Satz 2.9 (Konstruktion von W'maßen via bedingte Wahrscheinlichkeiten). *Seien $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ ($\neq \emptyset$) abzählbar, $p_1 : \Omega_1 \to [0,1]$ Wahrscheinlichkeitsgewichtsfunktion, für $2 \le k \le n$ und beliebige $\omega_1 \in \Omega_1, \dots, \omega_{k-1} \in \Omega_{k-1}$ sei*

$$p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}} : \Omega_k \to [0,1] \qquad \textit{W'gewichtsfunktion}$$

setze $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$, wir schreiben $X_i : \Omega \to \Omega_i$ mit

$$X_i\big((\omega_1, \dots, \omega_n)\big) = \omega_i$$

für die i-te Koordinatenprojektion.

Dann ist $p : \Omega \to [0,1]$ mit

$$p\big((\omega_1, \dots, \omega_n)\big) := p_1(\omega_1) \cdot p_{2|\omega_1}(\omega_2) \cdot p_{3|\omega_1,\omega_2}(\omega_3) \cdot \dots \cdot p_{n|\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(\omega_n)$$

eine W'gewichtsfunktion, das W'maß P auf Ω mit Gewichten p erfüllt

1. $P(X_1 = \omega_1) = p_1(\omega_1)$ *für alle* $\omega_1 \in \Omega_1$,

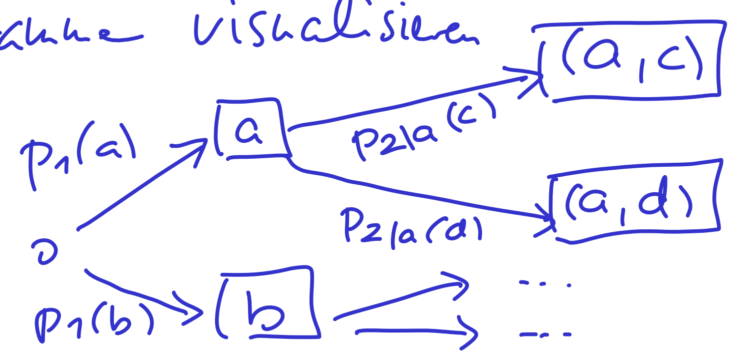
2. $$P(X_k = \omega_k \mid X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1}) = p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k)$$

   für $2 \le k \le n$, $\omega_1 \in \Omega_1, \dots, \omega_{k-1} \in \Omega_{k-1}$, sofern $P(X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1}) > 0$.

P ist durch 1. und 2. eindeutig festgelegt.

Man kann dies via Baumdiagramme visualisieren

z.B. $\Omega_1 = \{a, b\}$, $\Omega_2 = \{c, d\}$



$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$, $X_i\big((\omega_1, \dots, \omega_n)\big) = \omega_i$

$$p\big((\omega_1, \dots, \omega_n)\big) = p_1(\omega_1) \cdot p_{2|\omega_1}(\omega_2) \cdot p_{3|\omega_1,\omega_2}(\omega_3) \cdot \dots \cdot p_{n|\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(\omega_n)$$

Dann gilt: 1. $P(X_1 = \omega_1) = p_1(\omega_1)$, 2. $P(X_k = \omega_k \mid X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1}) = p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k)$

Beweis von Satz 2.9.

$$P(X_1 = \omega_1, \dots, X_k = \omega_k) = \sum_{\omega'_{k+1} \in \Omega_k} \dots \sum_{\omega'_n \in \Omega_n} P(\{(\omega_1, \dots, \omega_k, \omega'_{k+1}, \dots, \omega'_n)\})$$

$$= \sum_{\omega'_{k+1} \in \Omega_{k+1}} \dots \sum_{\omega'_n \in \Omega_n} p_1(\omega_1) p_{2|\omega_1}(\omega_2) \dots p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k) \cdot p_{k+1|\omega_1,\dots,\omega_k}(\omega'_{k+1}) \dots p_{n|\omega_1,\dots,\omega_k,\omega'_{k+1},\dots,\omega'_{n-1}}(\omega'_n)$$

$$= p_1(\omega_1) p_{2|\omega_1}(\omega_2) \dots p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k) \cdot \underbrace{\sum_{\omega'_{k+1} \in \Omega_{k+1}} p_{k+1|\omega_1,\dots,\omega_k}(\omega'_{k+1})}_{\text{"}=1\text{"}} \cdot \underbrace{\dots}_{=1 \cdot \dots \cdot 1} \underbrace{\sum_{\omega'_n \in \Omega_n} p_{n|\omega_1,\dots,\omega_k,\omega'_{k+1},\dots,\omega'_{n-1}}(\omega'_n)}_{=1}$$

□

Mit $k = 1$ folgt 1.

$$P(X_k = \omega_k \mid X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1})$$

$$= \frac{P(X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1}, X_k = \omega_k)}{P(X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1})}$$

$$= \dots = p_{k|\omega_1, \dots, \omega_{k-1}}(\omega_k)$$

Zur Eindeutigkeit: P erfülle 1. und 2.

$$P(\{X_1 = \omega_1\} \cap \{X_2 = \omega_2\} \cap \dots \cap \{X_n = \omega_n\})$$

$$= \underbrace{P(X_1 = \omega_1)}_{\overset{1.}{=} p_1(\omega_1)} \cdot \underbrace{P(X_2 = \omega_2 \mid X_1 = \omega_1)}_{\overset{2.}{=} p_{2|\omega_1}(\omega_2)} \cdot \underbrace{P(X_3 = \omega_3 \mid X_1 = \omega_1, X_2 = \omega_2)}_{\overset{2.}{=} p_{3|\omega_1, \omega_2}(\omega_3)}$$

$$\dots \cdot \underbrace{P(X_n = \omega_n \mid X_1 = \omega_1, \dots, X_{n-1} = \omega_{n-1})}_{= p_{n|\omega_1, \dots, \omega_{n-1}}(\omega_n)} \quad \lrcorner$$

Anwendung in Bsp. 2.7 (Pólya-Urne)

Die Urne enthält anfangs s schwarze und w weiße Kugeln, man legt jeweils die gezogene Kugel zurück zusammen mit c weiteren Kugeln derselben Farbe.

Wir betrachten n Züge, $\Omega = \{0,1\}^n \ni \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $X_i = \omega_i$ (mit Interpretation $1 \widehat{=}$ schwarz), es ist

$$p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k1}}(\omega_k) = \begin{cases} \dfrac{s + c\ell}{s + w + c(k-1)}, & \text{falls } \omega_k = 1, \\ \dfrac{w + c(k-1-\ell)}{s + w + c(k-1)}, & \text{falls } \omega_k = 0 \end{cases}$$

ω_{k-1}

$p_1(1) = \frac{s}{s+w}$

$= 1 - p_1(0)$

mit $\ell = \omega_1 + \dots + \omega_{k-1}$.

Satz 2.9 liefert (für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ mit $\omega_1 + \dots + \omega_n = m$)

$$P\big(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}\big) = p_1(\omega_1) \prod_{k=2}^{n} p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k)$$
$$= \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (s + ci) \cdot \prod_{j=0}^{n-m-1} (w + cj)}{\prod_{k=0}^{n-1} (s + w + ck)}$$

Beachte: dies hängt nicht von der Reihenfolge der Werte ω_i, nur von der Gesamtsumme ab (man sagt dazu auch, dass die X_i „austauschbar“ sind).

Anfangs s schwarze und w weiße Kugeln, man legt jeweils die gezogene Kugel zurück zusammen mit c weiteren Kugeln derselben Farbe.

$$P\big(\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\}\big) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{m-1}(s+ci)\cdot\prod\limits_{j=0}^{n-m-1}(w+cj)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(s+w+ck)}$$

Halten wir Spezialfälle fest:

- für $c=0$ (d.h. Ziehen mit Zurücklegen, also n unabhängige Versuche) ergibt sich $\left(\frac{s}{s+w}\right)^m\left(\frac{w}{s+w}\right)^{n-m}$
- für $c=-1$ (d.h. Ziehen ohne Zurücklegen) ergibt sich

  $$\frac{s(s-1)\cdots(s-m+1)\cdot w(w-1)\cdots(w-m-n+1)}{(s+w)(s+w-1)\cdots(s+w-n+1)} = \frac{\binom{s}{m}\binom{w}{n-m}}{\binom{s+w}{n}}\frac{1}{\binom{n}{m}} = \mathrm{Hyp}_{s,w,n}\big(\{m\}\big)\frac{1}{\binom{n}{m}}$$

  mit der hypergeometrischen Verteilung aus Bsp. 1.19.

  Wir können diese Rechnung folgendermaßen interpretieren: Die Anzahl gezogener schwarzer Kugeln in den n Zügen ist $\mathrm{Hyp}_{s,w,n}$-verteilt, gegeben, dass m schwarze Kugeln gezogen wurden, sind deren Positionen in der Reihenfolge uniform verteilt (es gibt $\binom{n}{m}$ mögliche Wahlen für m Positionen).

- für $c=1$ ergibt sich

  $$\frac{\frac{(s+m-1)!}{(s-1)!}\frac{(w+n-m-1)!}{(w-1)!}}{\frac{(s+w+n-1)!}{(s+w-1)!}} = \frac{(s+w-1)!}{(s-1)!(w-1)!}\frac{(s+m-1)!(w+n-m-1)!}{(s+w+n-1)!}$$

Sei $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ (die Anzahl gezogene schwarze Kugeln unter den ersten n Zügen), für $0 \le m \le n$ ist (für $c \neq 0$)

$$P(S_n = m) = \sum_{\substack{(w_1,\dots,\omega_n)\in\{0,1\}^n,\\ \omega_1+\cdots+\omega_n=m}} P\big(\{(\omega_1,\dots,\omega_n)\}\big)$$

$$= \binom{n}{m} \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(s+ci)\cdot\prod_{j=0}^{n-m-1}(w+cj)}{\prod_{k=0}^{n-1}(s+w+ck)} = \frac{\frac{\frac{s}{c}(\frac{s}{c}+1)\cdots(\frac{s}{c}+m-1)}{m!}\cdot\frac{\frac{w}{c}(\frac{w}{c}+1)\cdots(\frac{w}{c}+n-m-1)}{(n-m)!}}{\frac{\frac{s+w}{c}(\frac{s+w}{c}+1)\cdots(\frac{s+w}{c}+n-1)}{n!}}$$

$$= \frac{\binom{-s/c}{m}\cdot\binom{-w/c}{n-m}}{\binom{-(s+w)/c}{n}}$$

(mit $\binom{r}{m} := \frac{r(r-1)\cdots(r-m+1)}{m!}$ für $r \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$), beachte, dass der Faktor $(-1)^n$ sich oben herauskürzt. Diese Verteilung heißt auch *Pólya-Verteilung*.

(Im Fall $c = 0$ ergibt sich natürlich $P(S_n = m) = \mathrm{Bin}_{n,s/(s+w)}\big(\{m\}\big)$, vgl. Bsp. 1.20.)

$$\prod_{i=0}^{m-1}\left(\left(\frac{s}{c} + \cancel{c}\, i\right)\cdot c\right)$$

$$= c^m\, \frac{s}{c}\left(\frac{s}{c}+1\right)\cdots\left(\frac{s}{c}+m-1\right)$$

In Satz 2.9 hatten wir ein W'maß auf einem Produktraum (mit $m \in \mathbb{N}$ Faktoren) konstruiert. Gelegentlich benötigt man ein analoges Resultat für den Fall (abzählbar) unendlich vieler Faktoren – beispielsweise, um in dem hier betrachteten Kontext eine unendliche Münzwurffolge zu modellieren.

Bericht 2.10 (Konstruktion von W'maßen auf unendlichen Produkträumen)**.** Seien Ω_i, $i \in \mathbb{N}$ jeweils (höchstens) abzählbar, $\neq \emptyset$, $p_1(\cdot)$ W'gewichtsfunktion auf Ω_1, für $k \in \{2, 3, \dots\}$ und $\omega_1 \in \Omega_1, \dots, \omega_{k-1} \in \Omega_{k-1}$ sei $p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\cdot)$ W'gewichtsfunktion auf Ω_k, setze

$$\Omega := \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i = \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) : \omega_i \in \Omega_i\Big\}$$

(versehen mit

$$\mathcal{F} = \sigma\Big(\Big\{\{\omega_1\} \times \{\omega_2\} \times \dots \times \{\omega_n\} \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots : n \in \mathbb{N}, \omega_i \in \Omega_i \text{ für } 1 \le i \le n\Big\}\Big),$$

der sogenannten Produkt-σ-Algebra), für $i \in \mathbb{N}$ sei

$$X_i : \Omega \to \Omega_i,\ X_i\big((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) = \omega_i \qquad \text{(die Projektion auf die } i\text{-te Koordinate).}$$

Dann gibt es (genau) ein W'maß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

$$P\big(X_1 = \omega_1, \dots, X_k = \omega_k\big) = p_1(\omega_1) p_{2|\omega_1}(\omega_2) \cdots p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k) \tag{2.1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\omega_i \in \Omega_i$ für $1 \le i \le k$.

Dieses Resultat, das Satz 2.9 auf die Situation abzählbar unendlich vieler Ω_i, $i \in \mathbb{N}$ erweitert, werden wir in dieser Vorlesung nicht mit mathematischer Strenge beweisen (dafür siehe z.B. Georgii [G, Satz 3.12]).

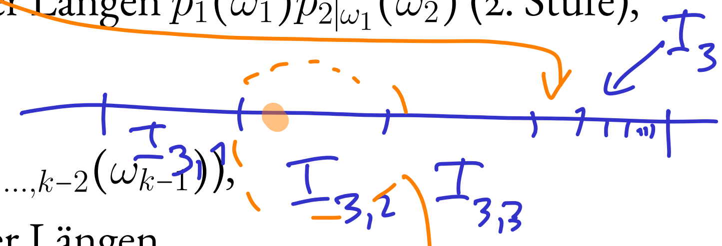
Grobe Beweisidee. Gedankenexperiment: Stellen wir uns vor, wir haben einen Computer, der genau eine uniform in $[0,1]$ verteilte Zufallsvariable U (mit beliebiger Präzision) simulieren kann. Wir möchten aus dem Wert von U die Werte von $X_1, X_2, \dots$ derart ablesen, dass (2.1) für alle k gilt.

Sei $\Omega_1 = \mathbb{N}$

Sei $U \sim \mathrm{unif}_{[0,1]}$.

- Zerlege $I = [0,1)$ in disjunkte, halboffene Intervalle I_{ω_1}, $\omega_1 \in \Omega_1$ der Längen $p_1(\omega_1)$ (1. Stufe),
- zerlege jedes I_{ω_1} in disjunkte, halboffene Intervalle I_{ω_1,ω_2}, $\omega_2 \in \Omega_2$ der Längen $p_1(\omega_1)p_{2|\omega_1}(\omega_2)$ (2. Stufe),

  ...



- wenn $I_{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{k-1}}$ konstruiert (mit Länge $p_1(\omega_1)p_{2|\omega_1}(\omega_2)\cdots p_{k-1|\omega_1,\dots,k-2}(\omega_{k-1})$), zerlege in disjunkte, halboffene Intervalle $I_{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{k-1},\omega_k}$, $\omega_k \in \Omega_k$ der Längen $p_1(\omega_1)p_{2|\omega_1}(\omega_2)\cdots p_{k-1|\omega_1,\dots,k-2}(\omega_{k-1})p_{k|\omega_1,\dots,k-1}(\omega_k)$ (k. Stufe), etc.

Für $u \in [0,1)$ gibt es genau ein

$$X(u) = \big(X_1(u), X_2(u), \dots\big) \in \Omega,$$

so dass gilt (siehe auch die Skizze für den Fall $\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \mathbb{N}$)

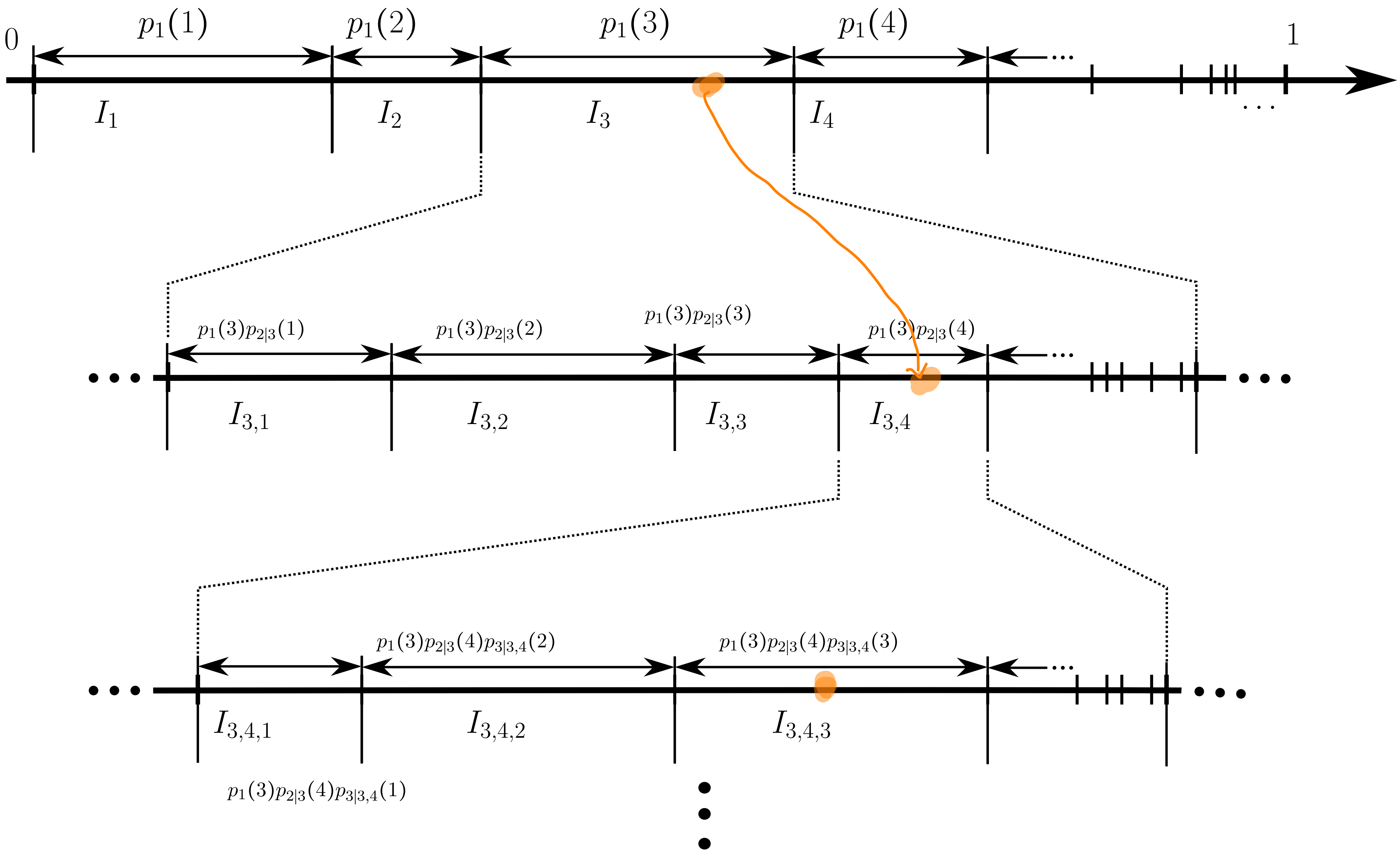
$$u \in I_{X_1(u),X_2(u),\dots,X_k(u)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und dies definiert $X : [0,1) \to \Omega$. Damit ist

$\{\omega_1\} \times \{\omega_2\} \times \dots \times \{\omega_k\} \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \dots$

$$\begin{aligned}
P\big(X_1 = \omega_1, \dots, X_k = \omega_k\big) &= \big(\mathrm{unif}_{[0,1]} \circ X^{-1}\big)\big(\cancel{\{\omega_1\} \times \{\omega_2\} \times \{\omega_k\} \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times} \cdots\big)\\
&= \mathrm{unif}_{[0,1]}\big(\{u \in [0,1) : X_1(u) = \omega_1, X_2(u) = \omega_2, \dots, X_k(u) = \omega_k\}\big)\\
&= \mathrm{unif}_{[0,1]}\big(I_{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k}\big) = \text{Länge von } I_{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k}\\
&= p_1(\omega_1)p_{2|\omega_1}(\omega_2)\cdots p_{k-1|\omega_1,\dots,k-2}(\omega_{k-1})p_{k|\omega_1,\dots,k-1}(\omega_k),
\end{aligned}$$

d.h. (2.1) gilt.


0
$p_1(1)$
$p_1(2)$
$p_1(3)$
$p_1(4)$
1
I_1
I_2
I_3
I_4
$p_1(3)p_{2|3}(1)$
$p_1(3)p_{2|3}(2)$
$p_1(3)p_{2|3}(3)$
$p_1(3)p_{2|3}(4)$
$I_{3,1}$
$I_{3,2}$
$I_{3,3}$
$I_{3,4}$
$p_1(3)p_{2|3}(4)p_{3|3,4}(2)$
$p_1(3)p_{2|3}(4)p_{3|3,4}(3)$
$I_{3,4,1}$
$I_{3,4,2}$
$I_{3,4,3}$
$p_1(3)p_{2|3}(4)p_{3|3,4}(1)$

2.3 Unabhängigkeit

Definition 2.11. Wir betrachten einen W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ereignisse A und B heißen (stochastisch) *unabhängig*, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(strenggenommen: unabhängig bezüglich P). Im Fall $P(A) > 0$ sind also A und B unabhängig g.d.w. $P(B \mid A) = P(B)$.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Beispiel. 1. Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne, $A = \{$erste gezogene Kugel ist schwarz$\}$, $B = \{$zweite gezogene Kugel ist schwarz$\}$, so sind A und B unabhängig.

(Dies gilt natürlich nicht, wenn ohne Zurücklegen gezogen wird.)

s Schwarze, w weiße Kugeln

$$P(A) = \frac{s}{s+w}$$

$$P(B) = \frac{(s+w) \cdot s}{(s+w)^2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{s \cdot s}{(s+w)^2} = P(A) \cdot P(B)$$

32 Karten $(32 = 8 \cdot 4)$

2. Ziehe zwei Karten ohne Zurücklegen aus einem (perfekt gemischten) Skatblatt, sei

$$A = \{\text{erste gezogene Karte ist ein As}\},$$
$$B = \{\text{zweite gezogene Karte hat Farbe Pik}\}.$$

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{24 \cdot 8 + 8 \cdot 7}{32 \cdot 31} = \frac{1}{4} \cdot \frac{31}{31} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1 \cdot 7 + 3 \cdot 8}{32 \cdot 31} = \frac{31}{32 \cdot 31} = \frac{1}{32} = P(A) \cdot P(B),$$

Bemerkung. Gilt $P(A) \in \{0, 1\}$, so ist A von sich selbst unabhängig.

denn $P(A) = P(A \cap A) \overset{!}{=} P(A) \cdot P(A) = (P(A))^2$

Definition 2.12. Sei I (beliebige) Indexmenge, A_i, $i \in I$ Ereignisse. Die Familie $(A_i)_{i\in I}$ heißt *unabhängig*, wenn für jedes endliche $J \subset I$, $J \neq \varnothing$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Beispiel 2.13. (Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt i.A. nicht Unabhängigkeit)**.** Werfe eine faire Münze zwei Mal, sei

$$A = \{\text{erster Wurf ist } K\},\ \ B = \{\text{zweiter Wurf ist } K\},$$
$$C = \{\text{beide Würfe haben das gleiche Ergebnis}\}.$$

Es ist

$$P(A) = P(B) = \overbrace{P(C)}^{=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \quad P(A\cap B) = P(A\cap C) = P(B\cap C) = \frac{1}{4},$$

d.h. je zwei der betrachteten Ereignisse sind unabhängig (man sagt: A, B, C sind paarweise unabhängig), aber

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{8},$$

d.h. A, B, C sind nicht unabhängig. (Dies ist auch intuitiv klar, denn $(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c) = C$.)