Bemerkung 7.7 (Stochastische Lösung eines diskreten Dirichlet-Problems)**.** In der Situation von Satz 7.6 sei $|S| < \infty$, $\varnothing \neq B \subset S$, es gelte

$T_B = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\}$

$$\forall\, x \in S \;:\; P_x(T_B < \infty) > 0$$

Dann ist für jedes $g : B \to \mathbb{R}$ das (lineare) Gleichungssystem

$$\begin{cases} Af(x) = f(x), & x \in S \setminus B \\ f(x) = g(x), & x \in B \end{cases} \tag{7.3}$$

mit $Af(x) := \sum_{y \in S} a_{x,y} f(y)$ eindeutig lösbar (und nach Satz 7.6 bzw. einer leichten Erweiterung davon gegeben durch $f(x) = \mathbb{E}_x\big[g(X_{T_B})\big]$).

Bew.: $\hat{a}_{x,y} := \mathbb{1}_{S \setminus B}(x)\, a_{x,y}$, $\hat{A} = (\hat{a}_{x,y})_{x,y \in S}$,

$\hat{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \in B \\ 0, & x \in S \setminus B \end{cases}$

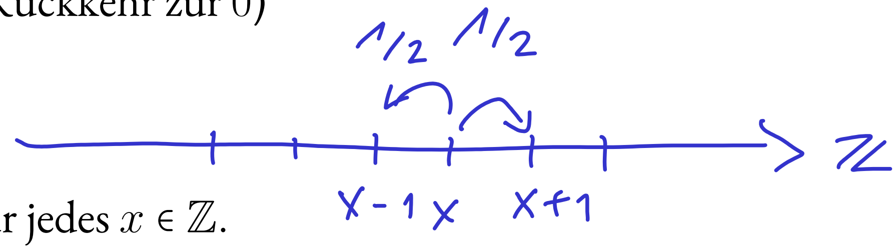
(7.3) ist damit $(I_S - \hat{A}) f = \hat{g}$, ($I_S$ = Identitätsmat. auf S)

Somit $f = (I_S - \hat{A})^{-1} \hat{g}$

(denn $(I_S - \hat{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n$, die Reihe konvergiert:

es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ mit $\sup_{x \in S} \sum_{y \in S} \hat{a}^{(n)}_{x,y} \le 1 - \delta$ für $n \geq n_0$)

Beispiel 7.8. 1. (Symmetrische gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, Rückkehr zur 0)



Betrachte (X_n) aus Bsp 7.5 mit $p = 1/2$

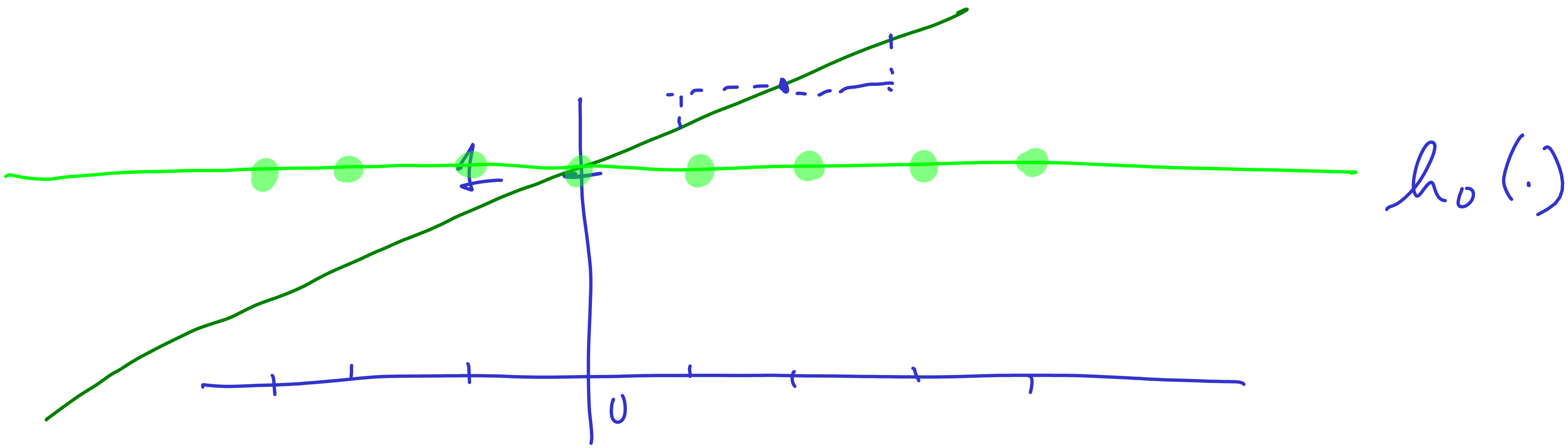
Sei $T_0 := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = 0\}$, so gilt

$$P_x(T_0 < \infty) = 1 \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion $h_0(x) := P_x(T_0 < \infty)$ löst nach Satz 7.6

$$h_0(0) = 1, \qquad h_0(x) = \frac{1}{2}h_0(x-1) + \frac{1}{2}h_0(x+1), \; x \neq 0,$$

d.h. die Werte $h_0(x)$ liegen auf einer Geraden mit $h_0(0) = 1$, wegen $0 \leq h_0(x) \leq 1 \; \forall \, x \in \mathbb{Z}$ folgt $h_0(x) \equiv 1$.

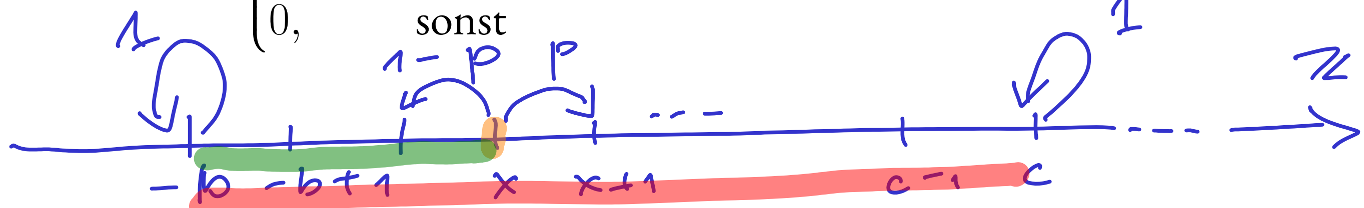


2. („Ruinproblem des Glücksspielers")

Seien $b, c \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$,

$S := \{-b - b + 1, \dots, 0, 1, \dots, c\}$,

$$a_{x,y} = \begin{cases} p, & y = x + 1 \le c, \\ 1 - p, & y = x - 1 \ge -b, \\ 1, & y = x = -b \text{ oder } y = x = c, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Interpretation als (kumlierter) Gewinnprozess in einem (iterierten) Münzwurfspiel: Gewinne 1 € bei Kopf (W'keit p), verliere 1 € bei Zahl (W'keit $1-p$), spiele, bis entweder c € gewonnen („Sieg") oder b € verloren („Ruin").

$h_c(x) := P_x(T_{\{c\}} < \infty)$ löst

$B = \{-b, c\}$

$$h_c(c) = 1,\ h_c(-b) = 0, \quad h_c(x) = p h_c(x+1) + (1-p) h_c(x-1),\ -b < x < c,$$

(umstellen:

$$h_c(x+1) = \frac{h_c(x) - (1-p) h_c(x-1)}{p}$$

)

die Lösung ist für $p \neq 1/2$

$$h_c(x) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^{-b}}{(q/p)^c - (q/p)^{-b}} \quad \text{mit } q := 1 - p$$

Ansatz

$h(x) = C \cdot a^x$)

und für $p = 1/2$

$$h_c(x) = \frac{\overbrace{x+b}^{= x-(-b)}}{c+b}.$$

Analog findet man

$$P_x(T_{\{-b\}} < \infty) = \frac{(q/p)^c - (q/p)^x}{(q/p)^c - (q/p)^{-b}} = 1 - P_x(T_{\{c\}} < \infty)$$

(bzw. $P_x(T_{\{-b\}} < \infty) = (c-x)/(c+b)$ für $p = 1/2$), es gilt also $P_x(T_{\{-b,c\}} < \infty) = 1$, das Spiel endet mit Sicherheit in endlicher Zeit.

Erwartete Eintrittszeiten

Man kann für eine Markovkette die erwartete Zeit bis zum Besuch eines gewissen Zustands in ähnlicher Weise bestimmen wie die Auftreffwahrscheinlichkeiten.

Bericht 7.9. (In der Situation von Satz 7.6) sei $g(x) = \mathbb{E}_x[T_B]$. g ist die kleinste nicht-negative Lösung von

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x \in B, \\ f(x) = 1 + \sum_y a_{x,y} f(\underset{y}{\cancel{x}}), & x \in S \setminus B \end{cases} \tag{7.4}$$

(wobei die Summe $\sum_y a_{x,y} f(x)$ möglicherweise divergieren kann).

Man kann den Beweis analog zu dem Satz 7.6 führen; Bem. 7.7 zur Eindeutigkeit gilt entsprechend.

Beispiel 7.10. Sei (X_n) symm. gew. Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ (startend in $X_0 = 0$), vgl. Beispiel 7.5 (und Bsp. 7.8). Es ist

$$\mathbb{E}_0[T_{\{1\}}] = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{-1}[T_{\{1\}}],$$

andererseits ist

$$\mathbb{E}_{-1}[T_{\{1\}}] = \underbrace{\mathbb{E}_{-1}[T_{\{0\}}]}_{=\mathbb{E}_0[T_{\{1\}}]} + \mathbb{E}_0[T_{\{1\}}] = 2\mathbb{E}_0[T_{\{1\}}].$$

Somit ist $\mathbb{E}_0[T_{\{1\}}] = 1 + \mathbb{E}_0[T_{\{1\}}]$, was $\mathbb{E}_0[T_{\{1\}}] = +\infty$ erzwingt.

7.2 Gleichgewichte

Definition 7.11. Sei $X = (X_n)_n$ Markovkette auf S mit Übergangsmatrix A. Ein W'maß π auf S heißt ein *Gleichgewicht* für X (bzw. für A), wenn gilt

$$P_\pi(X_1 = x) = \pi(x) \text{ für alle } x \in S.$$

(Wir schreiben hier und im Folgenden abkürzend $\pi(x)$ für $\pi(\{x\})$).

Da $P_\pi(X_1 = x) = \sum_{y\in S} \pi(y) a_{y,x}$, ist dies gleichbedeutend mit

$$P_\pi(X_1 = x) = \sum_{y\in S} \underbrace{P_\pi(X_0 = y, X_1 = x)}_{= \pi(y)\cdot a_{y,x}}$$

$$\pi A = \pi, \quad \text{d.h. } \pi \text{ ist links-Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } 1.$$

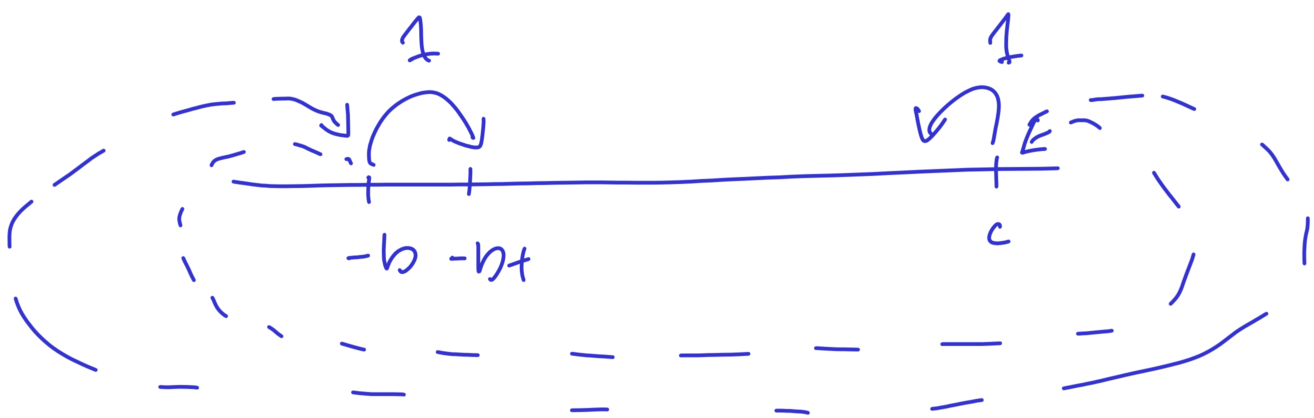
Es gilt dann auch $\pi = \cancel{A^n \pi}$, $P_\pi(X_n = x) = \pi(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

$\pi = \pi A^n$

Definition 7.12. $A = (a_{x,y})_{x,y\in S}$ heißt *irreduzibel*, wenn es

$$\text{für alle } x, y \in S \text{ ein } n = n(x,y) \text{ gibt mit } a^{(n)}_{x,y} > 0.$$

Die zugehörige Markovkette kann also von jedem Startzustand x aus jeden anderen Zustand y mit positiver Wahrscheinlichkeit (irgendwann) erreichen.



Satz 7.13. *Sei $|S| < \infty$, A irreduzibel, dann gibt es genau ein Gleichgewicht π für A. π erfüllt $\pi(x) > 0$ für alle $x \in S$.*

Zur Existenz: Wähle $x_0 \in S$,

$$a_n := \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a^{(j)}_{x_0,x} \right)_{x \in S} \in \underbrace{[0,1]^S}_{\text{ist kompakt}} \subseteq \mathbb{R}^{|S|}$$

wähle (mit Bolzano-Weierstraß) $n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

mit $\pi(x) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} a^{(j)}_{x_0,x}$, $x \in S$

(Idee: π und πA unterscheiden sich nur um „Randfälle")

$$\pi A(x) = \sum_{y \in S} \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} a^{(j)}_{x_0,y} \right) a_{y,x}$$

$$= \lim_{k} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \underbrace{\sum_{y \in S} a^{(j)}_{x_0,y} \cdot a_{y,x}}_{= a^{(j+1)}_{x_0,x}} = \pi(x)$$

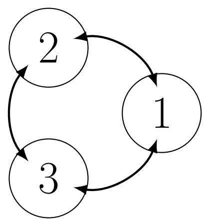
(mehr Details in d. Vorl.notizen)

(Eindeutigkeit: siehe Vorl.notizen)

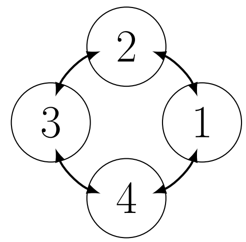
Definition 7.14. Eine Markovkette X auf S (bzw. eine Übergangsmatrix $A = (a_{x,y})_{x,y\in S}$) heißt *aperiodisch*, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_{x,x}^{(n)} > 0 \text{ für alle } x \in S, n \geq n_0.$$

Beispiel.



aperiodisch



periodisch (mit Periode 2)

Satz 7.15. $|S| < \infty$, *A irreduzibel und aperiodisch,* $(X_n)_n$ *Markovkette mit Übergangsmatrix A und Startverteilung* μ*. Dann gilt*

$$\text{für alle } x \in S: \quad P_\mu(X_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(x),$$

wobei π *das (eindeutige) Gleichgewicht zu A ist.*

Konstruiere $(X_n, X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, Werte in $S \times S$,

so dass 1. (X_n) ..., Markovkette mit Ü'mat. A, Start.vert. μ

(X'_n) ... Markovkette mit Ü'mat. A, Start.vert. π

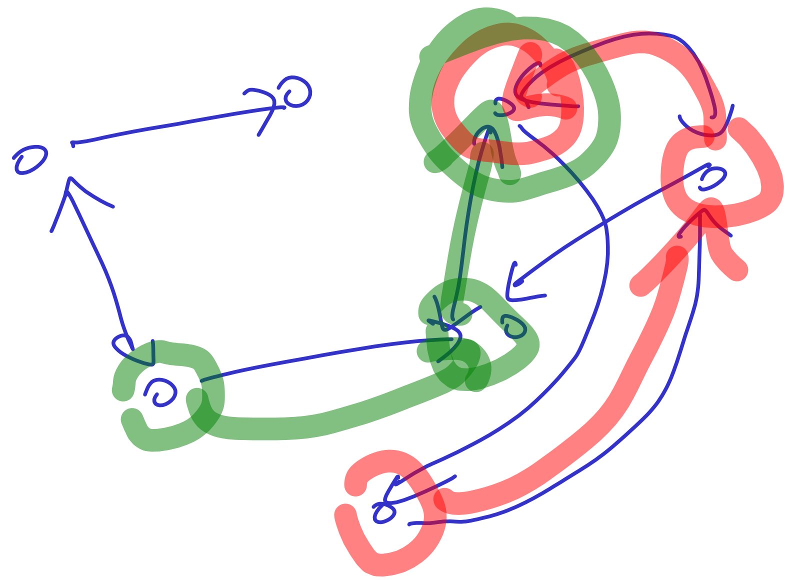
2. $P(X_n \neq X'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Damit

$$P_\mu(X_n = x) = P(X_n = x) = \overbrace{P(X_n = x, X_n = X'_n)}^{= P(X'_n = x, X_n = x)} + \underbrace{P(X_n = x, X_n \neq X'_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$= \underbrace{P(X'_n = x)}_{= \pi(x)} - \underbrace{P(X'_n = x, X_n \neq X'_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{(\dots)}_{\xrightarrow[n\to]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(x)$$

Zur Konstruktion $(X_n, X'_n)_{n=0,1,2,\dots}$:



(„naheliegende Kopplung")

Beispiel 7.16 (Ehrenfest-Modell[3]). d Teilchen sind verteilt auf einen linken und einen rechten Behälter, in jedem Schritt wechselt ein rein zufällig ausgewähltes Teilchen von seinem aktuellen in den anderen Behälter. Sei X_n = Anz. Teilchen im linken Behälter nach n Schritten.

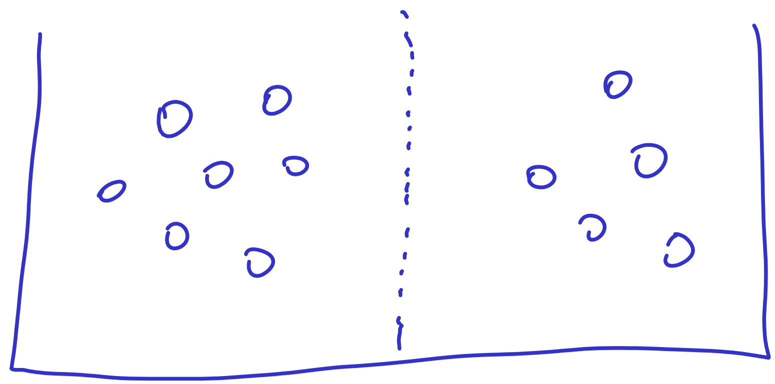
$(X_n)_n$ ist Markovkette auf $\{0, 1, \ldots, d\}$ mit Übergangsmatrix

$$a_{x,y} = \begin{cases} (d-x)/d, & y = x+1 \leq d, \\ x/d, & y = x-1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Gleichgewicht ist $\pi = \mathrm{Bin}_{d,1/2}$: Es ist

$$\pi(x) a_{x,x+1} = \pi(x+1) a_{x+1,x}$$

(und allgemein $\pi(x)a_{x,y} = \pi(y)a_{y,x}$ und dies impliziert $\pi A = \pi$, denn dann ist $\sum_y \pi(y)a_{y,x} = \sum_y \pi(x)a_{x,y} = \pi(x)\sum_y a_{x,y} = \pi(x)$).



[3]Paul Ehrenfest, 1880–1933; Tatjana Ehrenfest(-Afanasyeva), 1876–1946

Definition und Beobachtung 7.17. Eine Markovkette X auf S (bzw. ihre Übergangsmatrix $A = (a_{x,y})_{x,y \in S}$) heißt *reversibel* (bezüglich π), wenn gilt

$$\pi(x)a_{x,y} = \pi(y)a_{y,x} \quad \text{für alle } x, y \in S \qquad (\text{„detaillierte Balancegleichung“})$$

Dann ist π ein Gleichgewicht für X und es gilt für $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in S$

$$P_\pi(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = P_\pi(X_0 = x_n, X_1 = x_{n-1}, \dots, X_{n-1} = x_1, X_n = x_0)$$

$$= \underbrace{\pi(x_0) a_{x_0,x_1}}_{= a_{x_1,x_0} \cdot \pi(x_1)} \cdots a_{x_{n-1},x_n}$$

Satz 7.18. *Sei $X = (X_n)$ Markovkette auf S mit Übergangsmatrix A,*

$$\tau_x := \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$$

der Zeitpunkt des ersten Besuchs bzw. bei Start in x der ersten Rückkehr nach x. Für $x \in S$ sind äquivalent:

1. $\mathbb{E}_x[\tau_x] < \infty$.
2. *Es gibt ein Gleichgewicht π mit $\pi(x) > 0$.*

(und dann ist $\pi(x) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_x]}$)

Korollar 7.19. *Wenn X (in der Situation von Satz 7.18) ein eindeutiges Gleichgewicht besitzt, so gilt*

$$\mathbb{E}_x[\tau_x] = \frac{1}{\pi(x)} \quad \textit{für } x \in S.$$

Für das Ehrenfest-Modell (Bsp. 7.16) mit d Kugeln ist

$$\mathbb{E}_0[\tau_0] = \frac{1}{\mathrm{Bin}_{d,1/2}(\{0\})} = 2^d.$$

Beispiel 7.20 (Erneuerungskette)**.** Sei $m \in \mathbb{N}$, ν W'maß auf $\{1, 2, \dots, m+1\}$ mit $\nu(j) > 0$ für $1 \leq j \leq m+1$, X Markovkette auf $S = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ mit Übergangsmatrix

$$a_{i,j} = \begin{cases} \nu(j+1) & i = 0 \leq j \leq m, \\ 1, & j = i-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

X *ist* irreduzibel und aperiodisch. Mit $\mu := \sum_{j=1}^{m+1} j\nu(j)$ ist das (eindeutige) Gleichgewicht gegeben durch

$$\pi(x) = \frac{1}{\mu}\nu\Big(\{x+1, x+2, \dots, m+1\}\Big), \quad x \in S,$$

denn

$$\pi(j+1)p_{j+1,j} + \pi(0)p_{0,j} = \frac{1}{\mu}\Big(\nu(\{j+2, \dots, m+1\}) \cdot 1 + 1 \cdot \nu(j+1)\Big) = \pi(j).$$

Mit Satz 7.15 folgt

$$P_{x_0}(X_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(x)$$

(für alle $x_0, x \in S$).

$m \in \mathbb{N}$, ν W'maß auf $\{1, 2, \dots, m+1\}$ mit $\nu(j) > 0$ für $1 \le j \le m+1$, X Markovkette auf $S = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ mit Übergangsmatrix

$$a_{i,j} = \begin{cases} \nu(j+1) & i = 0 \le j \le m, \\ 1, & j = i-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann X folgendermaßen darstellen: Seien $T_1, T_2, \dots$ u.i.v., $T_i \sim \nu$, $W_n := T_1 + \dots + T_n$, $n \in \mathbb{N}$ ($W_0 := 0$), dann ist

$$X_n := \inf \left\{ W_k - n : k \in \mathbb{N}_0, W_k \ge n \right\}$$

eine Markovkette mit obiger Übergangsmatrix (Übung).

(Interpretation: T_k = Lebensdauer der k-ten „Glühbirne“, W_j = Zeitpunkt, zu dem zum j-tem Mal die Glühbirne ausgewechselt wird, dann ist X_n = „Restlebensdauer“ der zum Zeitpunkt n brennenden Glühbirne.) Wir finden eine Version des sogenannten Erneuerungssatzes:

$$P\big(\exists\, k \in \mathbb{N} : W_k = n\big) = P_0(X_n = 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(0) = \frac{1}{\mu}.$$

Bericht. Man kann die Voraussetzungen deutlich abschwächen, tatsächlich gilt obiges auch in dem Fall, dass ν ein W'maß auf $\mathbb{N}$ ist mit $\sum_{x\in\mathbb{N}} x\nu(x) < \infty$, die Bedingung, dass ν strikt positiv ist, kann ersetzt werden durch die Forderung ggT$(\{x : \nu(x) > 0\}) = 1$.

7.3 Rekurrenz und Transienz*

Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovkette mit Zustandsraum S und Übergangsmatrix A.

Definition 7.21. Ein Zustand $x \in S$ heißt *rekurrent*, wenn $P_x(\tau_x < \infty) = 1$ gilt, ansonsten *transient*.

Die Kette $(X_n)_n$ heißt rekurrent (transient), falls alle Zustände rekurrent (transient) sind.

Beispiele. 1. Die gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Drift $2p - 1 \neq 0$ $(a_{x,x+1} = p = 1 - a_{x,x-1})$ ist transient (vgl. Bsp. 7.8, 2.), für $p = \frac{1}{2}$ ist sie rekurrent (vgl. Bsp. 7.8, 1.).

2. $|S| < \infty$ und A irreduzibel, so ist X rekurrent (dies folgt aus Satz 7.13 zusammen mit Satz 7.18).

Beobachtung 7.22.

1. $x \in S$ rekurrent, so gilt $P_x\big(X_n = x$ für unendlich viele $n\big) = 1$.
2. $x \in S$ transient, so gilt $P_\mu\big(X_n = x$ für unendlich viele $n\big) = 0$ für jede Startverteilung μ.
3. $x \in S$ ist transient g.d.w. $\sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n = x) < \infty$.

Beweis. Sei

$$B_x := \big|\{n \geq 1 : X_n = x\}\big| \quad \text{die Anzahl Besuche in } x,$$

$m \in \mathbb{N}$, μ beliebige Startverteilung. Es ist

$$\begin{aligned} P_\mu(B_x \geq m) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} P_\mu\big(X_1, \ldots, X_{\ell-1} \neq x, X_\ell = x,\ X_n = x \text{ für mind. } m-1 \text{ Werte von } n \geq \ell\big) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} P_\mu\big(X_1, \ldots, X_{\ell-1} \neq x, X_\ell = x\big) P_x(B_x \geq m-1) \\ &= P_\mu(\tau_x < \infty) P_x(B_x \geq m-1) \end{aligned}$$

also gilt

$$P_\mu(B_x \geq m) = P_\mu(\tau_x < \infty) P_x(\tau_x < \infty)^{m-1}.$$

Im transienten Fall (Punkt 2.) folgt

$$P_\mu(B_x = \infty) = \lim_{m \to \infty} P_\mu(B_x \geq m) = 0,$$

im rekurrenten Fall (Punkt 1.) folgt

$$P_x(B_x \geq m) = P_x(\tau_x < \infty)^m = 1 \qquad \text{für jedes } m \in \mathbb{N},$$

somit $P_x(B_x = \infty) = 1$.

$$B_x := \left|\{n \geq 1 : X_n = x\}\right| \quad \text{die Anzahl Besuche in } x$$

Zu 3. ($x \in S$ ist transient g.d.w. $\sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n = x) < \infty$):

„$\Leftarrow$“ : Reihe endlich $\Rightarrow P_x(B_x < \infty) = 1$ mit Borel-Cantelli-Lemma.

„$\Rightarrow$“ : Nach obigem ist

$$\begin{aligned} P_x(B_x = m) &= P_x(B_x \geq m) - P_x(B_x \geq m+1) \\ &= \big(1 - P_x(\tau_x < \infty)\big) P_x(\tau_x < \infty)^m, \end{aligned}$$

d.h. $B_x \sim \mathrm{Geom}_{1-P_x(\tau_x<\infty)}$ unter P_x, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n = x) = \mathbb{E}_x[B_x] = \frac{1}{1 - P_x(\tau_x < \infty)} - 1 < \infty.$$

$\square$

Beispiel 7.23 (Gewöhnliche symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$)**.** (X_n) Markovkette auf $S = \mathbb{Z}^d$, Übergangsmatrix $a_{x,y} = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \text{falls } \|x-y\| = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ (d.h. X springt jeweils zu einem uniform ausgewählten (direkten) Nachbarpunkt auf dem d-dimensionalen Gitter).

X ist rekurrent für $d = 1$ und $d = 2$, transient für $d \geq 3$.

Beweis. Wegen Verschiebungsinvarianz (es gilt $a_{x,y} = a_{x+z,y+z} = a_{0,y-x}$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$) genügt es den Startpunkt $x = 0 \in \mathbb{Z}^d$ zu betrachten.

Den Fall $d = 1$ haben wir bereits behandelt (Bsp. 7.8, 1.).

Der Fall $d = 2$: Es ist

$$
\begin{aligned}
P_0(X_{2n} = 0) &= 4^{-2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k, k, n-k, n-k} \\
&= 4^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = 4^{-2n} \binom{2n}{n}^2 \sim \frac{1}{\pi n}
\end{aligned}
$$

mit Stirling-Approximation, wegen $\sum_n 1/n = \infty$ folgt aus Beob. 7.22 Rekurrenz.

Der Fall $d \geq 3$: Es ist

$$
\begin{aligned}
P_0(X_{2n} = 0) &= (2d)^{-2n} \sum_{\substack{n_1,\dots n_d \in \mathbb{Z}_+ \\ n_1+\dots+n_d=n}} \binom{2n}{n_1, n_1, n_2, n_2, \dots, n_d, n_d} \\
&= (2d)^{-2n} \binom{2n}{n} \sum_{\substack{n_1,\dots n_d \in \mathbb{Z}_+ \\ n_1+\dots+n_d=n}} \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_d}^2
\end{aligned}
$$

denn man muss in jeder der d Koordinatenrichtungen gleich viele $+1$ und -1-Schritte ausführen, um nach $2n$ Schritten wieder zurück in der 0 zu sein.

Mit $m := \lceil n/d \rceil$ ist

$$
\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_d} \leq \binom{dm}{m, m, \dots, m}
$$

(denn falls $n_i \leq n_j - 2$, so ist $\binom{n}{n_1,\dots,n_i,\dots,n_j,\dots,n_d} \leq \binom{n}{n_1,\dots,n_i+1,\dots,n_j-1,\dots,n_d}$), somit ist

$$
\begin{aligned}
P_0(X_{2n} = 0) &\leq 2^{-2n} \binom{2n}{n} \frac{(dm)!}{(m!)^d} d^{-n} \sum_{\substack{n_1,\dots n_d \in \mathbb{Z}_+ \\ n_1+\dots+n_d=n}} \binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_d} d^{-n} \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{(2\pi dm)^{1/2}}{(2\pi m)^{d/2}} d^{dm-n}
\end{aligned}
$$

für $n \to \infty$ (und damit auch $m = \lceil n/d \rceil \to \infty$) mit Stirling-Approximation.

Insgesamt folgt $P_0(X_{2n} = 0) = O(n^{-d/2})$, für $d \geq 3$ ist daher $\sum_{k=1}^{\infty} P_0(X_k = 0) < \infty$, mit Beob. 7.22 folgt Transienz. $\square$