Kapitel 0

Auftakt

Das Problem der Punkte

Aus dem Briefwechsel zwischen Blaise Pascal[1] und Pierre de Fermat[2] 1654, angeregt durch Fragen von Antoine Gombard, genannt Chevalier de Méré[3], siehe auch [KW, S. 95ff]:

> Spieler A und Spieler B spielen über mehrere Runden, jede einzelne Runde ist ein faires Glücksspiel (z.B. ein fairer Münzwurf).
>
> Am Anfang setzt jeder gleich viel ein, derjenige, der als erster insgesamt vier Runden gewonnen hat, bekommt alles.
>
> Nach drei Runden muss das Spiel abgebrochen werden, es steht $2 : 1$ für A.

Frage: Wie soll der Einsatz nun gerecht aufgeteilt werden?

Ansatz: Aufteilung gemäß der Wahrscheinlichkeit, von diesem Spielstand aus zu gewinnen.
Wie wahrscheinlich ist es, dass A vom Spielstand $2 : 1$ aus gewinnt?

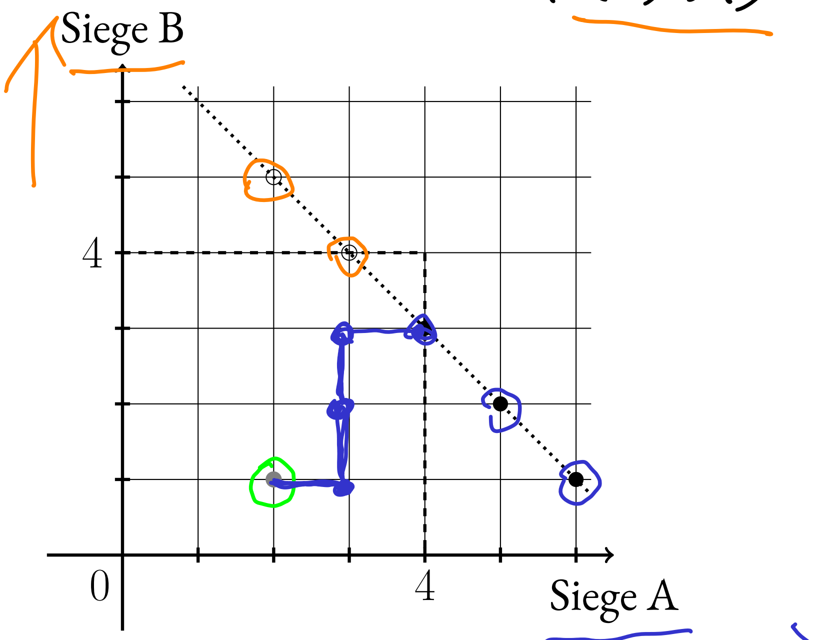
---

[1] Blaise Pascal, 1623–1662, Mathematiker, Physiker, Philosoph, ...
[2] Pierre de Fermat, 1607(?)–1665, Jurist, Gelehrter, Mathematiker, ...
[3] Antoine Gombard, 1607–1684, Schriftsteller und (Amateur-)Mathematiker

Fermats Berechnungsvorschlag („Aufzählung aller Vorwärtspfade")

Spiele im Geiste 4 Runden weiter (dann wäre das Spiel sicher entschieden), die 16 möglichen Spielweiterführungen sind

AAAA ABAA BAAA BBAA
AAAB ABAB BAAB BBAB
AABA ABBA BABA BBBA
AABB ABBB BABB BBBB



Ein Spielverlauf $\widehat{=}$ Nord-Ost-Pfad in $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Schwarz ausgefüllten Punkte sind Endstände solcher Spielweiterführungen, bei denen A gewinnt.

Demnach: W'keit, dass A vom Stand 2:1 gewinnt, ist $11/16$.

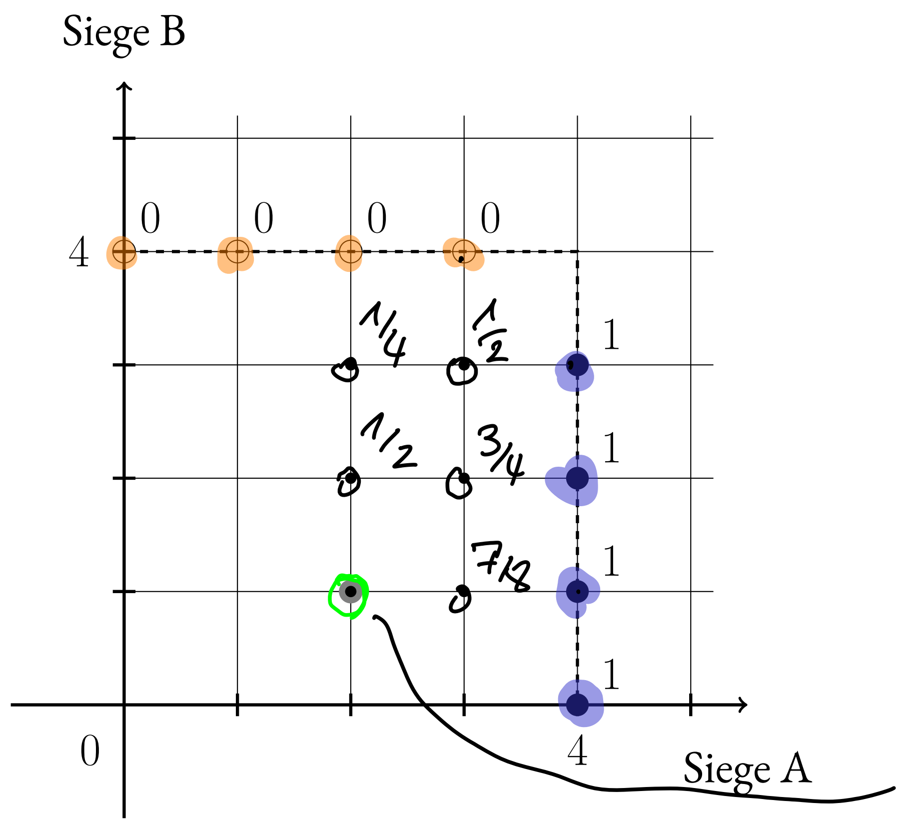
Pascals Berechnungsvorschlag („Rückwärtsrechnung“)

Berechne „rückwärts“ die Wahrscheinlichkeit $f(x,y)$, dass A vom Spielstand $x:y$ aus gewinnt:
Wenn man $f(x+1,y)$ und $f(x,y+1)$ schon kennt, kennt man auch

$$f(x,y) = \frac{1}{2}f(x+1,y) + \frac{1}{2}f(x,y+1).$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{16}$$

Bemerkung. Pascals Methode ist weniger rechenaufwendig (speziell wenn eine größere Anzahl als 4 gewonnene Runden für den Gesamtsieg betrachtet wird).
Wir werden Pascals Ansatz wieder treffen als (einen Spezialfall) der Lösung des Dirichlet-Problems für eine Markovkette.

Kapitel 1

Grundlegendes

In diesem Kapitel geht es um grundlegende Begriffe und Definitionen, die zur mathematischen Modellierung von Zufallssituationen verwendet werden.

1.1 Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Sei Ω (nicht-leere) Menge („Ergebnisraum“ oder „Stichprobenraum“),

$\omega \in \Omega$ heißt ein „Elementarereignis“

(gewisse) $A \subset \Omega$ nennen wir Ereignisse,
insbesondere $\Omega \ldots$ „sicheres Ereignis“, $\varnothing \ldots$ „unmögliches Ereignis“

Vorstellung: „der Zufall“ wählt ein $\omega \in \Omega$, wir sagen „A tritt ein“, wenn $\omega \in A$.

Wir betrachten $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ $(:= \{B : B \subset \Omega\})$ und lassen $A \in \mathcal{F}$ als Ereignisse zu.

Operationen (Mengeninterpretationen und ihre Interpretation für Ereignisse)**:**

$A^c := \Omega \setminus A$ … „A tritt nicht ein"
(A^c heißt Gegen- oder Komplementärereignis von A)

$A \cap B$ … „A und B treten ein"

$A \cup B$ … „A oder B treten ein"

$A \subset B$ … „A impliziert B"

Manchmal auch:

$$A \triangle B := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \text{ (symmetrische Differenz),}$$

… „genau eines der beiden Ereignisse A, B tritt ein"

Wir fordern, dass $\mathcal{F}$ erfüllt

$$\begin{aligned} &i) && \varnothing \in \mathcal{F}, \\ &ii) && A \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{F}, \\ &iii) && A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

(abzählbar unendl. viele)

Definition 1.1. Sei Ω eine nicht-leere Menge. $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$, das *i)–iii)* genügt, heißt eine *σ-Algebra* (über Ω).
Ein Paar $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{F}$ σ-Algebra über Ω heißt ein messbarer Raum (auch: Messraum oder Ereignisraum).

Bemerkung. Das „σ" im Namen erinnert an die abzählbare Operation in *iii)*; wenn man stattdessen

$$iii)' \quad A_1, A_2 \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$$

fordert, so heißt $\mathcal{F}$ eine *Algebra*.

Eine σ-Algebra ist insbesondere eine Algebra, denn $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2 \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$