Ein Steilkurs über Martingale

Matthias Birkner

2. November 2009

Dieser Text ist eine Einladung, sich (in sehr knapper Form) mit der Theorie der (zeitdiskreten) Martingale zu beschäftigen. Eine wesentlich gründlichere Behandlung findet sich beispielsweise bei Klenke [K], speziell Kapitel 8–11 (das auch Lesern ans Herz gelegt sei, die an den im Text erwähnten „Übungen“ verzweifeln).

Beispiel 1. Die symmetrische gewöhnliche Irrfahrt $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, X_i u.i.v., $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$ ($S_0 := 0$) wird uns als „Leib-und-Magen-Beispiel“ dienen.

1 Filtrationen

Zur Erinnerung: Das „übliche“ Grundobjekt der Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, bestehend aus Grundraum Ω, σ-Algebra $\mathscr{F}$ auf Ω und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathscr{F}$. Eine *Filtration* $(\mathscr{F}_n)_n$ ist eine aufsteigend geordnete Familie von Teil-σ-Algebren, d.h. $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1} \subset \mathscr{F}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Eine naheliegende (und nützliche) Interpretation ist, $\mathscr{F}_n$ als die Menge der bis zur Zeit n entschiedenen Ereignisse aufzufassen.

Beispiel 2. Eine Folge von Zufallsvariablen (X_n) definiert via $\mathscr{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ eine Filtration (Übung: Überzeugen Sie sich davon).

2 Bedingte Erwartung

$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine (Teil-)σ-Algebra. Wenn $\mathscr{G}$ endlich viele Atome $A_1, \ldots, A_\ell$ hat, liegt es nahe, die „bedingte Erwartung von X, gegeben die Information aus $\mathscr{G}$“ folgendermaßen zu definieren:

$$\mathbb{E}[X|\mathscr{G}](\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{E}[X 1_{A_i}] \quad \text{für } \omega \in A_i. \tag{1}$$

Man verallgemeinert (1) folgendermaßen: Eine reellwertige ZV Z heißt bedingte Erwartung von X gegeben $\mathscr{G}$ (schreibe $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$), wenn gilt

1. Z ist $\mathscr{G}$-messbar, d.h. $\{Z \in B\} \in \mathscr{G}$ für jede messbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$,
2. $\mathbb{E}[HZ] = \mathbb{E}[HX]$ für alle beschränkten $\mathscr{G}$-messbaren ZVn H.

(Übung: Überzeugen Sie sich, dass im Fall $|\Omega| < \infty$ die Version aus (1) diese Definition erfüllt.)

Bericht 3. Für integrierbares X existiert die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ und ist bis auf f.s.-Gleichheit eindeutig bestimmt (Existenz beispielsweise via Projektion auf den Unterraum der (quadratintegrablen) $\mathscr{G}$-messbaren ZVn). Neben den „üblichen“ Eigenschaften von Erwartungwerten (Linearität, Positivität) sind zwei wichtige Eigenschaften

1. $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\big|\mathscr{G}'\big] = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}'$ wenn $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}]$ („Turmeigenschaft“),
2. $\mathbb{E}[YX|\mathscr{G}] = YE[X|\mathscr{G}]$ sofern Y $\mathscr{G}$-messbar ist (und $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$).

3 Martingale

Eine Folge integrierbarer Zufallsvariablen (M_n) (so dass M_n $\mathscr{F}_n$-messbar ist für $n = 0, 1, \dots$) heißt ein *Martingal* (bezüglich der Filtration $(\mathscr{F}_n)$), wenn

$$\mathbb{E}[M_n | \mathscr{F}_{n-1}] = M_{n-1} \text{ (f.s.) für } n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

gilt. Es gilt dann auch $\mathbb{E}[M_n | \mathscr{F}_m] = M_m$ (f.s.) für $m \le n$ (Übung).

Die symmetrische Irrfahrt (Beispiel 1) ist ein Martingal (Übung).

Bericht 4. Wenn in (2) das „=“ durch „$\geq$“ ersetzt wird, spricht man von einem *Submartingal*, wenn es durch „$\leq$“ ersetzt wird, von einem *Supermartingal*.

3.1 Prävisible Prozesse, „Spielstrategien“, Gewinnprozesse als Martingale

$H_1, H_2, \dots$ eine Folge (individuell) beschränkter Zufallsvariablen, so dass H_i $\mathscr{F}_{i-1}$-messbar ist für $i = 1, 2, \dots$ (man nennt dann $(H_i)_{i \geq 1}$ auch *prävisibel*), (M_n) ein Martingal. Dann ist auch die Folge (Y_n), definiert durch $Y_0 := 0$,

$$Y_n := \sum_{k=1}^{n} H_k (M_k - M_{k-1}), \quad n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

ein Martingal (Übung). Wenn man (M_n) als den Gewinnprozess eines Spielers, der in jeder Runde einen „Einheitseinsatz“ in einem fairen Spiel wettet, interpretiert, so ergibt dies für (Y_n) folgende Interpretation: Dies ist der Gewinnprozess eines Spielers, der jeweils vor der i-ten Runde den H_i-fachen Einheitseinsatz setzt. Die Bedingung, dass H_i $\mathscr{F}_{i-1}$-messbar sein muss, beschreibt einen Spieler ohne hellseherische Fähigkeiten: die Höhe des Einsatzes muss vor der Kenntnis des Ausgangs der i-ten Runde festgelegt werden.

4 Stoppzeiten

Eine Zufallsvariable τ mit Werten in $\{0, 1, \dots\}$ mit der Eigenschaft

$$\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{4}$$

heißt eine *Stoppzeit* (strenggenommen: $(\mathscr{F}_n)$-Stoppzeit). (4) läßt sich folgendermaßen interpretieren: Man kann zu jedem Zeitpunkt n entscheiden, ob τ „bereits eingetreten ist“. Äquivalent kann man fordern, dass $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$ für alle n (Übung).

Für eine Stoppzeit τ ist die *τ-Vergangenheit* $\mathscr{F}_\tau$ gegeben durch $A \in \mathscr{F}_\tau :\iff A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ für jedes n ($\mathscr{F}_\tau$ ist eine σ-Algebra, Übung).

Eine wichtige Klasse von Stoppzeiten erhält man mittels $\tau_A := \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : X_k \in A\}$, wenn (X_n) eine $(\mathscr{F}_n)$-adaptierte Folge (sagen wir, reellwertiger) Zufallsvariablen und $A \subset \mathbb{R}$ (Überzeugen Sie sich, dass τ_A eine Stoppzeit ist). Sind τ_1, τ_2 Stoppzeiten, so auch $\tau_1 \wedge \tau_2$ und $\tau_1 \vee \tau_2$ (Übung). Warum ist mit τ stets auch $\tau + 5$ eine Stoppzeit, $\tau - 5$ aber im Allgemeinen nicht?

5 Optionales Stoppen

(M_n) Martingal, τ beschränkte Stoppzeit (d.h. es gibt eine Konstante T mit der Eigenschaft $\mathbb{P}(\tau \leq T) = 1$). Dann gilt

Satz 5 (Optional sampling-Satz, Basisversion). $\mathbb{E}\big[M_\tau\big] = \mathbb{E}\big[M_0\big]$, *allgemeiner* $\mathbb{E}\big[M_\tau \big| \mathscr{F}_n\big] = M_{\tau \wedge n}$ *für* $n = 0, 1, \dots.$

Zum Beweis argumentieren Sie beispielsweise folgendermaßen: Überprüfen Sie zunächst, dass

$$M_\tau = \mathbb{E}\big[M_T \big| \mathscr{F}_\tau\big] \quad \text{fast sicher} \tag{5}$$

gilt. Tatsächlich gilt für $A \in \mathscr{F}_\tau$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[M_\tau \mathbf{1}_A\big] &= \mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{k=0}^{T} M_k \mathbf{1}(\tau = k)\mathbf{1}_A\right] = \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}\big[M_k \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\big] = \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[M_T \big| \mathscr{F}_k\big] \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\Big] \\
&= \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[M_T \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k\}} \big| \mathscr{F}_k\big]\Big] = \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}\big[M_T \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k\}}\big] = \mathbb{E}\big[M_T \mathbf{1}_A\big],
\end{aligned}$$

wobei an geeigneter Stelle (wo?) die Martingaleigenschaft $M_k = \mathbb{E}[M_T|\mathscr{F}_k]$, die Tatsache $A \cap \{\tau = k\} \in \mathscr{F}_k$ und $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\,\cdot\,|\mathscr{F}_k]] = \mathbb{E}[\,\cdot\,]$ ausgenutzt werden. Aus (5) ergibt sich sofort die erste Behauptung (warum?).

Für die zweite Behauptung benutzen Sie die Turmeigenschaft der bedingten Erwartung beispielsweise folgendermaßen: $\tau \wedge n$ ist ebenfalls eine Stoppzeit, die offenbar $\tau \wedge n \le \tau\ (\le T)$ erfüllt. Überlegen Sie sich, dass dies $\mathscr{F}_{\tau\wedge n} \subset \mathscr{F}_\tau$ impliziert (ist das anschaulich einsichtig?). Demnach gilt mit (5)

$$M_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}\big[M_T \big| \mathscr{F}_{\tau\wedge n}\big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[M_T \big| \mathscr{F}_\tau\big] \Big| \mathscr{F}_{\tau\wedge n}\Big] = \mathbb{E}\big[M_\tau \big| \mathscr{F}_{\tau\wedge n}\big].$$

Bericht 6. Man kann in Satz 5 die Bedingung, dass τ beschränkt sein muss, fallen lassen. Technisch ist dann die entscheidende Bedingung, dass die Familie (M_n) *gleichgradig integrierbar* sein muss (Siehe [K, Abschn. 10.3]). Ganz ohne Bedingungen kann Satz 5 aber nicht richtig sein, wie die gewöhnliche Irrfahrt (Beispiel 1) mit $\tau_{\{1\}} := \min\{n : S_n = 1\}$ zeigt: Wegen der Rekurrenz von (S_n) ist $\tau_{\{1\}} < \infty$ f.s., also $S_{\tau_{\{1\}}} = 1$, somit $\mathbb{E}[S_{\tau_{\{1\}}}] = 1 \neq \mathbb{E}[S_0] = 0$. (Für die Glücksspielinterpretation bedeutet dies: Man kann – im Prinzip – aus einem fairen Spiel sicheren Gewinn ziehen, wenn man ggfs. beliebig lange spielen und dabei beliebig hohe Schulden ansammeln darf.)

Bemerkung 7. Aus Satz 5 folgt, dass das *gestoppte* Martingal $(M_{\tau\wedge n})_n$ ebenfalls ein Martingal ist, wenn τ eine (beschränkte) Stoppzeit und (M_n) ein Martingal ist.

6 Konvergenz

Unter („leichten“) Bedingungen konvergiert ein Martingal (M_n) fast sicher. Die auf Joseph Doob zurückgehende Beweisidee ist folgende: Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es $a < b$, so dass (M_n) unendlich oft zwischen (unterhalb) a und (oberhalb) b oszilliert. Dann könnte man mit folgender Strategie beliebig großen Gewinn erzielen:

- Steige ein, sobald M_n unter a fällt,
- halte, bis M_n über b steigt.
- Erziele mindestens Gewinn $b - a > 0$ aus jeder solchen „Aufkreuzung“.

Das widerspricht allerdings den Beobachtungen aus Abschnitt (3.1).

Wir wollen diese Idee nun präzisieren. Sei (M_n) ein nach unten beschränktes Martingal, o.E. $M_n \ge 0$ für alle n. (Warum ist die Annahme ≥ 0 keine zusätzliche Einschränkung?)

Seien $0 \le a < b < \infty$. Setzen Sie $\sigma_0 := 0$,

$$\begin{aligned}
\tau_k &:= \inf\{n > \sigma_{k-1} : X_n \le a\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \\
\sigma_k &:= \inf\{n > \tau_k : X_n \ge b\}, \quad k = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

(Mit Verabredung $\tau_k = \infty$ bzw. $\sigma_k = \infty$, wenn es kein passendes n mehr gibt.)

Überzeugen Sie sich, dass die τ_k und σ_k Stoppzeiten sind. Betrachten Sie beispielsweise eine Skizze, um sich zu vergewissern, dass (M_n)

$$\text{im Zeitintervall } \{\tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \sigma_k\} \text{ die } k\text{-te Aufkreuzung von (unterhalb) } a \text{ nach (oberhalb) } b \text{ ausführt} \tag{6}$$

(sofern $\tau_k, \sigma_k < \infty$). Sei

$$U_n^{(a,b)} := \max\{k : \sigma_k \leq n\}$$

die Anzahl abgeschlossener solcher Aufkreuzungen bis zum Zeitpunkt n.

Sei $I_0 := 0$, für $n \geq 1$

$$I_n := \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}(\exists\, k : \tau_k \leq i < \sigma_k)(M_{i+1} - M_i),$$

d.h. nur die Inkremente von (M_n) innerhalb der Aufkreuzungsintervalle zählen für (I_n). Verifizieren Sie, dass

$$\mathbb{E}\big[I_n \big| \mathscr{F}_{n-1}\big] = I_{n-1}$$

gilt, d.h. (I_n) ist (ebenfalls) ein Martingal.

Warum gilt

$$I_n \geq (b-a)U_n^{(a,b)} + \big(M_n - M_{\tau_{U_n^{(a,b)}+1} \wedge n}\big) \geq (b-a)U_n^{(a,b)} + (0-a)\,? \tag{7}$$

(Hinweis: Für jedes k ist $\sum_{i=\tau_k}^{\sigma_k - 1}(M_{i+1} - M_i) = M_{\sigma_l} - M_{\tau_k} \geq (b-a)$.)

Lemma 8 (Aufkreuzungsungleichung)**.** *Es gilt für jedes n*

$$\mathbb{E}\big[U_n^{(a,b)}\big] \leq \frac{a}{b-a}. \tag{8}$$

Offenbar $U_n^{(a,b)} \leq U_{n+1}^{(a,b)}$ für alle n, d.h. die Folge von Zufallsvariablen $(U_n^{(a,b)} : n \in \mathbb{N})$ konvergiert monoton gegen ein $U_\infty^{(a,b)}$, also auch

$$\mathbb{E}\big[U_\infty^{(a,b)}\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[U_n^{(a,b)}\big] \leq \frac{a}{b-a} < \infty$$

(benutzen Sie den Satz von der monotonen Konvergenz für das Gleichheitszeichen und dann (8) für die Abschätzung), insbesondere $\mathbb{P}\big(U_\infty^{(a,b)} < \infty\big) = 1$.

Betrachten Sie nun Ereignisse (mit $0 \leq a < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, sagen wir)

$$C^{(a,b)} := \Big\{\liminf_{n\to\infty} X_n < a\Big\} \cap \Big\{\limsup_{n\to\infty} X_n > b\Big\}.$$

Argumentieren Sie, dass $C^{(a,b)} \subset \{U_\infty^{(a,b)}\}$, folglich $P(C^{(a,b)}) = 0$ nach obigem, und daher auch

$$\mathbb{P}\bigg(\bigcup_{\substack{0 \leq a < b \\ a,b \in \mathbb{Q}}} C^{(a,b)}\bigg) = 0 \tag{9}$$

gilt. Warum haben Sie damit folgende Version des Martingalkonvergenzsatzes bewiesen?

Satz 9. *Ein nach unten beschränktes Martingal konvergiert mit Wahrscheinlichkeit* 1.

Bericht 10. Die Konvergenz $M_n \to M_\infty$ f.s. muss i.A. nicht die Konvergenz der Erwartungwerte implizieren: Betrachten Sie beispielsweise die Irrfahrt aus Beispiel 1, die beim Auftreffen auf -1 gestoppt wird. Für gleichgradig integrierbare Martingale gilt allerdings auch $\mathbb{E}[M_n] \to \mathbb{E}[M_\infty]$.

7 Doobsche Ungleichung

Im Allgemeinen ist es sehr schwierig, aus der Verteilung eines stochastischen Prozesses zu festen Zeiten Informationen über das Pfadverhalten wie beispielsweise das laufende Maximum abzuleiten. Im Fall von Martingalen sind die Verhältnisse übersichtlicher:

Satz 11 (Doobs L_2-Ungleichung)**.** *Sei (M_n) Martingal mit $M_0 \geq 0$ und $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ für alle n, $M_n^* := \max_{0 \leq k \leq n} M_k$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\big[(M_n^*)^2\big] \leq 4\mathbb{E}\big[M_n^2\big].$$

Für festes $\lambda > 0$ gilt

$$\lambda \mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}\big[M_n \mathbf{1}(M_n^* \geq \lambda)\big] \ \Big(\leq \mathbb{E}\big[|M_n| \mathbf{1}(M_n^* \geq \lambda)\big] \Big). \tag{10}$$

Argumentieren Sie beispielsweise folgendermaßen: $\tau := \inf\{k : M_k \geq \lambda\} \wedge n$ ist eine (durch n) beschränkte Stoppzeit, also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_\tau] &= \mathbb{E}\big[M_\tau \mathbf{1}(M_n^* \geq \lambda)\big] + \mathbb{E}\big[M_\tau \mathbf{1}(M_n^* < \lambda)\big] = \mathbb{E}\big[M_\tau \mathbf{1}(M_n^* \geq \lambda)\big] + \mathbb{E}\big[M_n \mathbf{1}(M_n^* < \lambda)\big] \\ &\geq \lambda \mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) + \mathbb{E}\big[M_n \mathbf{1}(M_n^* < \lambda)\big]. \end{aligned}$$

Nun substrahiere $\mathbb{E}\big[M_n \mathbf{1}(M_n^* < \lambda)\big]$ auf beiden Seiten.

Stets gilt

$$(M_n^*)^2 = \int_0^{M_n^*} 2\lambda \, d\lambda,$$

also (wegen $(M_n^*)^2 \leq M_0^2 + M_1^2 + \cdots + M_n^2$ ist der Erwartungswert endlich)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[(M_n^*)^2\big] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{M_n^*} 2\lambda \, d\lambda\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} 2\lambda \mathbf{1}(M_n^* \geq \lambda) \, d\lambda\right] = 2\int_0^\infty \lambda \mathbb{P}(M_n^* \geq \lambda) \, d\lambda \\ &\leq 2\int_0^\infty \mathbb{E}\big[|M_n| \mathbf{1}(M_n^* \geq \lambda)\big] \, d\lambda = 2\mathbb{E}\left[|M_n| \int_0^{M_n^*} d\lambda\right] = 2\mathbb{E}\big[|M_n| M_n^*\big] \end{aligned}$$

Folgern Sie mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\mathbb{E}\big[(M_n^*)^2\big] \leq 2\sqrt{E\big[|M_n|^2\big]}\sqrt{\mathbb{E}\big[(M_n^*)^2\big]}.$$

Bericht 12. Die Ungleichung gilt wörtlich auch für Submartingale. Die Annahme $M_0 \geq 0$ ist eigentlich nicht notwendig (vereinfacht hier nur die Argumentation ein wenig). Es gilt eine analoge Aussage für jedes $p > 1$ statt $p = 2$ (Doobs L_p-Ungleichung).

8 Die symmetrische gewöhnliche Irrfahrt auf einem Intervall

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < x < b$, $Z^{(x,a,b)}$ die symmetrische gewöhnliche Irrfahrt startend in $Z_0^{(x,a,b)} = x$, gestoppt, sobald $Z_0^{(x,a,b)} \in \{a, b\}$. Prüfen Sie: $((b - Z_n^{(x,a,b)})/(b-a))_n$ und $((b - Z_n^{(x,a,b)})(Z_n^{(x,a,b)} - a) - n)_n$ sind Martingale. Können Sie diese Information benutzen, um die Wahrscheinlichkeit, dass der obere Rand getroffen wird sowie die erwartete Zeit bis zum Treffen des Rands zu berechnen?

Literatur

[K] A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer 2006.