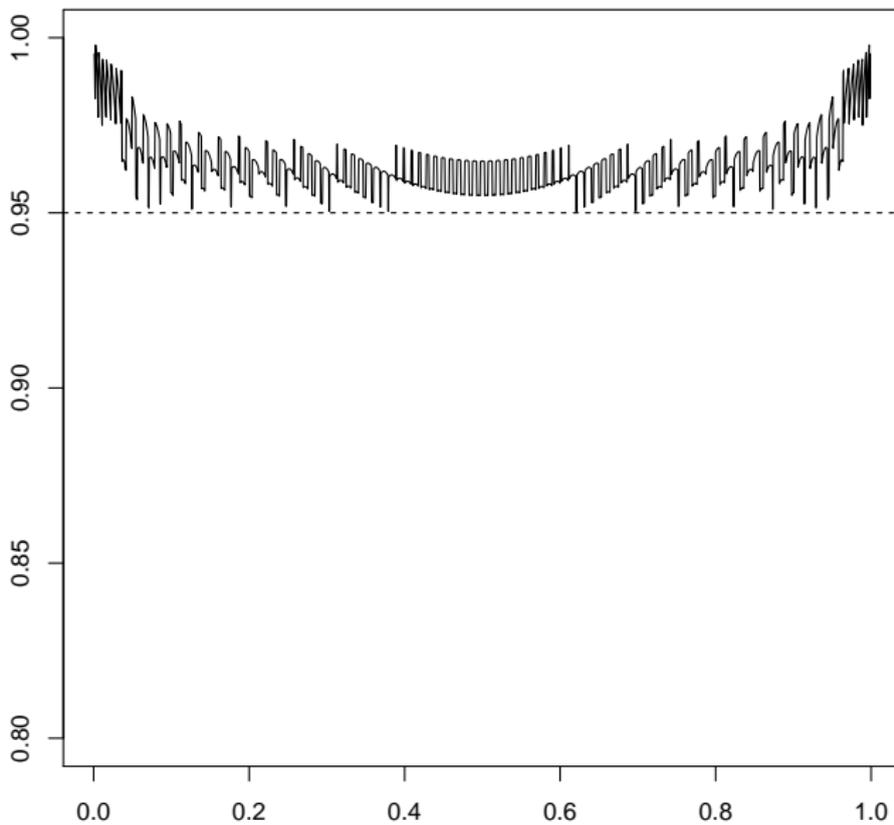
$$\left[\hat{\vartheta} \pm q \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{53}} \right] \approx [0,3005306, 0,5673939]$$

$$[p_-(23), p_+(23)] \approx [0,2983921, 0,5771742]$$

Überdeckungswahrscheinlichkeit n=100 (approx. Konfidenzintervall, nominelles Niveau 0.95)



Überdeckungswahrscheinlichkeit $n=100$ (exaktes Konfidenzintervall, Niveau 0.95)



Manchmal betrachtet man auch den Schätzer

$$\tilde{\vartheta} = \frac{x + 1}{n + 2}$$

für ϑ und bildet als (approximatives) Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$

$$\left[\tilde{\vartheta} - q \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\vartheta} + q \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

mit $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\vartheta}(1 - \tilde{\vartheta})}$, q das $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Quantil von $\mathcal{N}_{0,1}$

[$\tilde{\vartheta}$ wirkt vielleicht zunächst „ad hoc“ gewählt.

Die Form von $\tilde{\vartheta}$ ist natürlich im Kontext eines Bayesschen Ansatzes, den wir in dieser Vorlesung nicht weiter diskutieren werden.]

Überdeckungswahrscheinlichkeit n=100 (modifiziertes approx. Konfidenzint., nominelles Niveau 0.95)

