Ein einfaches Modell aus der Epidemiologie (SIR-Modell)

Pop. von N Individuen, 3 mögl. Zustände:

- suszeptibel
- infiziert
- „recovered" (genesen)

als Markovkette aufgefasst:

in jedem Schritt wird ein „Fokalindividuum" gewählt (uniform):

- es wird ein „Kontaktind." gew. (unif. aus den Rest), mit W'keit α wird Krankheit übertragen (falls möglich)
- falls Fokalind. infiziert, so wird es mit W'keit γ genesen ↳

In jedem Schritt wird ein „Fokalindividuum" gewählt (uniform):

- es wird ein „Kontaktind." gew. (unif. aus den Rest), mit W'keit α wird Krankheit übertragen (falls möglich)
- falls Fokalind. infiziert, so wird es mit W'keit γ genesen

S_n = # Suszept. Ind. nach n Schritten

I_n = # infizierte Ind. nach n Schritten

$(R_n = N - I_n - S_n)$. $(S_n, I_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist Markovkette (Werte $\{0,1,\dots,N\}^2$)

Übergänge:

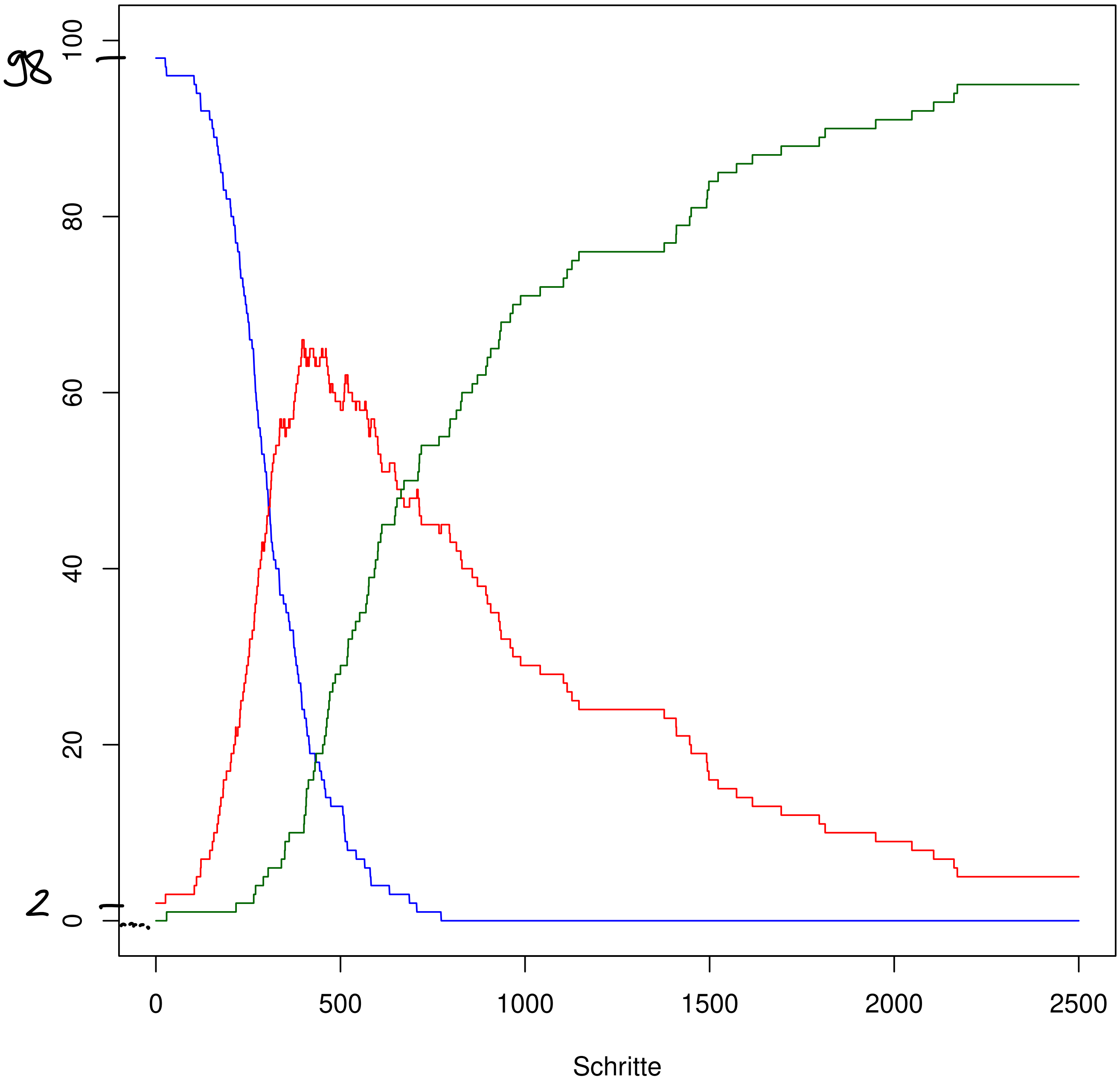
$(s,i) \to (s-1, i+1)$, W'keit $\frac{s}{N}\cdot\frac{i}{N-1}\cdot\alpha + \frac{i}{N}\cdot\frac{s}{N-1}\cdot\alpha\cdot(1-\gamma)$ $= \frac{s\cdot i}{N(N-1)}\alpha(2-\gamma)$

$(s,i) \to (s-1, i)$, W'keit $\frac{i}{N}\cdot\frac{s}{N-1}\alpha\cdot\gamma$

$(s,i) \to (s, i-1)$, W'keit $\frac{i}{N}\left(\frac{s}{N-1}(1-\alpha) + \frac{N-s}{N-1}\right)\cdot\gamma$

$(s,i) \to (s,i)$ „Rest"

$N = 100$ $\alpha = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}2$

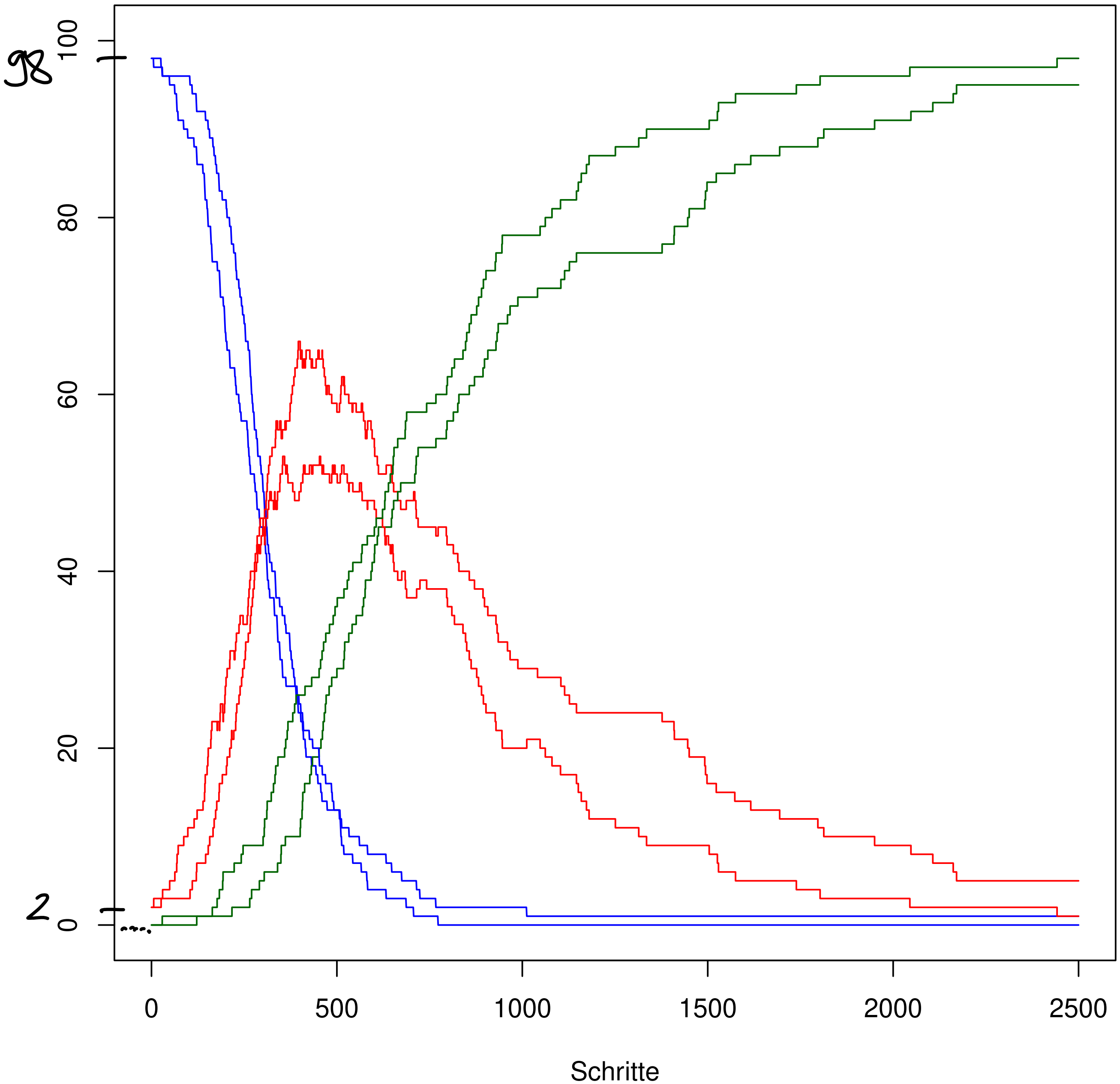


Suszeptibel

Infiziert

Recovered

$N = 100 \qquad \alpha = 0{,}7 \quad , \gamma = 0{,}2$

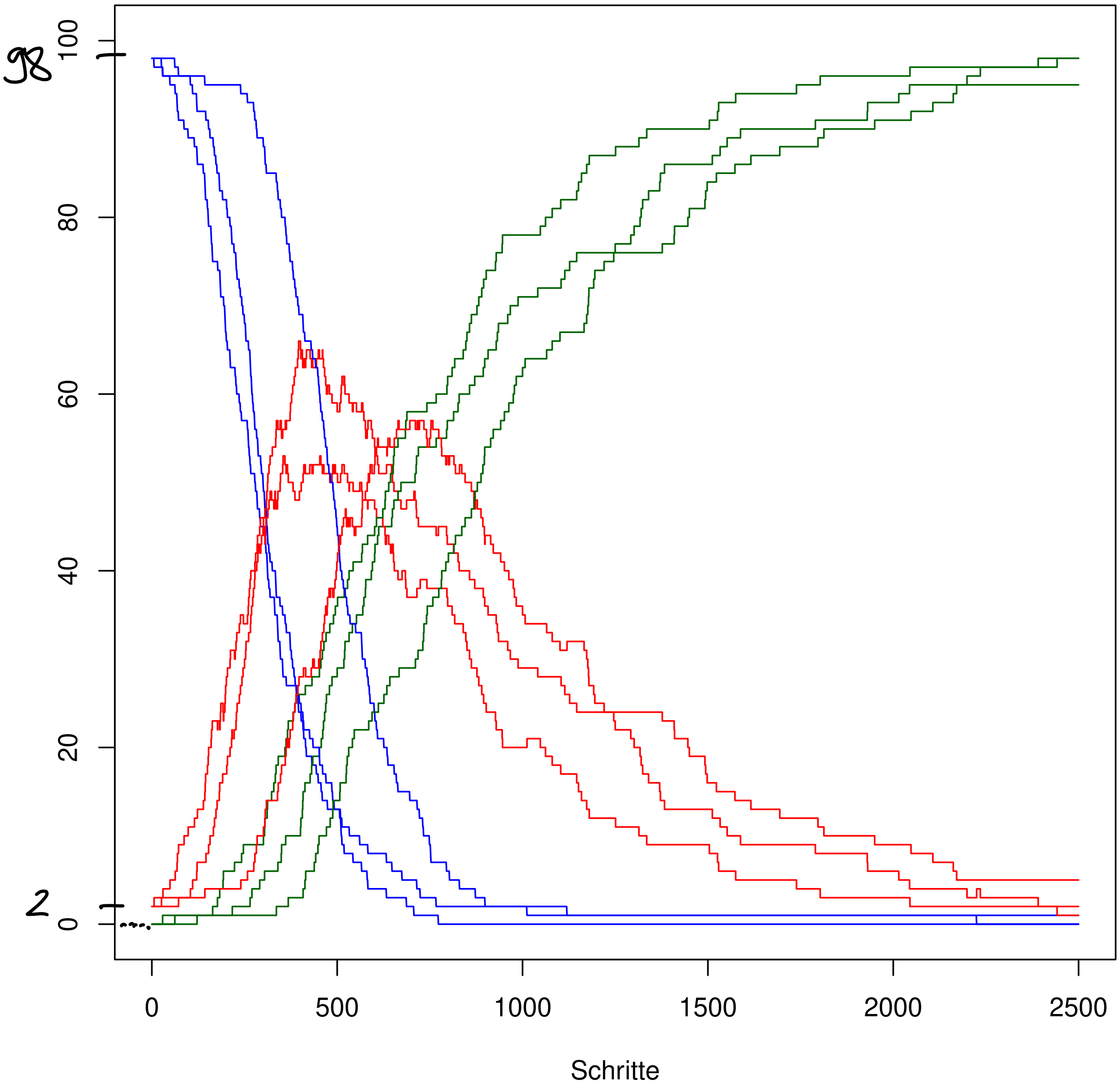


Suszeptibel

Infiziert

Recovered

$N = 100 \qquad \alpha = 0{,}7 \quad , \gamma = 0{,}2$

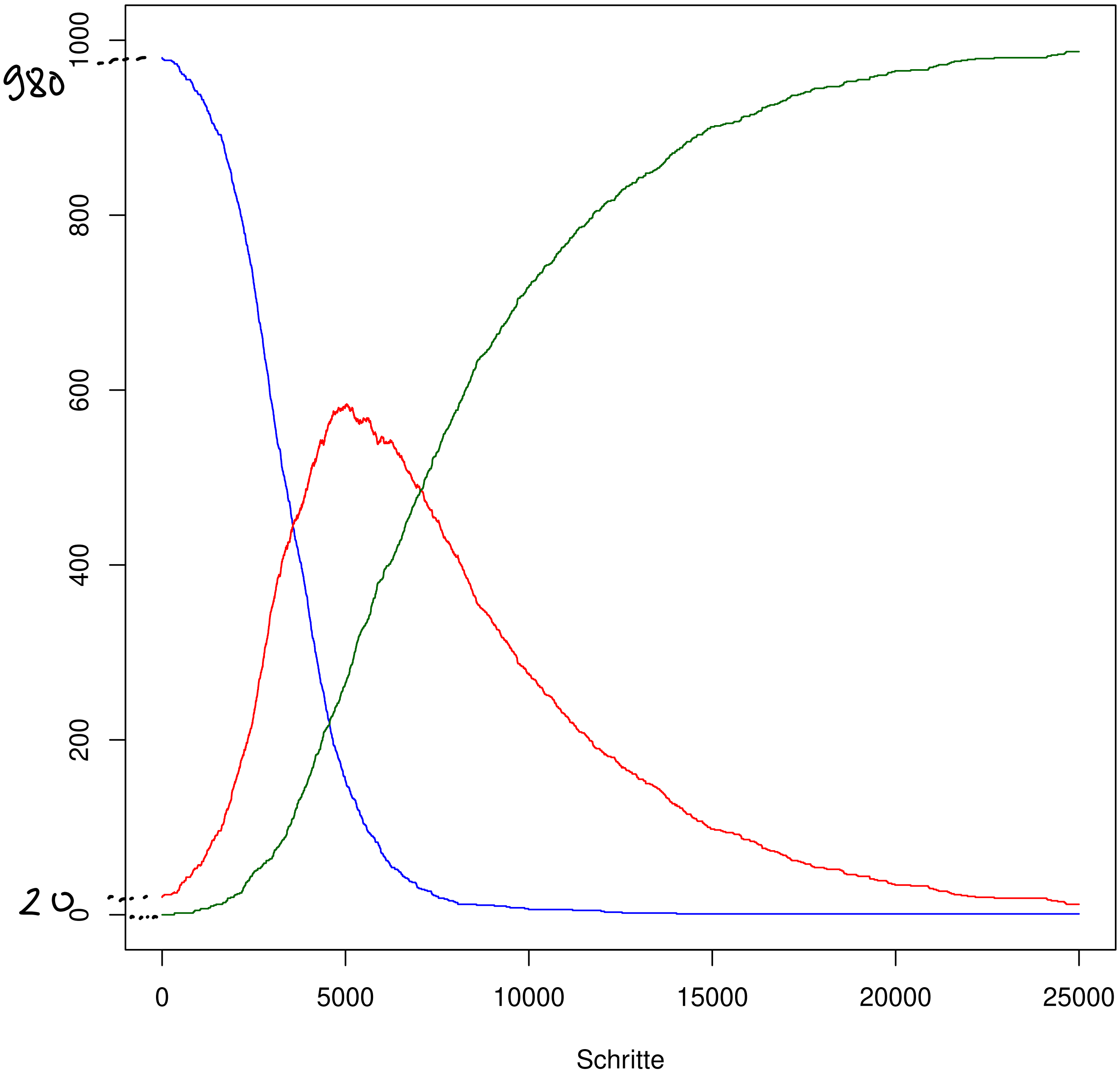


Suszeptibel

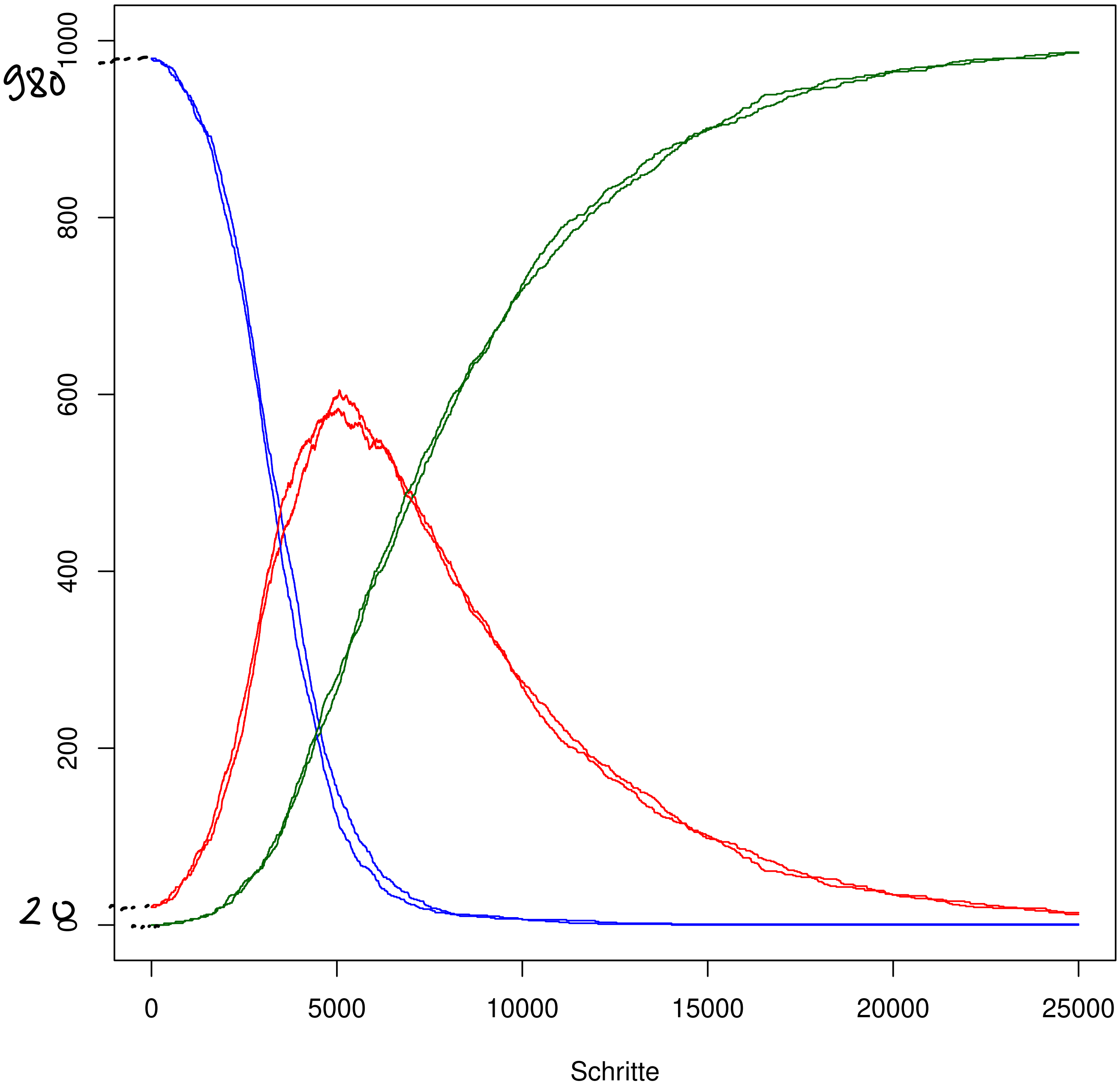
Infiziert

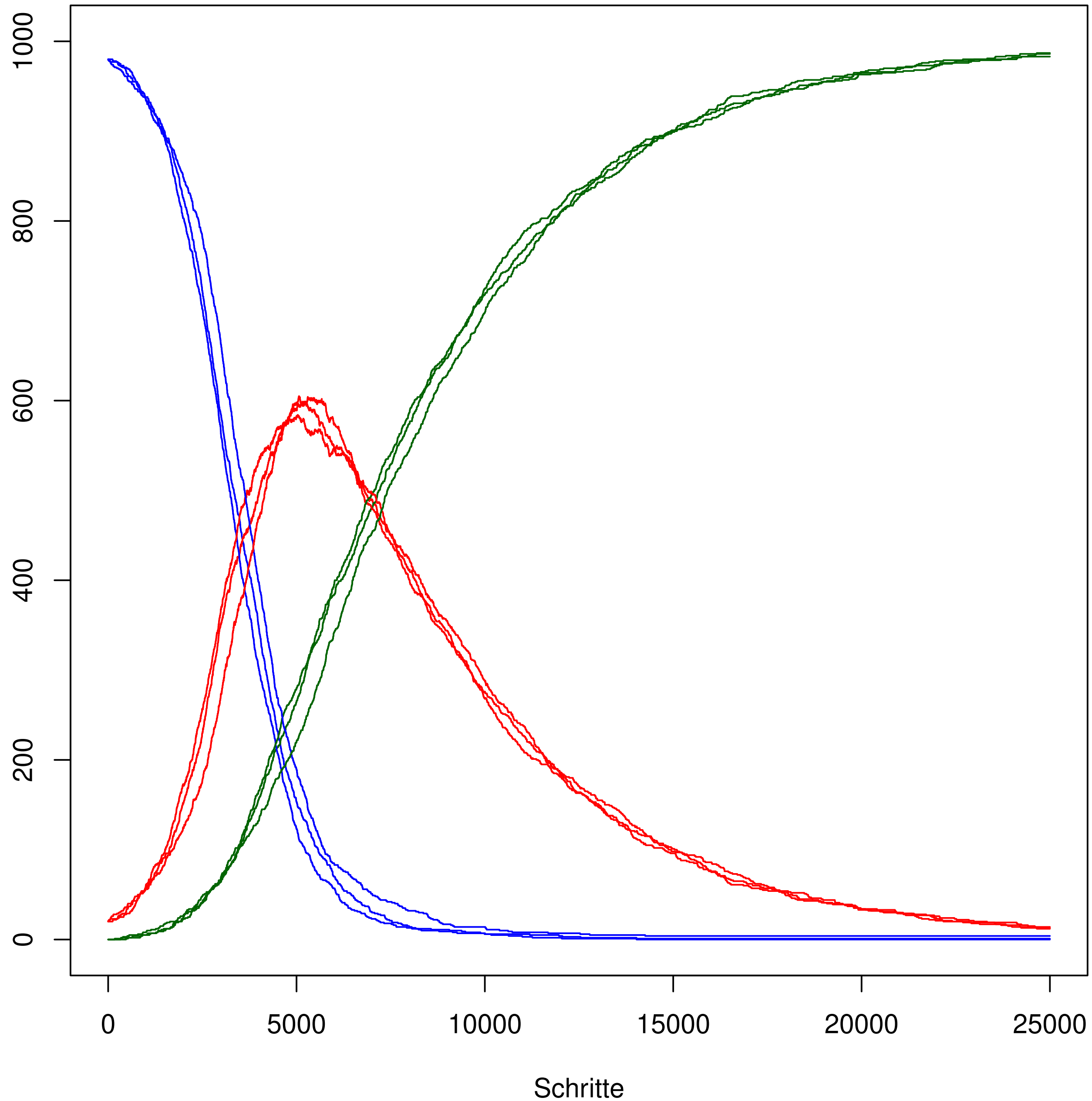
Recovered

$N = 1000$, $\alpha = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}2$



$N = 1000$, $\alpha = 0,7$, $\gamma = 0,2$

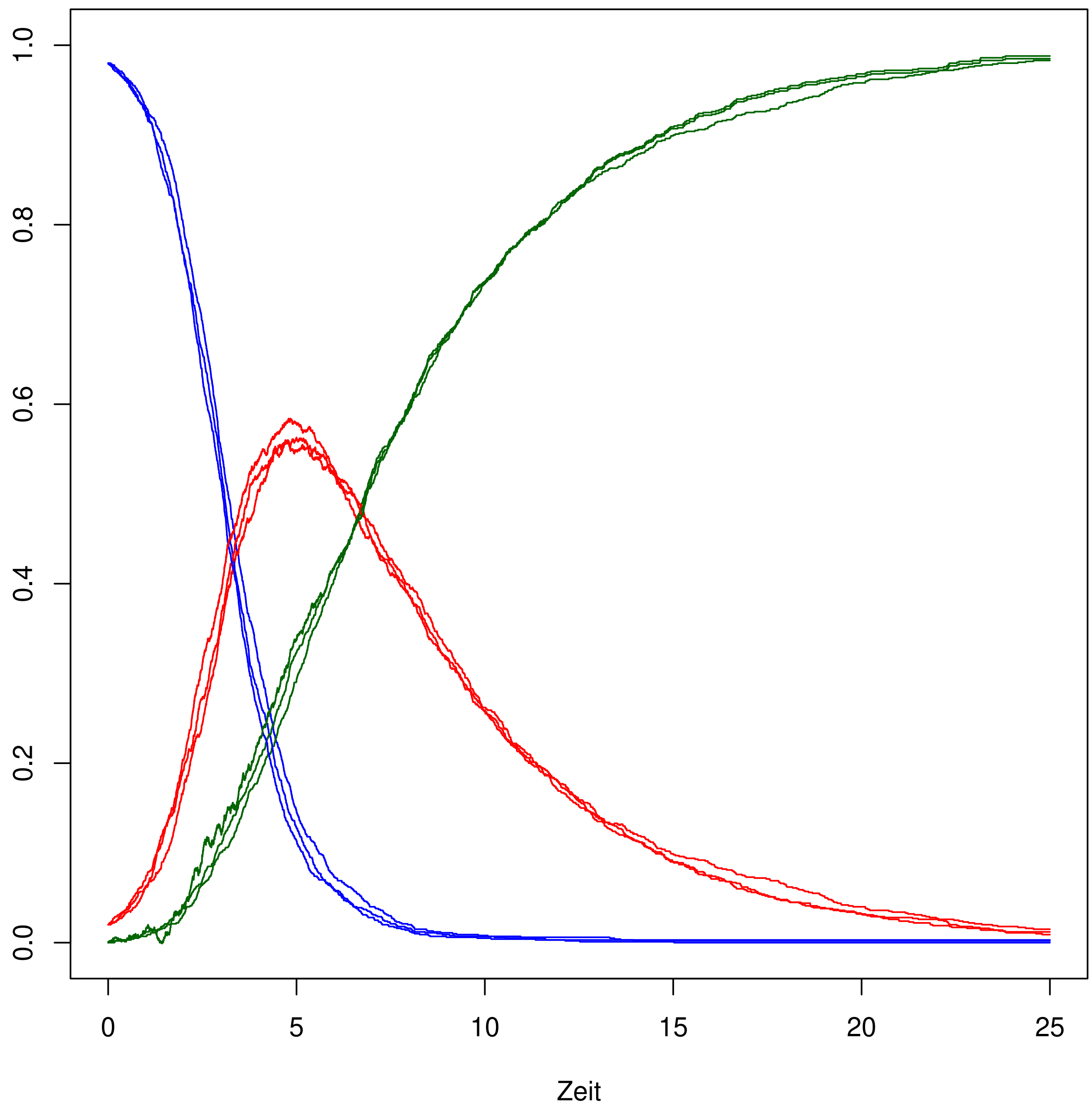




Skaliere Zustände um:

$\frac{1}{N} S_{\lfloor Nt \rfloor}, \; t \geq 0$

$\frac{1}{N} I_{\lfloor N \cdot t \rfloor}, \; t \geq 0$



Skaliere Zustände um:

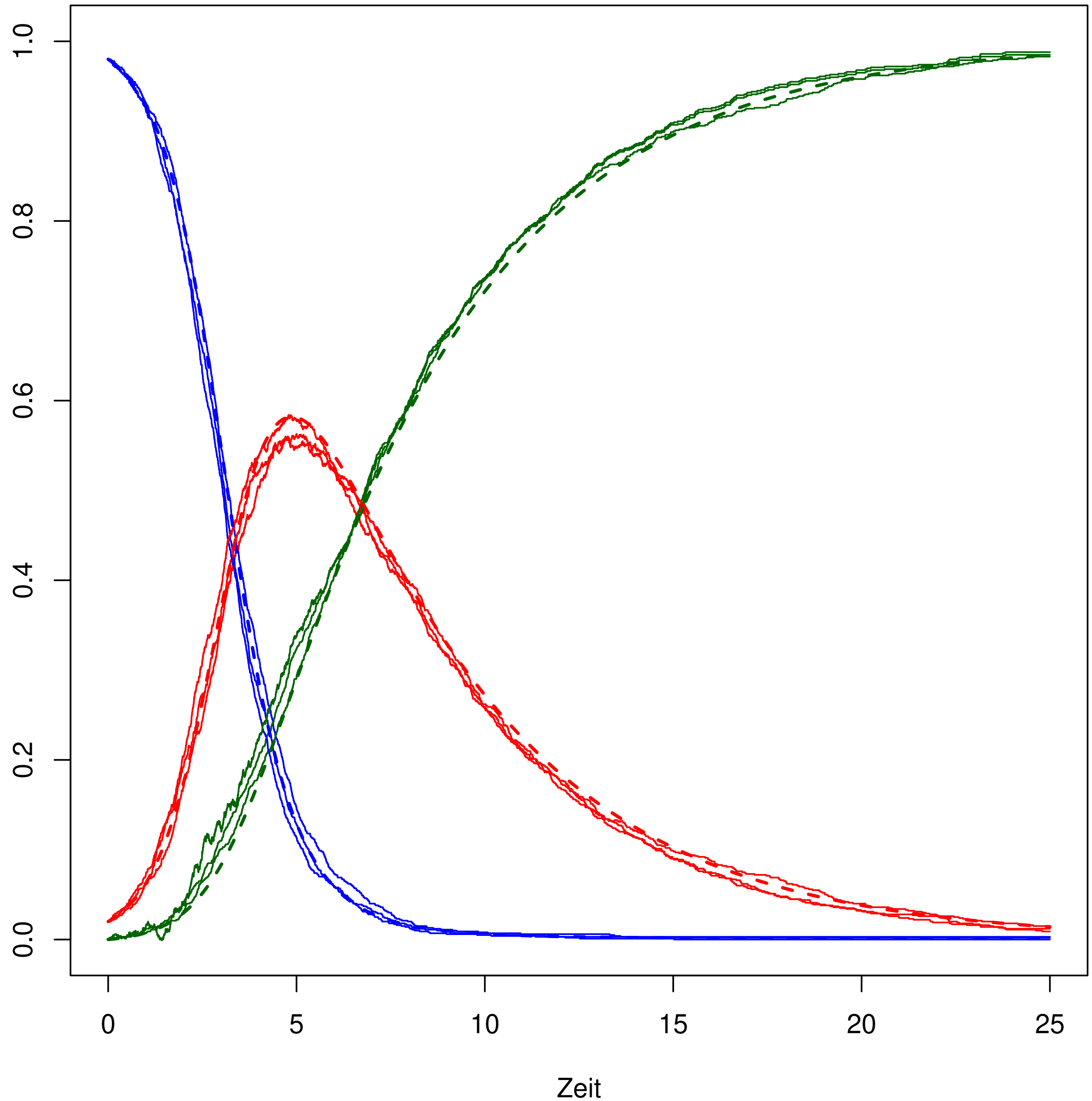
$$\frac{1}{N} S_{\lfloor Nt \rfloor}, \quad t \geq 0$$

$$\frac{1}{N} I_{\lfloor N \cdot t \rfloor}, \quad t \geq 0$$

für $N \to \infty$ wird die Dynamik deterministisch:

$$\frac{d}{dt} s(t) = -2\alpha s(t) \cdot i(t)$$

$$\frac{d}{dt} i(t) = 2\alpha s(t) i(t) - \gamma i(t)$$



Skaliere Zustände um:

$\frac{1}{N} S_{\lfloor Nt \rfloor}$, $t \geq 0$

$\frac{1}{N} I_{\lfloor N \cdot t \rfloor}$, $t \geq 0$

für $N \to \infty$ wird die Dynamik deterministisch:

$$\frac{d}{dt} s(t) = -2\alpha s(t) \cdot i(t)$$

$$\frac{d}{dt} i(t) = 2\alpha s(t) i(t) - \gamma i(t)$$

(Kermack & McKendrick, 1927)

Zentrale Idee: (analoge Rechnung für $\frac{1}{N} I_{\lfloor Nt \rfloor}$)

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} - S_n \mid (S_n, I_n) = (s,i) \right]$$

$$= (+1) \cdot P\left(S_{n+1} - S_n = +1 \mid (S_n, I_n) = (s,i) \right)$$

$$+ (-1) \cdot P\left(S_{n+1} - S_n = -1 \mid (S_n, I_n) = (s,i) \right)$$

$$\left(+ 0 \cdot P\left(\ldots = 0 \mid \ldots \right) \right)$$

$$= -2\alpha \frac{s \cdot i}{N \cdot (N-1)} \approx -2\alpha \frac{s}{N} \cdot \frac{i}{N}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{N} S_{\lfloor N(t+\frac{1}{N}) \rfloor} - \frac{1}{N} S_{\lfloor Nt \rfloor} \;\middle|\; \left(\frac{S_{\lfloor Nt \rfloor}}{N}, \frac{I_{\lfloor Nt \rfloor}}{N} \right) = (s,i) \right]$$

$$\approx \underbrace{\frac{1}{N}}_{\text{„Zeitinkrement } dt\text{"}} \cdot \left(-2\alpha s \cdot i \right)$$

(Zudem: Varianz des unnorm. Inkrements viel kleiner)