

Markovketten und Mischzeiten

Matthias Birkner

<https://www.staff.uni-mainz.de/birkner/>

Hauptseminar, WS 2020/21

Markovketten

- ▶ wichtiges stochastisches Modellierungswerkzeug
- ▶ in vielen Anwendungskontexten nützlich
- ▶ kommen in der „Einführung in die Stochastik“ vor
- ▶ ... und auch in der gymnasialen Oberstufe:

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
– Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen	Zu a) Verkettungen von Abbildungen Zu b) Materialverflechtungen, etwa bei einem mehrstufigen Produktionsablauf Markow-Prozesse; z.B. bei der Untersuchung des Kaufverhaltens von Kunden

Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe, S. 62;
<https://lehrplaene.bildung-rp.de/>

Markovketten

- ▶ wichtiges stochastisches Modellierungswerkzeug
- ▶ in vielen Anwendungskontexten nützlich
- ▶ kommen in der „Einführung in die Stochastik“ vor
- ▶ ... und auch in der gymnasialen Oberstufe:

Ziele / Inhalte (Sach- und Methodenkompetenz)	Hinweise zu Unterrichtsgestaltung und Methodenkompetenz
– Produkt zweier Matrizen, Matrizenpotenzen	Zu a) Verkettung von Abbildungen Zu b) Materialverflechtungen, etwa bei einem mehrstufigen Produktionsablauf Markow-Prozesse; z.B. bei der Untersuchung des Kaufverhaltens von Kunden

Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe, S. 62;
<https://lehrplaene.bildung-rp.de/>

Die Themen des Hauptseminars lassen sich gut mit dem Begriffsapparat der Einführung in die Stochastik (und der Grundvorlesungen Analysis und lineare Algebra) verstehen.

Markovketten mit endlichem Zustandsraum

$X_0, X_1, X_2, \dots$ Markovkette, Wertebereich S , $|S| < \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1} = y \mid X_k = x, \text{ Pfad bis Zeit } k) \\ = \mathbb{P}(X_{k+1} = y \mid X_k = x) = a_{xy},\end{aligned}$$

$A = (a_{xy})_{x,y \in S}$ die Übergangsmatrix

Markovketten mit endlichem Zustandsraum

$X_0, X_1, X_2, \dots$ Markovkette, Wertebereich S , $|S| < \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1} = y \mid X_k = x, \text{ Pfad bis Zeit } k) \\ = \mathbb{P}(X_{k+1} = y \mid X_k = x) = a_{xy},\end{aligned}$$

$A = (a_{xy})_{x,y \in S}$ die Übergangsmatrix

k -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k = y \mid X_0 = x) &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_{k-1} \in S} a_{x, x_1} a_{x_1, x_2} \cdots a_{x_{k-2}, x_{k-1}} a_{x_{k-1}, y} \\ &= A_{x,y}^k\end{aligned}$$

(k -te Potenz der Übergangsmatrix)

Konvergenz ins Gleichgewicht

$$\mathbb{P}(X_k = y \mid X_0 = x) = A_{x,y}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \pi(\{y\})$$

(unter gewissen, relativ milden Bedingungen)

wo π die Gleichgewichtsverteilung von X ist:

$$\pi A = \pi, \quad X_0 \sim \pi \Rightarrow X_1 \sim \pi \Rightarrow \dots \Rightarrow X_k \sim \pi \quad \forall k$$

Konvergenz ins Gleichgewicht

$$\mathbb{P}(X_k = y \mid X_0 = x) = A_{x,y}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \pi(\{y\})$$

(unter gewissen, relativ milden Bedingungen)

wo π die Gleichgewichtsverteilung von X ist:

$$\pi A = \pi, \quad X_0 \sim \pi \Rightarrow X_1 \sim \pi \Rightarrow \dots \Rightarrow X_k \sim \pi \quad \forall k$$

Zentrale Frage: Wie schnell ist diese Konvergenz?

Beispiel: Kartenmischen per Riffle-Shuffle



basierend auf https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riffle_shuffle.jpg,
(c) Johnny Blood, CC-by-sa 2.0

Beispiel: Kartenmischen per Riffle-Shuffle

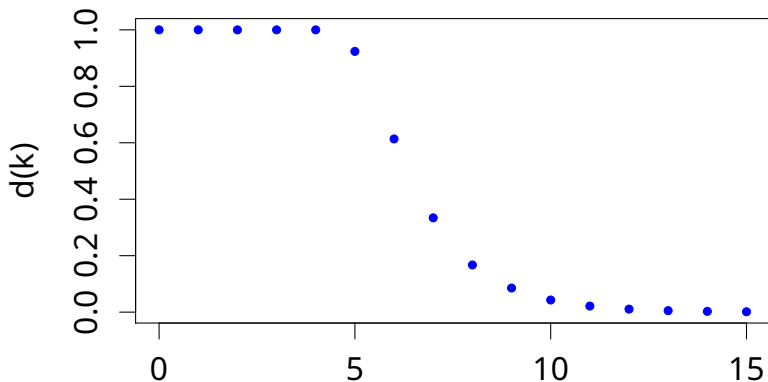
$S = \mathcal{S}_n = \{\text{Permutationen von } 1, \dots, n\},$

$X_k = \text{Permutation nach } k\text{-maligem Mischen}$

Beispiel: Kartenmischen per Riffle-Shuffle

$S = \mathcal{S}_n = \{\text{Permutationen von } 1, \dots, n\},$

$X_k = \text{Permutation nach } k\text{-maligem Mischen}$



$$d(k) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_n} \left| \mathbb{P}(X_k = \gamma | X_0 = \text{id}) - \frac{1}{n!} \right| \quad \text{für } n = 52$$

Quelle(n)

David A. Levin, Yuval Peres, *Markov Chains and Mixing Times*, 2nd ed., AMS 2017.

<http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/>

Ggfs. weitere Artikel oder Buchkapitel aus der mathematischen Fachliteratur

Quelle(n)

David A. Levin, Yuval Peres, *Markov Chains and Mixing Times*, 2nd ed., AMS 2017.

<http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/>

Ggfs. weitere Artikel oder Buchkapitel aus der mathematischen Fachliteratur

Vorbesprechung

Di., 7.7.2020, 9:00

auf bbb.rlp.net, dem BigBlueButton-Server des ZDV
(Teilnehmer erhalten den genauen Link per Email.)