Korollar 7.4. *Sei $X = (X_n)_n$ Markovkette mit Übergangsmatrix $A = (a_{x,y})_{x,y\in S}$ und*

$$a_{x,y}^{(n)} = P_x(X_n = y),\ x, y \in S$$

die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit (für $n \in \mathbb{N}_0$).
Dann gilt

$$a_{x,z}^{(n+m)} = \sum_{y\in S} a_{x,y}^{(n)} a_{y,z}^{(m)}, \quad x, z \in S,\ m, n \in \mathbb{N}_0 \tag{7.1}$$

Insbesondere ist $A^n = (a_{x,y}^{(n)})_{,y\in S}$ gegeben durch

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Faktoren}}, \quad \text{das } n\text{-fache Matrixprodukt von } A \text{ mit sich selbst.}$$

(Bem. zur Notation: $a_{x,y}^n \neq a_{x,y}^{(n)}$ ↑ wenn man dies als $(a_{x,y})^n$ liest)

Das System von Gleichungen (7.1) heißt die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen[2].

(Formel v.d. totalen W'keit, Satz 2.5, 1.)

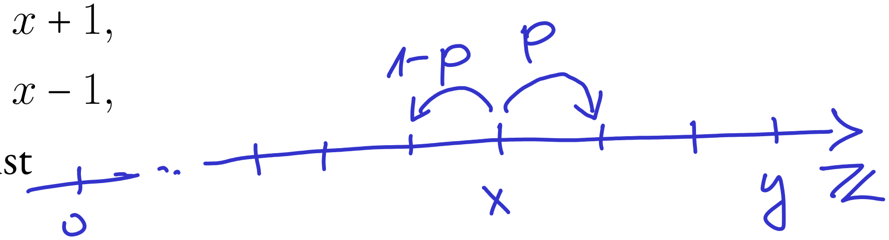
Denn: $P_x(X_{n+m} = z) = \sum_{y\in S} P_x(\underbrace{X_n = y}_{(X_0,\dots,X_n)\in\{(x_0,\dots,x_n)\in S^{n+1}:\, x_n = y\}}, X_{n+m} = z)$

$\overset{\text{Beob. 7.3}}{=} \sum_{y\in S} \underbrace{P_x(X_n = y)}_{= a_{x,y}^{(n)}} \cdot \underbrace{P_y(X_m = z)}_{= a_{y,z}^{(m)}}$

[2] Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903–1987 ; Sydney Chapman, 1888–1970

Beispiel 7.5 (Gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Sei $p \in [0,1]$, $S = \mathbb{Z}$,

$$(*) \qquad a_{x,y} = \begin{cases} p, & y = x+1, \\ 1-p, & y = x-1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Es ist Homogenität der Übergangsdyn.

$$a_{x,y}^{(n)} = a_{0,y-x}^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+y-x}{2}} p^{(n+y-x)/2} (1-p)^{(n-y+x)/2}, & \text{wenn } y-x \equiv n \pmod 2 \text{ und } |y-x| \le n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ansatz 1) Per Induktion über n prüfen, dass dies die Chapman-Kolmogorov-Glgen löst.
(zur Übung, falls Lust)

2) Stelle (X_n) dar mittels:
$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ mit Y_i u.i.v, $P(Y_1 = +1) = p = 1 - P(Y_1 = -1)$
$(X_0 := 0)$, dies ist MK mit Überg.mat. $(a_{x,y})$ aus $(*)$.

$X_n = y - x \iff k = \frac{n+y-x}{2}$ Schritte $+1$ } unter $Y_1, \dots, Y_n$

$n - k = \frac{n-y+x}{2}$ —"— -1

(Wir sehen hier ein Beispiel für einen Periodeneffekt: Man kann gerade Zustände $x \in 2\mathbb{Z}$ nur zu geraden Zeiten besuchen.)

7.1 Treffwahrscheinlichkeiten und erwartete Eintrittszeiten

Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovkette mit Zustandsraum S und Übergangsmatrix A, für $B \subset S$ sei

$$T_B := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\}$$

(ist eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ($\cup \{\infty\}$))

die (erste) Treffzeit von B und X_{T_B} der Ort des ersten Besuchs in B. ist ZV.

Für $z \in B$ sei

$$h_z(x) := P_x(T_B < \infty, X_{T_B} = z)$$

Satz 7.6. *h_z ist die kleinste nicht-negative Lösung von*

$$\begin{cases} f(x) = \mathbf{1}_{\{x=z\}}, & x \in B, \checkmark \\ f(x) = \sum_{y \in S} a_{x,y} f(y), & x \in S \setminus B. \checkmark \end{cases} \tag{7.2}$$

In Matrixschreibweise lautet die zweite Zeile von (7.2) $f(x) = Af(x)$, $x \in S \setminus B$.
Man sagt dazu auch: f ist „harmonisch" (bezgl. A) auf $S \setminus B$.

Falls $S = \{1, \dots, d\}$: $f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(d) \end{pmatrix}$

Zeige: $h_z(\cdot)$ löst (7.2): $h_z(x) = \begin{cases} 1, & x = z \\ 0, & x \in B \setminus \{z\} \end{cases}$

Sei $x \in S \setminus B$:

$$P_x(T_B < \infty, X_{T_B} = z) = \sum_{y \in S} \underbrace{P_x(X_1 = y, T_B < \infty, X_{T_B} = z)}_{(1_+)}$$

Beob. 7.3,3.

$$= \underbrace{P_x(X_1 = y)}_{= a_{x,y}} \cdot \underbrace{P_y(T_B < \infty, X_{T_B} = z)}_{= h_z(y)}$$

$h_z(x) := P_x(T_B < \infty, X_{T_B} = z)$, $f : S \to [0,\infty)$ eine Lösung von (7.2), d.h. $\begin{cases} f(x) = \mathbf{1}_{\{x=z\}}, & x \in B, \\ f(x) = \sum_y a_{x,y} f(y), & x \in S \setminus B. \end{cases}$

Zu zeigen: $h_z \le f$.

Zeige: $\forall x \in S : P_x(T_B \le n, X_{T_B} = z) \le f(x) \quad (*)$

induktiv über n.

(für $x \in B$ gilt $(*)$ stets)

$n = 0$: ✓

Ind. schritt: Sei $(*)$ für ein n erfüllt, betr. $x \in S \setminus B$:

$$P_x(T_B \le n+1, X_{T_B} = z) = \sum_{y \in S} P_x(\underbrace{X_1 = y}_{(X_0,X_1) \in S \times \{y\}}, \underbrace{T_B \le n+1, X_{T_B} = z}_{(X_1,\dots,X_{n+1}) \in \{\text{Pfade, die } B \text{ treffen, und zwar zuerst in } z\}})$$

$$= \sum_{y \in S} \underbrace{P_x(X_1 = y)}_{a_{x,y}} \underbrace{P_y(T_B \le n, X_{T_B} = z)}_{\le f(y) \text{ n. Ind. ann.}}$$

$$\le \sum_y a_{x,y} f(y) = f(x)$$

Bemerkung. Für die Untersuchung in Satz 7.6 könnten wir die Zustände $x \in B$ absorbierend machen, d.h. übergehen zu

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{x,y})_{x,y \in S} \quad \text{mit} \quad \widetilde{a}_{x,y} = \begin{cases} a_{x,y}, & x \notin B \\ \mathbf{1}_{\{y=x\}}, & x \in B \end{cases}$$

Es ergibt sich damit dieselbe Lösung.

Bemerkung 7.7 (Stochastische Lösung eines diskreten Dirichlet-Problems)**.** In der Situation von Satz 7.6 sei $|S| < \infty$, $\varnothing \neq B \subset S$, es gelte

$$\forall\, x \in S :\ P_x(T_B < \infty) > 0$$

Dann ist für jedes $g : B \to \mathbb{R}$ das (lineare) Gleichungssystem

$$\begin{cases} Af(x) = f(x), & x \in S \setminus B \\ f(x) = g(x), & x \in B \end{cases} \tag{7.3}$$

mit $Af(x) := \sum_{y \in S} a_{x,y} f(y)$ eindeutig lösbar (und nach Satz 7.6 bzw. einer leichten Erweiterung davon gegeben durch $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{T_B})]$).

Bew.: $\hat{a}_{x,y} := 1_{S \setminus B}(x)\, a_{x,y}$, $\hat{A} = (\hat{a}_{x,y})_{x,y \in S}$,

$\hat{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \in B \\ 0, & x \in S \setminus B \end{cases}$

(7.3) ist damit $(I_S - \hat{A}) f = \hat{g}$, ($I_S$ = Identitätsmat. auf S)

Somit $f = (I_S - \hat{A})^{-1} \hat{g}$

(denn $(I_S - \hat{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n$, die Reihe konvergiert:

es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ mit $\sup_{x \in S} \sum_{y \in S} \hat{a}^{(n)}_{x,y} \le 1 - \delta$ für $n \geq n_0$)