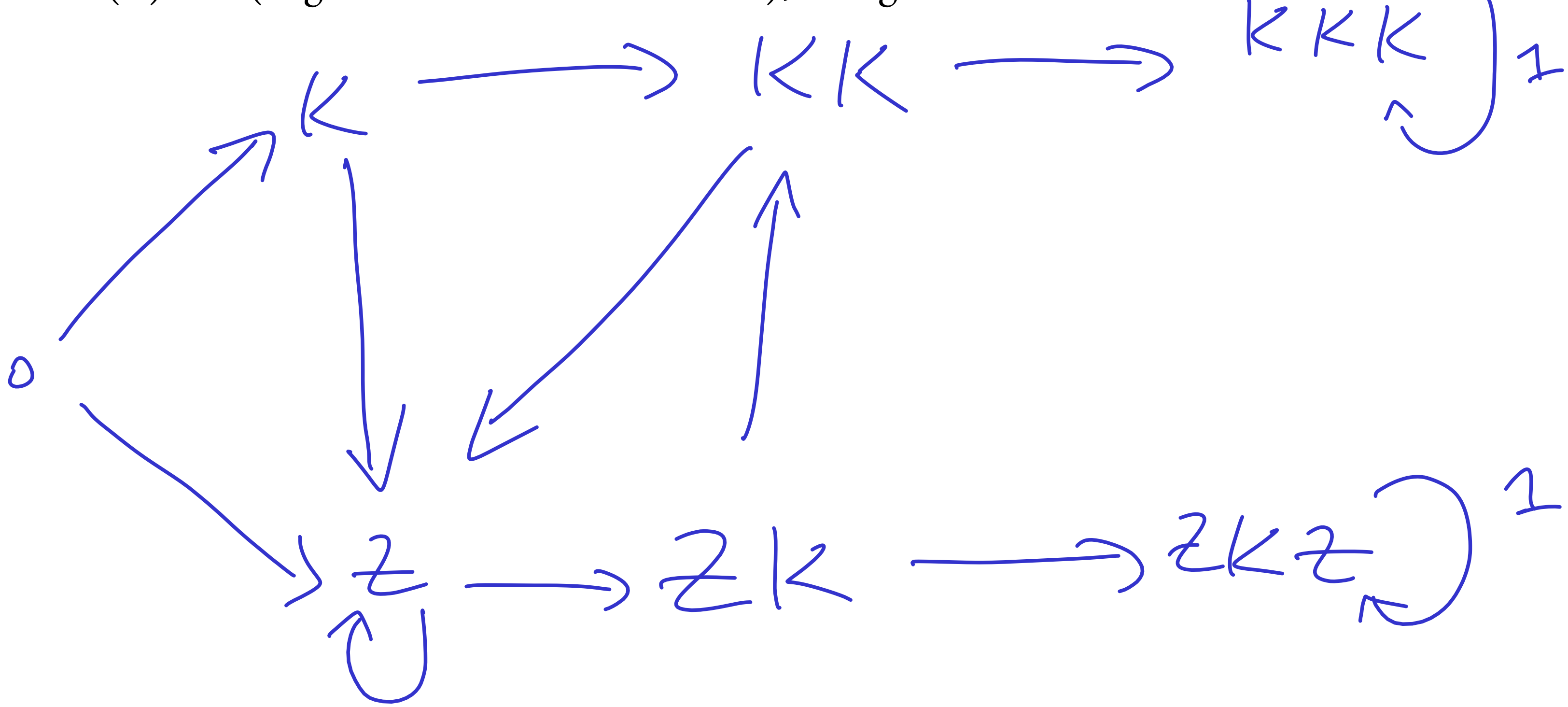
Kapitel 7

Markovketten

Beispiel 7.1. Eine faire Münze wird solange geworfen, bis entweder das Muster KKK ($\widehat{=}$ Sieg von Spieler A) oder das Muster ZKZ ($\widehat{=}$ Sieg von Spieler B) gefallen ist.

$$P(\text{Sieg A}) = ?$$

Sei $w(x) = P$(A gewinnt von Zustand x aus), zerlege nach dem ersten Schritt:



	0	K	Z	KK	ZK	KKK	ZKZ
0	0	1/2	1/2	0	0	0	0
K	0	0	1/2	1/2	0	0	0
Z	0	0	1/2	0	1/2	0	0
KK			⋮				
ZK							
KKK	0	0	0	0	0	1	0
ZKZ	0	0	0	0	0	0	1

Definition 7.2. Sei S abzählbare Menge ($S \neq \varnothing$).

1. $A = (a_{x,y})_{x,y \in S}$ heißt eine *stochastische Matrix* (über S), wenn gilt

$$a_{x,y} \geq 0 \text{ für alle } x, y \in \mathrm{S} \quad \text{und} \quad \sum_{y \in S} a_{x,y} = 1 \text{ für alle } x \in \mathrm{S}.$$

2. Eine Folge $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen mit Werten in S heißt eine *Markovkette*[1] (mit Zustandsraum S und Übergangsmatrix A), wenn

$$P(X_{n+1} = y \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = P(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x) = a_{x,y}$$

für alle $n \in \mathbb{N}, x_0, \ldots, x_{n-1}, x, y \in S$ mit $P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x) > 0$ gilt.

Die Verteilung von X_0 heißt die *Startverteilung* (von X).

Die entscheidende Eigenschaft ist, dass der (bzw. die Verteilung des) „neue" Zustand X_{n+1} nur vom direkt vorhergehenden X_n abhängt, nicht von der „gesamten Vorgeschichte" $X_0, X_1, \ldots, X_n$ – dies nennt man auch die „Gedächtnislosigkeit" einer Markovkette (s.a. Beob. 7.3, 3. unten).

[1] zu Ehren von Andrei Andreyevich Markov, 1852–1922 benannt

Beispiele.

1. $X_0, X_1, \ldots$ u.i.v. mit $X_i \sim \nu$ (ν ist ein W'maß auf S) sind (trivialerweise) eine Markovkette, mit $a_{x,y} = \nu(\{y\})$.

$$P(X_{n+1}=y \mid X_0=x_0, \ldots, X_{n-1}=x_{n-1}, X_n=x) = P(X_{n+1}=y)$$
$$= \nu(\{y\}) = a_{x,y}$$
$$= P(X_{n+1}=y \mid X_n=x)$$

2. (Irrfahrt) $Y_1, Y_2, \ldots$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{Z}^d$, $Y_i \sim \nu$,

$$X_n := Y_1 + \cdots + Y_n, \; n \in \mathbb{N} \quad (\text{und } X_0 := 0).$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Markovkette, $a_{x,y} = \nu(\{y-x\})$.

$X_1 = X_0 + Y_1$

$X_2 = Y_1 + Y_2 = X_1 + Y_2$

$(X_n = X_{n-1} + Y_n)$

Denn:

$x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{Z}^d$

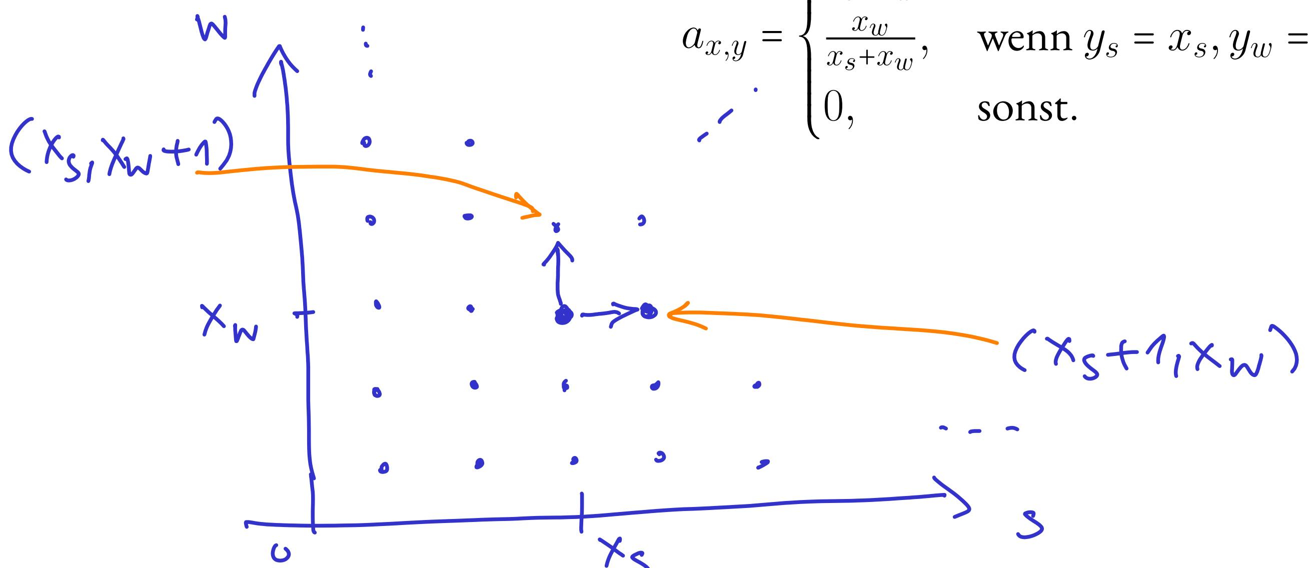
$$P(X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n, X_{n+1}=x_{n+1})$$
$$= P(Y_1=x_1-0, Y_2=x_2-x_1, \ldots, Y_n=x_n-x_{n-1}, Y_{n+1}=x_{n+1}-x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n+1} P(Y_i = x_i - x_{i-1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \nu(\{x_i - x_{i-1}\})$$

$$P(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_0=x_0, \ldots, X_n=x_n) = \frac{P(X_0=x_0, \ldots, X_n=x_n, X_{n+1}=x_{n+1})}{P(X_0=x_0, \ldots, X_n=x_n)}$$
$$= \nu(\{x_{n+1}-x_n\}) = a_{x_n, x_{n+1}}$$

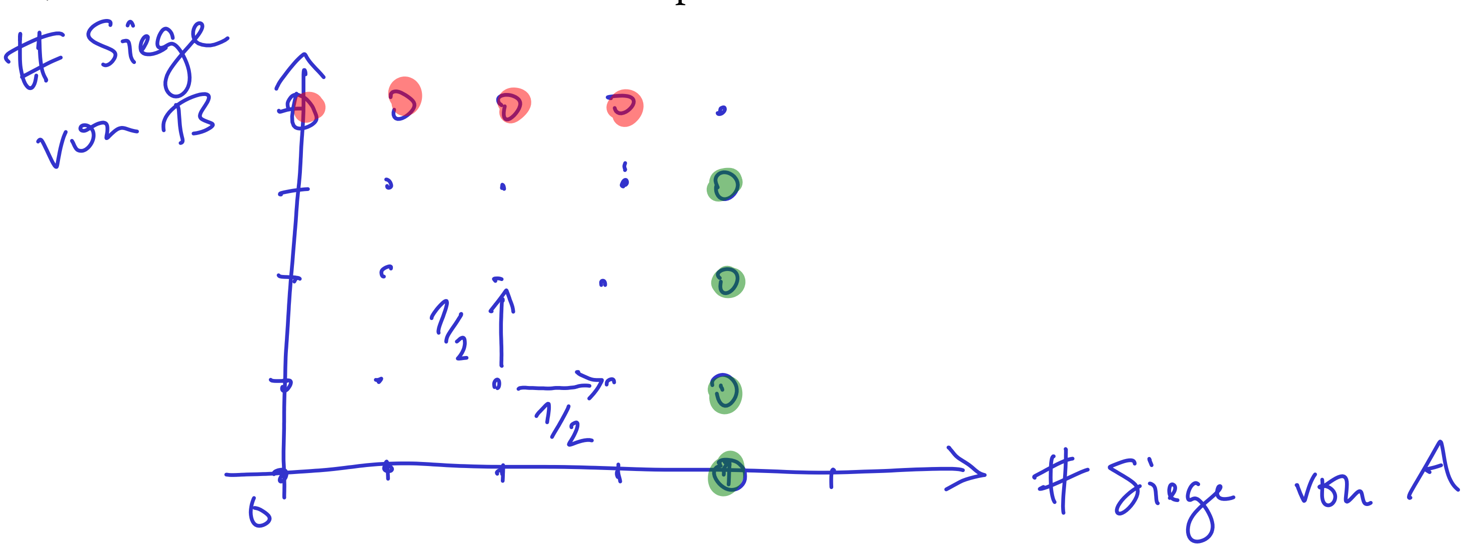
3. (Pólya-Urne, vgl. Bsp. 2.7) S_n = Anz. schwarze, W_n = Anz. weiße Kugeln in der Pólya-Urne nach n Zügen, $X_n := (S_n, W_n)$ mit Werten in $\mathbb{N}^2$ (und $X_0 = (1,1)$, sagen wir).

   $(X_n)_n$ ist Markovkette, für $x = (x_s, x_w), y = (y_s, y_w) \in \mathbb{N}^2$ ist

$$a_{x,y} = \begin{cases} \frac{x_s}{x_s+x_w}, & \text{wenn } y_s = x_s + 1, y_w = x_w, \\ \frac{x_w}{x_s+x_w}, & \text{wenn } y_s = x_s, y_w = x_w + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



4. Das „Problem der Punkte“ aus Kapitel 0 ist eine Variation über 2. mit $S = \mathbb{Z}^2$, $\nu = \frac{1}{2}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_{(1,0)}$.



Beobachtung 7.3. 1. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von ZVn mit Werten in S. S ist eine Markovkette mit Übergangsmatrix A und Startverteilung μ g.d.w. $\leftarrow \left(\mu(\{x\}) = P(X_0 = x) \right)$

$$(*) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\, x_0, \dots, x_n \in S : \; P(X_0 = \overset{x_0}{\cancel{0}}, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu(\{x_0\}) \prod_{i=1}^{n} a_{x_{i-1},x_i}$$

z.: $(*) \Rightarrow$ „Markovkette":

$$\overset{!}{=} P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \frac{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n+1} = x_{n+1})}{P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}$$

$a_{x_n, x_{n+1}}$

$$= \frac{\mu(\{x_0\}) \prod_{i=1}^{n+1} a_{x_{i-1},x_i}}{\mu(\{x_0\}) \prod_{i=1}^{n} a_{x_{i-1},x_i}}$$

Sei X MK (mit Ü'mat A, Start.vert. μ)

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \underbrace{P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})}_{= a_{x_{n-1}, x_n}} \cdot \underbrace{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})}_{= a_{x_{n-2}, x_{n-1}} \cdots a_{x_0, x_1} \mu(\{x_0\})}$$

2. Zu jeder Übergangsmatrix A und Startverteilung μ (auf einer abzählbaren Menge S) gibt es eine Markovkette mit dieser Übergangsmatrix und dieser Startverteilung: Dies folgt aus Bericht 2.10 (Konstruktion von W'maßen auf unendlichen Produkträumen), setze dort $p_1 = \mu$ und $p_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k) = a_{\omega_{k-1},\omega_k}$.

Man schreibt oft P_μ (und $\mathbb{E}_\mu$ für Erwartungswerte unter P_μ), wenn $\mathcal{L}(X_0) = \mu$, um die Startverteilung einer Markovkette zu betonen, im Fall $\mu = \delta_x$ mit einem $x \in S$ auch P_x und $\mathbb{E}_x$.

3. („Markov-Eigenschaft") Für jede Markovkette $(X_n)_n$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $B \subset S^{n+1}$, $B' \subset S^{m+1}$ und $x \in S$ gilt

$$P\Big((X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in B' \,\Big|\, (X_0, \dots, X_n = x_n) \in B, X_n = x\Big)$$
$$= P_x\Big((X_0, X_1, \dots, X_m) \in B'\Big)$$

(sofern $P\Big((X_0, \dots, X_n = x_n) \in B, X_n = x\Big) > 0$).

Anschaulich gesprochen sind bedingt auf die „Gegenwart" (den Zustand X_n zur Zeit n) die „Zukunft" (das Pfadstück $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$) und die „Vergangenheit" (das Pfadstück $(X_0, X_1, \dots, X_n)$) unabhängig.

Denn: Betr. $B = \{(x_0, x_1, \dots, x_n)\}$, $B' = \{(y_0, y_1, \dots, y_m)\}$,
$(x_n = x = y_0)$
dann ist

$$(*)\quad P\big((X_0, \dots, X_n) \in B, X_n = x, (X_n, \dots, X_{n+m}) \in B'\big)$$
$$= P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+m} = y_m)$$
$$= \underbrace{\mu(\{x_0\}) \cdot a_{x_0 x_1} \cdots a_{x_{n-1}, x_n}}_{= \underbrace{P(X_0 = x_0, \dots X_n = x_n)}_{= P((X_0, \dots, X_n) \in B, X_n = x)}} \cdot \underbrace{a_{x_n, y_1} \cdot a_{y_1, y_2} \cdots a_{y_{m-1}, y_m}}_{= P_x(X_0 = y_0, X_1 = y_1, \dots, X_m = y_m)}$$

$x_n = x$

d.h. $(*)$ wahr, wenn B, B' einpunktig. Allg. Fall: Aufsummieren der Punkte in B und B'

Korollar 7.4. *Sei $X = (X_n)_n$ Markovkette mit Übergangsmatrix $A = (a_{x,y})_{x,y\in S}$ und*

$$a_{x,y}^{(n)} = P_x(X_n = \cancel{x}\; y),\ x,y \in S$$

die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit (für $n \in \mathbb{N}_0$).
Dann gilt

$$a_{x,z}^{(n+m)} = \sum_{y\in S} a_{x,y}^{(n)} a_{y,z}^{(m)}, \quad x,z \in S,\ m,n \in \mathbb{N}_0 \tag{7.1}$$

Insbesondere ist $A^n = (a_{x,y}^{(n)})_{,y\in S}$ gegeben durch

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Faktoren}}, \quad \text{das } n\text{-fache Matrixprodukt von } A \text{ mit sich selbst}.$$

Das System von Gleichungen (7.1) heißt die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen[2].

[2] Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903–1987 ; Sydney Chapman, 1888–1970