Kapitel 5

Zentraler Grenzwertsatz

Vorbemerkung. Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v., $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2 < \infty$.
Wir haben gesehen, dass $X_1 + \cdots + X_n \approx n\mu$ mit hoher Wahrscheinlichkeit, denn

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{f.s.}$$

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu \overset{?!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$X_1 + \cdots + X_n - n\mu \approx 0$$

gemäß dem starken Gesetz der großen Zahlen (Satz 4.6), aber feiner gefragt:

Wie groß ist $\underbrace{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}_{\text{Was ?}}$ typischerweise?

(so dass
etwas nicht-trivial
zufälliges entsteht)

$$P(|X_1+\dots+X_n - n\cdot\mu| > A)$$

$$\leq \frac{1}{A^2} \underbrace{Var[X_1+\dots+X_n]}_{= n\sigma^2} = \frac{n\sigma^2}{A^2}$$

Chebyshev-Ungl.

für $A = K\cdot\sqrt{n}\cdot\sigma$ mit $K >> 1$

ergibt sich $\frac{n\sigma^2}{A^2} = \frac{1}{K^2}$

Um einzusehen, dass $\sqrt{n}$ die korrekte Größenordnung der typischen Abweichungen von $X_1 + \cdots + X_n$ vom $n\mu$ ist, betrachten wir

$$X_i \sim \mathrm{Ber}_p, \quad \text{mit einem } p \in (0,1) \qquad \text{(der „einfachste Fall“)},$$

dann ist

$$Z_n := X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$$

(d.h. $P(X_1 + \dots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$)

Erinnerung (Stirling-Approximation[1]). Es gilt

$$n! = \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}e^{\rho(n)} \quad \text{mit } 0 < \rho(n) < \tfrac{1}{12n}$$

„Korrekturfaktor", der für
(großes n
nahe an 1
liegt.

Dies findet sich in vielen Analysis-Lehrbüchern oder auch in W. Feller, An introduction to probability and its applications, Vol. I, Wiley, 1968, Kap. II.9.

Numerische Beispiele zur Güte der Stirling-Approximation

n	$n!$	$\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$	$1 - \frac{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}}{n!}$
3	6	5,836	0,027
4	24	23,506	0,021
5	120	118,019	0,016
6	720	710,078	0,014
7	5.040	4980,396	0,012
8	40.320	39902,395	0,011
9	362.880	359.536,873	0,0088
10	3.628.800	3.598.695,619	0,0078
15	1.307.674.368.000	1.300.430.722.199,47	0,0054

[1] James Stirling, 1692–1770

Sei $C > 0$ fest, $p \in (0,1)$, betrachte

$$n, k \in \mathbb{N} \text{ mit } |k - np| \le C\sqrt{n}$$

Es ist

$$P(Z_n = k) = \mathrm{Bin}_{n,p}(\{k\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}} \exp\left(-nh\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) \cdot K(n,k)$$

mit

$$h(t) := t\log\left(\tfrac{t}{p}\right) + (1-t)\log\left(\tfrac{1-t}{1-p}\right), \quad t \in [0,1]$$

und Korrekturfaktor

$$K(n,k) := \exp\left(\rho(n) - \rho(k) - \rho(n-k)\right) \quad \left(= \left(1 + o(1)\right) \text{ für } n,k \to \infty\right),$$

d.h.: ein Term, der nach 0 konvergiert

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}\, n^{n+\frac12} \cancel{e^{-n}}}{\sqrt{2\pi}\, k^{k+\frac12} \cancel{e^{-k}} \cdot \cancel{\sqrt{2\pi}}\, (n-k)^{n-k+\frac12} \cancel{e^{-(n-k)}}} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{e^{\rho(n)}}{e^{\rho(k)} e^{\rho(n-k)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n \cdot \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}} \underbrace{\left(\left(p\,\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n}} \cdot \left((1-p)\,\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right)^{n}} \cdot K(n,k)$$

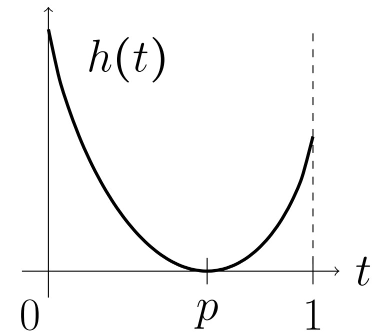
$$= \exp\left(n\left[\frac{k}{n}\log\left(p \cdot \frac{n}{k}\right) + \frac{n-k}{n}\log\left((1-p)\cdot\frac{n}{n-k}\right)\right]\right)$$

$$P(Z_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}\exp\left(-nh\left(\frac{k}{n}\right)\right)\cdot K(n,k), \qquad h(t) := t\log\left(\tfrac{t}{p}\right) + (1-t)\log\left(\tfrac{1-t}{1-p}\right)$$

Es ist $\left(|k - n\cdot p| \le C\cdot\sqrt{n}\right.$

$$h(p) = 0, \quad \text{für } t \in (0,1) \text{ ist } h'(t) = \log\left(\frac{t}{p}\right) - \log\left(\frac{1-t}{1-p}\right)$$

$$h''(t) = \frac{1}{t(1-t)} \; (\ge 0)$$



(wir möchten $k \approx n\cdot p + z\cdot\sqrt{n}$ einsetzen, d.h. $\frac{k}{n} \approx p + \frac{z}{\sqrt{n}}$)

Taylorentwicklung von h um p:

$$h\left(\frac{k}{n}\right) = \cancel{\underbrace{h(p)}_{=0}} + \cancel{\underbrace{\left(\frac{k}{n}-p\right)h'(p)}_{=0}} + \frac{1}{2}h''(p)\left(\frac{k}{n}-p\right)^2 + O\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|^3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{p(1-p)}\left(\frac{k}{n}-p\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

(Erinnerung: exakter Korrekturterm wäre $\frac{1}{6}h'''(\tilde{p})\cdot\left(\frac{k}{n}-p\right)^3$ mit einem $\tilde{p}$ zwischen $\frac{k}{n}$ und p

und $\left|\frac{1}{6}h'''(\tilde{p})\cdot\left(\frac{k}{n}-p\right)^3\right| \le \frac{1}{6}\sup_{|\tilde{p}-p|\le C/\sqrt{n}}|h'''(\tilde{p})|\cdot\left|\frac{k}{n}-p\right|^3$)

somit

$$e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)} = e^{-\frac{1}{2}\frac{n}{p(1-p)}\left(\frac{k}{n}-p\right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$e^{-nh\left(\frac{k}{n}\right)} = e^{-\frac{1}{2}\frac{n}{p(1-p)}\underbrace{\left(\frac{k}{n}-p\right)^2}_{\frac{(k-np)^2}{n^2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$= \underbrace{\exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right)}\;\underbrace{e^{O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}_{=\left(1+o(1)\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2p(1-p)}\left(\frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

Term, der für $n \to \infty$ (und $k \to \infty$, so dass $|k-np| \le C\cdot\sqrt{n}$) gegen 0 konv.

Weiter ist

$$\frac{1}{\sqrt{n\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\cdot\left(1+o(1)\right)$$

(Übung)

Insgesamt:

$$P(Z_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\, e^{-\frac{1}{2p(1-p)}\left(\frac{k-np}{\sqrt{n}}\right)^2}\cdot\left(1+o(1)\right)$$

Zusammenfassend haben wir bewiesen:

Satz 5.1 (Satz von de Moivre-Laplace[2], lokale Normalapproximation der Binomialverteilung). *Sei* $C > 0$, $p \in (0,1)$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}z^2\right)$$

die Dichte der Standard-Normalverteilung. Mit

$$z_n(k) := \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{k : |k-np| \le C\sqrt{n}} \left| \frac{\mathrm{Bin}_{n,p}(\{k\})}{\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\big(z_n(k)\big)} - 1 \right| = 0.$$

$$P(Z_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{p(1-p)}\left(\frac{k-np}{\sqrt{n}}\right)^2} \cdot \left(1 + o(1)\right)$$

[2] Abraham de Moivre, 1667–1754; Pierre-Simon Laplace, 1749–1827

Korollar 5.2 (Normalapproximation der Binomialverteilung). *Sei* $p \in (0,1)$, $Z_n \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$, *setze*

$$Z_n^* := \frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Dann gilt für $-\infty \le a < b \le \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le Z_n^* \le b) = \int_a^b \varphi(z)\, dz.$$

(mit $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$, Dichte der Standard-Normal-Vert.)

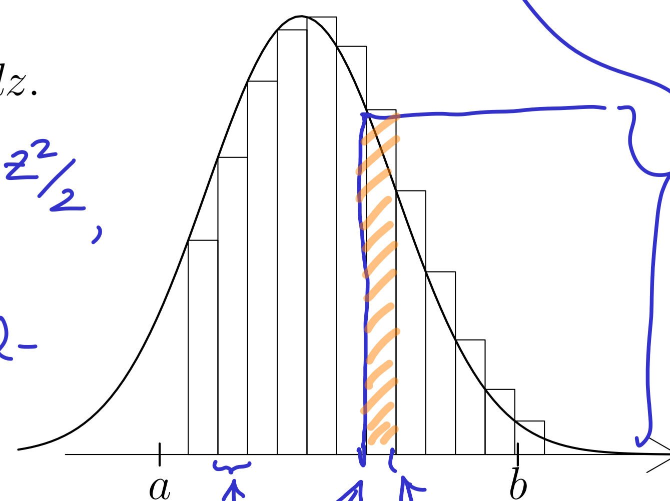
Sei $-\infty < a < b < \infty$.

$$P(a \le Z_n^* \le b) = \sum_{k:\ a \le \underbrace{\frac{k-n\cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}}_{= z_n(k)} \le b} P(Z_n = k) = \left(\sum_{k:\ a \le z_n(k) \le b} \frac{\varphi(z_n(k))}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \cdot (1+o(1))$$

$$\Big\downarrow\ n \to \infty$$

$$\int_a^b \varphi(z)\, dz$$

(Riemann-Approx. des Integrals)



$\varphi(z_n(k))$

$z_n(k)$

$z_n(k) + \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} = z_n(k+1)$

Maschenweite $\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$

Sei nun $a = -\infty < b < \infty$:

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $a' < 0$ so, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$P(Z_n^* < a') \leq P(|Z_n^*| > |a'|) \leq \frac{1}{(a')^2} < \frac{\varepsilon}{4}$$

(mit Chebychev-Ungleichung, Satz 4.1) und

$$\int_{-\infty}^{a'} \varphi(z)\,dz < \frac{\varepsilon}{4}$$

gilt. Dann ist für n genügend groß

$$\begin{aligned}\left|P(Z_n^* \leq b) - \int_{-\infty}^{b} \varphi(z)\,dz\right| &\leq \left|P(a' \leq Z_n^* \leq b) - \int_{a'}^{b} \varphi(z)\,dz\right| + \left|P(Z_n^* < a')\right| + \int_{-\infty}^{a'} \varphi(z)\,dz \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Der Fall $b = \infty$ kann analog behandelt werden (Übung). $\square$