Bemerkung 2.14. Sind $(A_i, i \in I)$ unabhängig, so auch $(A_i^c, i \in I)$ und für $J, J' \subset I$ endlich mit $J \cap J' = \varnothing$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{j' \in J'} A_{j'}^c\Big) = \prod_{j \in J} P(A_j) \cdot \prod_{j' \in J'} (1 - P(A_{j'})). \tag{2.2}$$

"$\{j\}$" "$\{j'\}$"

Bew.: • Betr. den Fall $|J| = |J'| = 1$:

$$P(A_j \cap A_{j'}^c) = P(A_j) - P(A_j \cap A_{j'}) = P(A_j) - P(A_j)P(A_{j'})$$
$$= P(A_j)(1 - P(A_{j'}))$$

• sei $J \subset I$ allg., $J' = \{j'\}$:

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j \cap A_{j'}^c\Big) = P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) - P\Big(\bigcap_{k \in J \cup \{j'\}} A_k\Big)$$
$$= \prod_{j \in J} P(A_j) - \prod_{k \in J \cup \{j'\}} P(A_k) = \prod_{j \in J} P(A_j)(1 - P(A_{j'})).$$

• nehmen wir an, Formel (2.2) gilt für bel. J und J' mit $J \cap J' = \varnothing$, $|J'| \le m$.

Sei $J'' = J' \dot\cup \{j''\}$ mit $|J'| = m$.

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{j' \in J''} A_{j'}^c\Big) = P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{j' \in J'} A_{j'}^c\Big) - P\Big(\bigcap_{j \in J \cup \{j''\}} A_j \cap \bigcap_{j' \in J'} A_{j'}^c\Big)$$
$$= \prod_{j \in J} P(A_j) \cdot \prod_{j' \in J'} (1 - P(A_{j'})) \cdot (1 - P(A_{j''}))$$

$\lrcorner$

Diskussion.

1. Stochastische Unabhängigkeit ist eine (gemeinsame) Eigenschaft von Ereignissen und deren Wahrscheinlichkeiten; (Un-)abhängigkeit ist nicht automatisch mit (Nicht-)Existenz eines kausalen Zusammenhangs gleichzusetzen.

Beispiel: Wir befragen eine zufällig an einem Samstagnachmittag auf dem Mainzer Gutenbergplatz ausgewählte Testperson. Die Ereignisse „hat Schuhgröße ≥ 41" und „hat Führerschein" sind nicht unabhängig (gegeben $\{$hat Schuhgröße $\geq 41\}$ handelt es sich vermutlich eher um einen Erwachsenen, daher ist die Chance, dass die Person auch einen Führerschein hat größer als der Anteil der Führerscheinbesitzer in der Gesamtbevölkerung, die auch viele Kinder umfasst). Trotzdem wäre die Behauptung, dass große Füße Führerscheine hervorbringen, natürlich unsinnig.

2. Nichtsdestoweniger *modelliert* man die erneute Wiederholung eines gewissen zufälligen Experiments unter gleichen Bedingungen (oder auch die Befragung verschiedener Versuchspersonen aus einer großen Grundgesamtheit) zumeist mittels (angenommener) stochastischer Unabhängigkeit. Die Annahme unabhängiger Kopien eines gewissen Zufallsexperiments bildet häufig einen zentralen Ansatzpunkt statistischer Analysen.

Definition 2.15. I (nicht-leere) Indexmenge, X_i, $i \in I$ Zufallsvariablen (auf demselben W'raum), X_i habe Wertebereich $(S_i, \mathscr{A}_i)$. Die Familie $(X_i)_{i \in I}$ heißt *unabhängig*, wenn für jedes endliche $\varnothing \neq J \subset I$ und beliebige $B_j \in \mathscr{A}_j$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in B_j\}\Big) = \prod_{j \in J} P(X_j \in B_j).$$

Also: Eine Familie von ZVn ist u.a. g.d.w. jede endliche Teilfamilie u.a. ist.

Beobachtung 2.16. 1. $(X_i)_{i \in I}$ unabhängig und $\varnothing \neq I' \subset I$, so ist auch $(X_i)_{i \in I'}$ eine unabhängige Familie. (Dies folgt sofort aus der Definition: wähle $B_j = S_j$ für $j \in I \setminus I'$.)

2. Seien $(S'_i, \mathscr{A}'_i)$ messbare Räume, $f_i : S_i \to S'_i$ messbar, X_i, $i \in I$ unabhängige ZVn (X_i hat Werte in S_i). Dann sind auch

$$Y_i := f_i(X_i), \ i \in I \ \text{ unabhängig},$$

(Erinnerung: Als Funktion $Y_i = f_i \circ X_i$)

3. Eine Familie von Ereignissen A_i, $i \in I$ ist unabhängig g.d.w. die Familie $\mathbf{1}_{A_i}$, $i \in I$ der zugehörigen Indikatorvariablen u.a. ist. (Dies folgt sofort aus der Definition zusammen mit Bem. 2.14.)

denn: sei $J \subset I$, $|J| < \infty$, $B_j' \in \mathcal{A}_j'$ (d.h. $B_j' \subset S_j'$, messb.)

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} \underbrace{\{Y_j \in B_j'\}}_{= \{X_j \in f_j^{-1}(B_j')\}}\Big) = \prod_{j \in J} P(X_j \in f_j^{-1}(B_j')) = \prod_{j \in J} P(Y_j \in B_j')$$

zu 3.: $S_i = \{0,1\}$ $\forall i \in I$, „relevante" B_j sind $\{1\}$ und $\{0\}$

Bericht 2.17. In der Situation von Def. 2.15 sei $\mathcal{E}_i$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathscr{A}_i$ und es gelte für alle $J \subset I$ mit $|J| < \infty$ und $B_j \in \mathcal{E}_j$

$$P\Big(\bigcap_{j\in J}\{X_j \in B_j\}\Big) = \prod_{j\in J} P(X_j \in B_j).$$

(d.h. $B, B' \in \mathcal{E}_i \Rightarrow B \cap B' \in \mathcal{E}_i$ und $\sigma(\mathcal{E}_i) = \mathscr{A}_i$)

Dann sind die $(X_i)_{i\in I}$ unabhängig.
Insbesondere gilt im reellwertigen Fall ($S_i = \mathbb{R}$): $(X_i)_{i\in I}$ sind unabhängig g.d.w.

$$\text{für alle } J \subset I,\ |J| < \infty,\ x_j \in \mathbb{R} \text{ gilt} \quad P\Big(\bigcap_{j\in J}\{X_j \le x_j\}\Big) = \prod_{j\in J} P(X_j \in x_j).$$

Beweisidee. Zeige induktiv über $\#\{j \in J : B_j \in \mathscr{A}_j \setminus \mathcal{E}_j\}$, dass die Bed. aus Def. 2.15 erfüllt ist, verwende dazu Eindeutigkeitssatz für Maße (Bericht 1.10). Für Details siehe z.B. [G, Satz 3.19].

Satz 2.18. *$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ZVn, X_i habe Werte in S_i, S_i abzählbar für $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig g.d.w. gilt*

$$\forall\, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \ldots, x_n \in S_n \;:\; \underbrace{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)}_{= P((X_1,\ldots,X_n) = (x_1,\ldots,x_n))} = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

$(\mathcal{A}_i = 2^{S_i})$

Bew.:

„$\Rightarrow$": Wähle $B_i = \{x_i\}$ in Def. 2.15 ✓

„$\Leftarrow$": Sei $B_1 \subset S_1, \ldots, B_n \subset S_n$,

$$P(\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\} \cap \ldots \cap \{X_n \in B_n\})$$

$$= P\Big(\bigcup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n} \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}\Big)$$

$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_n) \in B_1 \times \ldots \times B_n} \underbrace{P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)}_{= P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n)}$$

$$= \sum_{x_1 \in B_1} \sum_{x_2 \in B_2} \cdots \sum_{x_n \in B_n} P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n) = \Big(\sum_{x_1 \in B_1} P(X_1 = x_1)\Big) \cdots \Big(\sum_{x_n \in B_n} P(X_n = x_n)\Big)$$

$$= P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n)$$

Bericht 2.19 (Unabhängigkeit im reellwertigen Fall mit Dichte)**.** Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ reellwertige ZVn, $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Wahrscheinlichkeitsdichten (d.h. $\int_{\mathbb{R}} f_i(x)\,dx = 1$), dann sind äquivalent: (auf denselben W'raum def.)

1. $X_1, \ldots, X_n$ sind u.a. und X_i hat Dichte f_i für $i = 1, \ldots, n$ (d.h. $P(X_i \in B) = \int_B f_i(x)\,dx$).
2. Die ZV $X = (X_1, \ldots, X_n)$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ hat Dichte

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

d.h. die gemeinsame Dichte hat Produktgestalt.

Zur Beweisidee (mit Bericht 2.17 verwende Halbintervalle):

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$$

$$= \int_{\{x' \in \mathbb{R}^n :\, x_1' \le x_1, \ldots, x_n' \le x_n\}} f(y)\,dy \overset{\text{2. gelte}}{=} \int \cdots \int f_1(y_1) \cdots f_n(y_n)\,dy_1\,dy_2 \cdots dy_n$$

$(x_1', \ldots, x_n')$; $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$

$$= \int_{(-\infty, x_1]} f_1(y_1)\,dy_1 \cdots \int_{(-\infty, x_n]} f_n(y_n)\,dy_n = P(X_1 \le x_1) \cdots P(X_n \le x_n)$$

Beispiel 2.20. 1. $X_1, \dots, X_n$ u.a., $X_i \sim \mathcal{N}_{0,1}$, dann hat $X := (X_1, \dots, X_n)$ Dichte

$$f_X(x) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_i^2/2} = (2\pi)^{-n/2} \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\|x\|^2\Big)}_{= (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)\right)}, \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

(mit $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, der euklidischen Norm).

Sei $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ orthogonale $n \times n$-Matrix (d.h. $M^T M = I$, die $n \times n$-Identitätsmatrix),

$$Y^T := M X^T \quad \text{d.h. } Y = (Y_1, \dots, Y_n) \text{ mit } Y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} X_j,$$

dann sind $Y_1, \dots, Y_n$ u.a., $Y_i \sim \mathcal{N}_{0,1}$.

Bem. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = M \cdot x$ ist bijektiv, diffbar

$\varphi^{-1}(y) = M^T y$, $\varphi' = M$

$Y^T = \varphi(X^T)$ hat Dichte (Bericht 1.42, Dichtetransf. formel)

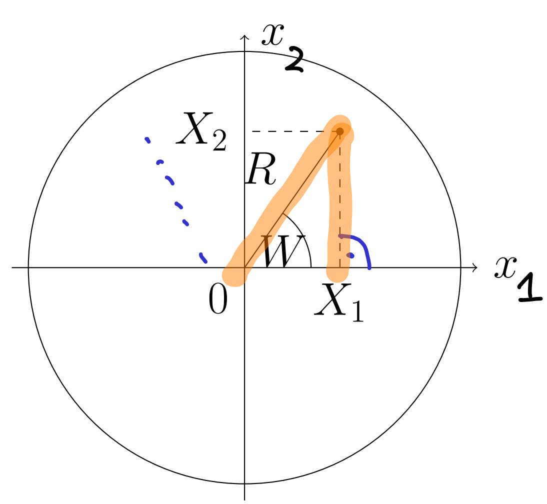
$$f_Y(y) = \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\det \varphi'(\varphi^{-1}(y))|} = \frac{f_X(M^T y)}{|\det M|} = f_X(M^T y)$$

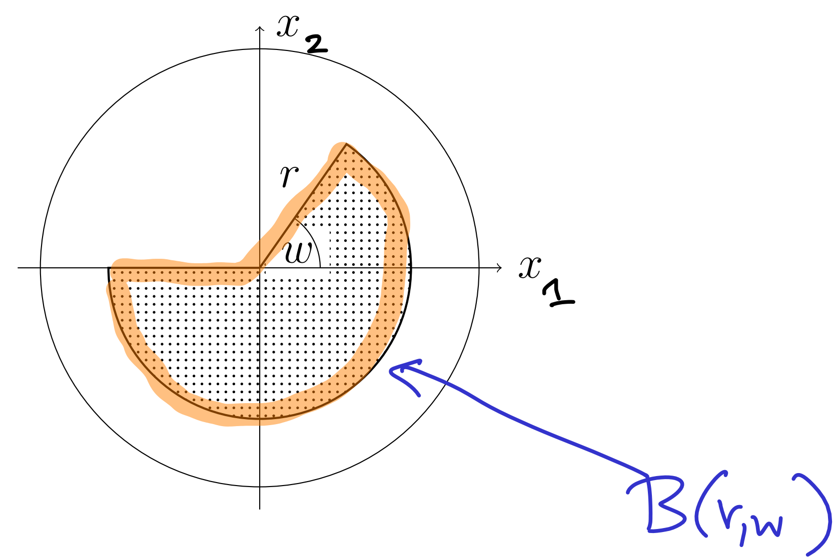
$$\|M^T y\| = \|y\| \longrightarrow = f_X(y)$$

2. Sei X ein uniform im Einheitskreis $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \le 1\}$ verteilter Punkt (in kartesischen Koordinaten $X = (X_1, X_2)$), R der Radius, W der Winkel von X (in Polarkoordinaten), also

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad W = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 \ge 0, \\ \pi - \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 < 0, X_2 \ge 0, \\ -\pi - \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 < 0, X_2 < 0. \end{cases}$$

$\sin(W) = \frac{X_2}{R}$





Dann sind R und W unabhängig, R hat Dichte $f_R(r) = 2r\mathbf{1}_{[0,1]}(r)$, W hat Dichte $f_W(w) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi)}(w)$.

$$P(R \le r, W \le w) = P(X \in B(r,w)) = \int_0^r 2r' dr' \cdot \int_{-\pi}^{w} \frac{1}{2\pi} dw'$$

$$= \frac{\text{Fläche von } B(r,w)}{\pi} = \frac{\pi r^2 \frac{w+\pi}{2\pi}}{\pi} = r^2 \cdot \frac{w+\pi}{2\pi}$$