Beispiel 1.2. Ω endliche (oder abzählbare) Menge, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ („diskreter messbarer Raum")

Beispiel-Instanzen:

- Wurf einer Münze, $\Omega = \{K, Z\}$
- Wurf eines Würfels, $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
- Dreifacher Würfelwurf, $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^3$ $(= \{(a_1, a_2, a_3) : a_i \in \{1, \ldots, 6\}\})$
- Wartezeit, bis in einer Münzwurffolge der erste Erfolg kommt, $\Omega = \mathbb{N}_0$

Abgesehen von maßtheoretischen Schwierigkeiten im überabzählbaren Fall, die dann i.A. die Wahl $\mathcal{F} = 2^\Omega$ unmöglich machen – vgl. z.B. [G, Satz 1.5], („Warum so vorsichtig?") –, hilft eine σ-Algebra auch bei der Modellierung unterschiedlicher „Informationsgenauigkeit":

Bemerkung. $\mathcal{F}$ modelliert, welche Ereignisse wir beobachten können, z.B.

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}, \qquad \mathcal{F} = \big\{\varnothing, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, \ldots, 6\}\big\}$$

entspricht folgendem Zufallsexperiment: Jemand wirft einen 6er-Würfel, verrät uns nur, ob Augenzahl gerade oder ungerade.

Definition 1.3. $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ mit

(N) $P(\Omega) = 1$ („Normierung“) und

(A) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ paarw. disjunkt $\Rightarrow P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ („σ-Additivität“)

heißt ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* (auf $(\Omega, \mathcal{F})$).
Ein solches Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt ein *Wahrscheinlichkeitsraum*.
Für $A \in \mathcal{F}$ nennen wir $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit (des Ereignisses A unter dem Maß P).

Beispiel 1.4 (diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)**.** Ω endlich oder abzählbar, $p : \Omega \to [0,1]$ Abbildung mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad A \subset \Omega$$

definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, 2^{\Omega})$.
p heißt die (Wahrscheinlichkeits-)Gewichtsfunktion von P, $p(\omega)$ heißt das (Wahrscheinlichkeits-)Gewicht von ω.

Offenbar: $P(A) \geq 0$, $P(A) \leq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, erfüllt (N).

Zu (A): $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_n} p(\omega) = \sum_{\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} p(\omega)$

(bei absolut konv. Reihen hängt der Wert nicht von der Reihenfolge ab.)

Beispiel-Instanzen (für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume)

1. Uniforme Verteilung auf einer endlichen Menge: $|\Omega| < \infty$, $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ sind die Gewichte der uniformen Verteilung auf Ω. Das zugehörige P heißt oft auch die Laplace-Verteilung[1] (auf Ω).

   (a) (Wurf eines fairen 6er-Würfels) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $p(\omega) = 1/6$ für $\omega \in \Omega$

   (b) (dreimaliger Wurf eines fairen 6er-Würfels) $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) : \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ für $i = 1,2,3\}$, $p((\omega_1,\omega_2,\omega_3)) = 1/6^3 = 1/216$

   (c) (n verschiedene Objekte / Zahlen in zufälliger Reihenfolge)

   $$\Omega = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : x_1,\ldots,x_n \in \{1,2,\ldots,n\} \text{ paarweise verschieden}\}$$

   („symmetrische Gruppe der Ordnung n"), $p((x_1,x_2,\ldots,x_n)) = 1/n!$

2. Ein verfälschter Münzwurf: $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, $p(\text{Kopf}) = 0.6 = 1 - p(\text{Zahl})$

3. Eine winziges Modell für Spam, das Sprache und Status einer Email betrachtet:

   kein Spam

   $$\Omega = \{\texttt{Deutsch}, \texttt{Englisch}\} \times \{\texttt{Spam}, \texttt{keinSpam}\},$$

   $p\big((\texttt{Deutsch}, \texttt{Spam})\big) = 0.2, p\big((\texttt{Deutsch}, \texttt{keinSpam})\big) = 0.1, p\big((\texttt{Englisch}, \texttt{Spam})\big) = 0.6, p\big((\texttt{Englisch}, \texttt{kei}$
   0.1

4. Anzahl Würfe, bevor beim wiederholten fairen Münzwurf zum ersten Mal Kopf kommt: $\Omega = \mathbb{N}_0$, $p(n) = (1/2)^n \cdot (1/2) = 2^{-n-1}$ für $n \in \Omega$

[1] nach Pierre-Simon Laplace, 1749–1827

Lemma 1.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, so gilt

$$P(\varnothing) = 0 \tag{1.1}$$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \quad \text{(endliche Additivität)}, \tag{1.2}$$

$$\text{insbesondere } P(A) + P(A^c) = 1$$

(beachte $P(A \cap A^c) = P(\phi) \overset{0}{=}$)

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B) \quad \text{(Monotonie)} \tag{1.3}$$

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-Subadditivität}) \tag{1.4}$$

$A_n \nearrow_{n\to\infty} A$ (d.h. $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ mit $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$)
oder $A_n \searrow_{n\to\infty} A$ (d.h. $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ mit $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$),
so gilt $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ (σ-Stetigkeit) (1.5)

Bew.:

zu (1.1) $\quad P(\phi) = P(\phi \cup \phi \cup \phi \cup \dots) \overset{(A)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(\phi) = 0$

zu (1.2) $\quad$ Falls $A \cap B = \phi$: $P(A \cup B) = P(A \cup B \cup \phi \cup \phi \cup \dots)$

$$\overset{(A)}{=} P(A) + P(B) + \underbrace{P(\phi)}_{=0} + \underbrace{P(\phi)}_{=0} + \dots$$

$$= P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0 \text{ in diesem Fall}}$$

Allgemeiner: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ ist paarw. disjunkt

wobei $A \setminus B := A \cap B^c$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

$$= \underbrace{\big(P(A \setminus B) + P(A \cap B)\big)}_{= P(A)} + \underbrace{\big(P(B \setminus A) + P(A \cap B)\big)}_{= P(B)}$$

zu (1.3)

$$P(A) \leq P(A) + P(B \setminus A) = P(B)$$

zu (1.4) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$ wobei $A_n' = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right)$,

also $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n' \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(A_n')}_{\leq P(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Zu (1.5) Betr. $A_n \nearrow A$, setze $A_n' = \underbrace{A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)}_{= A_n \setminus A_{n-1}}$ $(A_0 = \emptyset)$

somit $P\left(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}_{=A}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n')$

$$= \lim_{k \to \infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} P(A_n \setminus A_{n-1})}_{= P(A_k)}$$

$\lrcorner$