Beispiel 6.11 (Konfidenzintervall für den Mittelwert im normalen Modell bei bekannter Varianz)**.** Unter P_ϑ seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}_{\vartheta,\sigma^2}$ mit $\vartheta \in \Theta := \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ sei bekannt (und fest).

Sei $q := \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ das $(1 - \alpha/2)$-Quantil der Standardnormalverteilung, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

$$I := \left[\overline{X} - q \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + q \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ist ein Konfidenzintervall für ϑ zum (Sicherheits-)Niveau $1 - \alpha$.

Frage: Was, wenn σ nicht bekannt ist?

(Idee: Schätze σ^2 erw.treu durch $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$,

ersetze σ in durch S.)

Beispiel 6.12 (Approximatives Konfidenzintervall im Binomialmodell mittels Normalapproximation, vgl. auch Bsp. 6.1). $X \sim \mathrm{Bin}_{n.\vartheta}$, $\cancel{\theta \in \Theta = [0, 1]}$, $\vartheta \in \Theta$

$\widehat{\vartheta} := \frac{X}{n}$, $\widehat{\sigma} := \sqrt{\widehat{\vartheta}(1-\widehat{\vartheta})}$, $\alpha \in (0,1)$, $q := \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$, dann ist

$$I := \left[\widehat{\vartheta} - q\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \widehat{\vartheta} + q\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

ein (approximatives) Konfidenzintervall für ϑ zum Sicherheitsniveau $1-\alpha$.

$$\mathrm{Var}_\vartheta[\hat{\vartheta}] = \frac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2} = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$$

$$\frac{\hat{\vartheta}-\vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \overset{d}{\approx} \mathcal{N}_{0,1}$$ (mit Satz v. de Moivre-Laplace, Kor. 5.2)

$$\frac{\hat{\vartheta}-\vartheta}{\sqrt{\frac{\hat{\vartheta}(1-\hat{\vartheta})}{n}}}$$ $\overset{d}{\approx}$ (denn $\hat{\vartheta}\ (=\hat{\vartheta}(n))$ ist konsistente Folge von Schätzer)

$$\underbrace{P_\vartheta(-q \le \overset{\sim \mathcal{N}_{0,1}}{Z} \le q)}_{=\,1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} = 1-\alpha} \approx P_\vartheta\left(-q \le \frac{\hat{\vartheta}-\vartheta}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \le q\right)$$

$$= P_\vartheta\left(\hat{\vartheta} - q\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \le \vartheta \le \hat{\vartheta} + q\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$$

$\lrcorner$

6.3.1 Rund um die multivariate Normalverteilung

$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\nu} dx$

Für das weitere Vorgehen benötigen wir einige Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung.

Beobachtung und Definition 6.13. *$n \in \mathbb{N}$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, so hat*

$$X := X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \quad \textit{die Dichte} \quad \frac{1}{\Gamma(n/2)} 2^{-n/2} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x),$$

$\chi_n^2 := \mathscr{L}(X)$ heißt Chiquadrat-Verteilung *mit n Freiheitsgraden.*

Beachte: $\chi_n^2 = \Gamma_{1/2,n/2}$, wo die Gamma-Verteilung $\Gamma_{\alpha,\nu}$ die Dichte $\frac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu x^{\nu-1} e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ besitzt (α = Skalen-, ν = Formparameter), siehe Aufg. 4.1.

Proposition 6.14. *Seien $\alpha, r, s > 0$, $X \sim \Gamma_{\alpha,r}$, $Y \sim \Gamma_{\alpha,s}$ unabhängig. Dann sind*

$$X + Y \quad \textit{und} \quad V := \frac{X}{X+Y} \quad \textit{unabhängig}$$

und $X + Y \sim \Gamma_{\alpha,r+s}$, $V \sim \beta_{r,s}$, wobei die Beta-Verteilung $\beta_{r,s}$ die Dichte

$$\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} v^{r-1} (1-v)^{s-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(v)$$

besitzt.

(X, Y) bijektiv auf $(0,\infty)^2$

$\Updownarrow$

$\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right) \updownarrow$

$(0,\infty) \times (0,1)$

Insbesondere bilden die Gamma-Verteilungen eine Faltungsfamilie (bezüglich des zweiten, des sogenannten Formparameters): $\Gamma_{\alpha,r} * \Gamma_{\alpha,s} = \Gamma_{\alpha,r+s}$.

Beweis von Proposition 6.14. Zu zeigen: $\alpha, r, s > 0$, $X \sim \Gamma_{\alpha,r}$, $Y \sim \Gamma_{\alpha,s}$ unabhängig, so sind

$$Z := X + Y \sim \Gamma_{\alpha,r+s}, \qquad \overbrace{\frac{X}{X+Y}}^{=:V} \sim \beta_{r,s} \quad \text{und unabhängig}$$

(X,Y) hat Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\alpha^{r+s}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r-1} y^{s-1} e^{-\alpha(x+y)} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)^2}(x,y)$$

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ \frac{x}{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1}(z,v) = \begin{pmatrix} zv \\ z(1-v) \end{pmatrix}, \quad D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{(x+y)^2} \\ 1 & -\frac{x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{x+y} = \frac{1\cdot(x+y) - x \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$|\det D\varphi(x,y)| = \left| -\frac{x}{(x+y)^2} - \frac{y}{(x+y)^2} \right| = \frac{|x+y|}{(x+y)^2} = \frac{1}{|x+y|}$$

$$f_{(Z,V)}(z,v) = \frac{f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(z,v))}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(z,v))|} =$$

$$= \frac{\alpha^{r+s}}{\Gamma(r+s)} z^{r+s-1} e^{-\alpha z} \cdot \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \cdot v^{r-1}(1-v)^{s-1}$$

Beweis von Beob. 6.13. Zu zeigen: $X_1, X_2, \dots, X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, so hat

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}_{0,1} \text{ u.i.v.,} \quad \text{so hat } X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \quad \text{die Dichte } \frac{1}{\Gamma(n/2)} 2^{-n/2} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x),$$

$X \sim \mathcal{N}_{0,1}$, so ist $X^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ $(= \chi_1^2)$:

$|X|$ hat Dichte $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ auf $(0, \infty)$; sei

$$\left(P(|X| \le x) = P(-x \le X \le x) = \Phi(x) - \underbrace{\Phi(-x)}_{= 1 - \Phi(x)} \right)$$

$$\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty), x \mapsto x^2, \quad \text{somit } \varphi^{-1}(y) = \sqrt{y}, \ \frac{d}{dy} \varphi^{\cancel{-1}}(y) = 2y$$

$$\left(\frac{d}{dy} \sqrt{y} = \frac{1}{2} y^{-1/2} \right)$$

also hat X^2 die Dichte

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

(siehe Beob. 1.40).

Dies zeigt die Behauptung für $n = 1$, der allgemeine Fall folgt daraus induktiv unter Verwendung von Proposition 6.14. □

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}}{2 \cdot (\sqrt{y})}$$

Korollar und Definition 6.15. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig, $\sim \mathcal{N}_{0,1}$.

1. $F_{m,n} := \dfrac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^2}$ hat Dichte $f_{m,n}(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{(m+n)}{2}}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$.

$\mathscr{L}(F_{m,n})$ heißt *Fisher-Verteilung*[2] mit m und n Freiheitsgraden
(präziser: mit m Zähler- und n Nenner-Freiheitsgraden).

2. $T_n := \dfrac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^2}}$ hat Dichte $t_n(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$.

(T_n ist „vorzeichenbehaftete" $\sqrt{F_{1,n}}$)

$\mathscr{L}(T_n)$ heißt *Student-Verteilung*[3] mit n Freiheitsgraden (auch Student'sche T-Verteilung genannt).
Bemerke: Die Student-Verteilung mit einem Freiheitsgrad ist die Cauchy-Verteilung.

Bemerkung. Sei T_n Student-verteilt mit n Freiheitsgraden, so ist $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}_{0,1}$.
(denn es gilt $t_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ lokal gleichmäßig).

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow \left(e^{x^2}\right)^{-1/2} = e^{-x^2/2}$$

[2] Nach Ronald Aylmer Fisher, 1890–1962
[3] Nach William Sealy Gosset, 1876–1937, der sie 1908 unter dem Pseudonym "Student" veröffentlichte.

Beweis von Korollar 6.15. 1. $X := \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{m}{2}}$, $Y := \sum_{j=1}^{n} Y_j^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}$ u.a., also $V := \dfrac{X}{X+Y} \sim \beta_{\frac{m}{2},\frac{n}{2}}$ nach Prop. 6.14.

Dann ist

$$\frac{\frac{1}{m}\sum^{m} X_i^2}{\frac{1}{n}\sum^{n} Y_j^2} = F_{m,n} = \frac{nX}{mY} = \frac{n}{m}\frac{\frac{X}{X+Y}}{\frac{Y}{X+Y}} = \frac{n}{m}\frac{V}{1-V},$$

mit

$$\varphi : (0,1) \to (0,\infty), v \mapsto \frac{n}{m}\frac{v}{1-v}, \quad \text{also } \varphi^{-1}(z) = \frac{mz}{n+mz}, \quad \frac{d}{dv}\varphi(v) = \frac{n}{m}\frac{1}{(1-v)^2}$$

ist $F_{m,n} = \varphi(V)$, hat also die Dichte

$$\begin{aligned} f_{m,n}(z) &= \frac{mnz}{(n+mz)^2}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{mz}{n+mz}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{n}{n+mz}\right)^{\frac{n}{2}-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mz)^{\frac{(m+n)}{2}}} \end{aligned}$$

2. T_n^2 hat (nach 1.) Dichte $f_{1,n}$, also hat $|T_n|$ Dichte $2t f_{1,n}(t^2)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$.

Da T_n symmetrisch um 0 verteilt ist (klar aus der Symmetrie von X_1), hat T_n die Dichte

$$\begin{aligned} |t| f_{1,n}(t^2) &= |t| \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} n^{n/2} \frac{(t^2)^{\frac{1}{2}-1}}{(n+t^2)^{(n+1)/2}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} \end{aligned}$$

□

Satz 6.16. *$X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$,*

$$M := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2.$$

$$\left(\mathbb{E}_{(\mu,\sigma^2)}[S^2] = \sigma^2\right)$$

Es gilt

1. *M und S^2 sind unabhängig, $M \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2/n}$, $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2_{n-1}$.*

2. *$T := \dfrac{\sqrt{n}(M-\mu)}{\sqrt{S^2}}$ ist Student-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden.*

$$\overset{d}{=} \mathcal{N}_{0,1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(M-\mu)}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}$$

χ^2_{n-1} bis auf Umnorm.

Korollar 6.17 (Student-Konfidenzintervall für den Erwartungswert im normalen Modell). *Unter P_ϑ, $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ seien*

$$X_1, X_2, \dots, X_n \textit{ u.i.v. } \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}.$$

Sei $\alpha \in (0,1)$, $q = q_{n-1,1-\alpha/2}$ das $1 - \frac{\alpha}{2}$-Quantil der Student-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden,

$$M := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2.$$

Dann ist

$$I := \left[M - q\sqrt{\frac{S^2}{n}}, M + q\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]$$

ein Konfidenzintervall für μ zum Irrtumsniveau α.

Beweis. $T := \frac{\sqrt{n}(M-\mu)}{\sqrt{S^2}}$ ist Student-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden (für jede Wahl von μ und σ^2),

$$P_{(\mu,\sigma^2)}\left(M - q\sqrt{\frac{S^2}{n}} \le \mu \le M + q\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right)$$
$$= P(-q \le T \le q) = \underbrace{P(T \le q)}_{1-\alpha/2} - \underbrace{P(T \le -q)}_{=\alpha/2} = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

□

$$-q \le T \le q \iff -q \le \frac{\sqrt{n}\,(M-\mu)}{\sqrt{S^2}} \le q \iff$$

Beispiel. Zwei Schlafmittel sollen verglichen werden, 10 Patienten erhielten in aufeinanderfolgenden Nächten Medikament A und B.

Die Daten (x_i = Anz. Stunden Schlaf mit Mittel A - Anz. Stunden Schlaf mit Mittel B bei Patient Nr. i):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,2	2,4	1,3	1,3	0,0	1,0	1,8	0,8	4,6	1,4

Es ist

$$\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i \approxeq 1{,}58, \qquad s = \Big(\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2\Big)^{1/2} \approxeq 1{,}23.$$

Nehmen wir an, die Daten stammen aus einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 (und die Ergebnisse der verschiedenen Patienten sind unabhängig).

Es ist $q_{9,\,0{,}995} \approxeq 3{,}25$ (aus einer Quantiltabelle oder beispielsweise mit R berechnet), demnach ist

$$\Big[\overline{x} \pm q\frac{s}{\sqrt{n}}\Big] \approxeq [0{,}31,\ 2{,}85]$$

ein Konfidenzintervall für μ (die mittlere zusätzliche Anzahl Stunden Schlaf, die Medikament A mehr bringt als Medikament B) zum Sicherheitsniveau $0{,}99 = 1 - 0{,}01$.

Beachte: (Sinnlos) genaue Werte mit Rechnergenauigkeit sind $\overline{x} - q\frac{s}{\sqrt{n}} \approxeq 0{,}3159481$, $\overline{x} + q\frac{s}{\sqrt{n}} \approxeq 2{,}8440519$, man sollte allerdings die Grenzen eines Konfidenzintervalls stets „konservativ“, d.h. nach außen, runden.