Ein Steilkurs über zeitkontinuierliche Markovketten

Matthias Birkner

7. Dezember 2009

Dieser Text ist eine Einladung, sich (in sehr knapper Form) mit Markovketten mit diskretem Zustandsraum in kontinuierlicher Zeit zu beschäftigen. Eine wesentlich gründlichere Behandlung findet sich beispielsweise bei Norris [N], Ch. 2–3, oder Klenke [K], Kapitel 17.

1 Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$

Der (homogene) Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ ist gewissermaßen die einfachste zeitstetige Markovkette mit diskretem Zustandsraum, zugleich kann er als „Baustein" für die Konstruktion sehr allgemeiner zeitstetiger Markovketten dienen. Sei $\lambda > 0$, $J_1, J_2, \dots$ u.i.v. Exp(λ)-verteilt (d.h. mit Dichte $\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)$), $T_0 := 0$, $T_n := J_1 + \cdots + J_n$, $n \in \mathbb{N}$. Der zeitkontinuierliche stochastische Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$, definiert durch

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(T_n \leq t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

heißt *Poissonprozess* (mit Rate λ). Äquivalent zu (1) ist $N_t = n \iff t \in [T_n, T_{n+1})$, d.h. der Prozess hat stückweise konstante Pfade und springt gelegentlich jeweils um 1 nach oben, T_n ist der Zeitpunkt des n-ten Sprungs (Übung: Skizzieren Sie einen typischen Pfad). Nach Konstruktion sind die Pfade von (N_t) rechtsstetig und haben linksseitige Limiten (diese Eigenschaft wird in der Literatur häufig mit dem französischen Akronym *càdlàg*, continue à droite, limitée à gauche, bezeichnet). Der Poissonprozess hat die Markov-Eigenschaft, genauer gilt für jedes $s \geq 0$

$$\tilde{N}_t := N_{t+s} - N_s,\ t \geq 0 \quad \text{ist ein Poissonprozess mit Rate } \lambda \text{, u.a. von } (N_r : r \leq s). \tag{2}$$

Beweis. Die entscheidende Eigenschaft ist die sog. Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung: Für Exp(λ)-verteiltes J, $s, t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}(J > t + s \mid J > s) = \mathbb{P}(J > t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda t}, \tag{3}$$

denn $\mathbb{P}(J > t + s \mid J > s) = \mathbb{P}(J > t + s)/\mathbb{P}(J > s) = e^{-\lambda(t+s)}/e^{-\lambda s}$.

Sei $s \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Wir betrachten das Ereignis

$$\{X_s = n\} = \{T_n \leq s < T_{n+1}\} = \{T_n \leq s\} \cap \{J_{n+1} > s - T_n\}.$$

Auf diesem Ereignis ist $X_r = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}(T_m \leq r)$ für $0 \leq r \leq s$, und die Sprungzeitpunkte $\tilde{T}_i$ von $(\tilde{N}_t)$ sind

$$\tilde{T}_1 = J_{n+1} - (s - T_n), \quad \tilde{T}_m = T_{n+m},\ m \geq 2.$$

Nach Konstruktion sind $J_{n+1}, J_{n+2}, \dots$ unabhängig von $(T_1, \dots, T_n)$, wegen (3) gilt

$$\mathbb{P}\big(\tilde{T}_1 > t \big| X_s = n\big) = \mathbb{P}\big(J_{n+1} > t + (s - T_n) \big| T_n \leq s, J_{n+1} > s - T_n\big) = e^{-\lambda t},$$

d.h. gegeben $\{X_s = n\}$ sind $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2 - \tilde{T}_1, \tilde{T}_3 - \tilde{T}_2, \dots$ unabhängig und jeweils Exp(λ)-verteilt. Demnach ist (2) bedingt auf $\{X_s = n\}$ erfüllt. Da dies für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$ gilt, folgt die Behauptung. □

Der Name des Poissonprozesses ist durch folgende Eigenschaft motiviert:

$$\text{Für } t \geq 0, h > 0 \text{ ist } (N_{t+h} - N_t) \text{ Poisson}(\lambda h)\text{-verteilt.} \tag{4}$$

Beweis. Die Verteilung von $T_n = J_1 + \cdots + J_n$ hat Dichte

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x},\ x \geq 0. \tag{5}$$

(Man sagt auch: T_n ist Gamma-verteilt mit Formparameter n und Skalenparameter λ. Übung: Zeigen Sie (5) beispielsweise per Induktion: T_{n-1} habe Dichte f_{n-1}, dann hat T_n Dichte $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x-y)\lambda e^{-\lambda y}\,dy$.)

Wegen (2) genügt es, $t = 0$ anzunehmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_h = n) &= \mathbb{P}(T_n \le h, J_{n+1} > h - T_n) \\ &= \int_0^h \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}\,\lambda e^{-\lambda(h-x)}\,dx = e^{-\lambda h}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^h x^{n-1}\,dx = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

Insbesondere gilt also für $t \ge 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+h} = n \mid N_t = n) &= e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), &(6)\\ \mathbb{P}(N_{t+h} = n+1 \mid N_t = n) &= e^{-\lambda h}\lambda h = \lambda h + o(h), &(7)\\ \mathbb{P}(N_{t+h} \notin \{n, n+1\} \mid N_t = n) &= 1 - e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h}\lambda h = o(h), &(8)\end{aligned}$$

wo $o(h)$ für Funktionen von h steht, die für $h \to 0+$ schneller als linear gegen 0 gehen.

Weiterhin zeigt (4) zusammen mit der Markoveigenschaft, dass

$$\big(N_t - \lambda t,\ t \ge 0\big) \quad \text{ein Martingal ist.} \tag{9}$$

2 Allgemeiner (endlicher) Zustandsraum

Sei E, $|E| < \infty$. Eine $E \times E$-Matrix $(q_{x,y})$ heißt *Q-Matrix* oder *Generatormatrix*, wenn gilt

$$q_{x,y} \in [0,\infty) \quad \text{für alle } x \ne y \qquad \text{und} \qquad \sum\nolimits_y q_{xy} = 0 \quad \text{für alle } x. \tag{10}$$

(Die zweite Bedingung ist äquivalent zu $q_{x,x} = -\sum_{y\ne x} q_{x,y}$.)

Eine (homogene) *zeitkontinuierliche Markovkette* mit Zustandsraum E und Q-Matrix (oder Generatormatrix) $Q = (q_{x,y})_{x,y\in E}$ ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\ge 0}$, der die Markov-Eigenschaft besitzt (d.h. die Verteilung von X_{t+h}, gegeben $(X_s : s \le t)$, hängt nur vom Zustand X_t ab) und folgenden Bedingungen genügt:

$$\forall\, x, y \in E,\ t \ge 0 \ :\ \mathbb{P}(X_{t+h} = y \mid X_t = x) = 1_{\{x=y\}} + q_{xy}h + o(h). \tag{11}$$

(Wir sehen: Der Poissonprozess mit Rate λ hat Zustandsraum $\mathbb{Z}_+$ und Generatormatrix $q_{x,x} = -\lambda$, $q_{x,x+1} = \lambda$, $q_{x,y} = 0$, wenn $y - x \ge 2$ oder $y < x$, allerdings ist $\mathbb{Z}_+$ nicht endlich.)

Die *Übergangshalbgruppe* von X ist eine mit $\mathbb{R}_+$ indizierte Schar von $E\times E$-Matrizen $P(t) = (p_{x,y}(t))_{x,y\in E}$ mit

$$p_{x,y}(t) = \mathbb{P}(X_{s+t} = y \mid X_s = x). \tag{12}$$

Die Markov-Eigenschaft zeigt, dass für $x, y \in E$, $t, u \ge 0$

$$\begin{aligned}p_{x,y}(t+u) &= \mathbb{P}(X_{t+u} = y \mid X_0 = x) = \sum_z \mathbb{P}(X_t = z \mid X_0 = x)\mathbb{P}(X_{t+u} = y \mid X_0 = x, X_t = z)\\ &= \sum_z p_{x,z}(t)p_{z,y}(u) &(13)\end{aligned}$$

gilt, die *Chapman-Kolmogorov-Gleichungen.* (13) in Matrixschreibweise lautet $P(t+u) = P(t)P(u)$, was die Halbgruppeneigenschaft explizit macht.

Iteration der Markov-Eigenschaft zeigt, dass die *endlich-dimensionalen Verteilungen* einer zeitkontinuierlichen Markovkette durch ihre Übergangshalbgruppe und die Startverteilung $\nu = \mathscr{L}(X_0)$ festgelegt sind: Seien $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k$, $x_0, x_1, \dots, x_k \in E$, so gilt

$$\mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_k} = x_k) = \nu(x_0)\prod_{i=1}^k p_{x_{i-1},x_i}(t_i - t_{i-1}). \tag{14}$$

Anschaulich ist die Dynamik einer Q-Markovkette folgendermaßen: Bei Start in $X_0 = x$ (mit $q_{xx} \ne 0$) verharrt die Kette eine $\mathrm{Exp}(-q_{x,x})$-verteilte Zeit in x, dann springt sie mit Wahrscheinlichkeit $\tilde p_{x,y} := q_{x,y}/(-q_{x,x})$ nach $y \in E$. Dort wartet sie $\mathrm{Exp}(-q_{y,y})$-verteilt lange, etc.

Sei X Markovkette eine mit càdàg-Pfaden.

$$T_0 := 0,\ \ T_n := \inf\{t > T_{n-1} : X_t \ne X_{T_{n-1}}\},\ n \ge 1, \tag{15}$$

der Zeitpunkt des n-ten Sprungs. Wenn $T_n = \infty$ für ein n_0 gelten sollte, d.h. die Kette nach einer gewissen Anzahl Sprünge „stehen bleibt“, setzen wir $T_k = \infty$ für alle $k > n_0$, und definieren $X_\infty := X_{T_{n_0-1}}$. Die *Skelettkette* $\tilde Y_n := X_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine zeitdiskrete Markovkette mit Übergangsmatrix $(\tilde p_{x,y})$.

2.1 Konstruktion

Stets definiert

$$P(t) := \exp(tQ) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k \tag{16}$$

eine Halbgruppe von $E \times E$-Matrizen (für die Konvergenz der Reihe beobachte beispielsweise, dass die Einträge von Q^k vom Betrag her beschränkt sind durch $(|E| \times \max_{x,y} |q_{x,y}|)^k$; man überzeuge sich, dass für Matrizen A, B mit $AB = BA$ gilt $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$). Die Bedingung (10) ist äquivalent dazu, dass die Matrizen $\exp(tQ)$, $t \geq 0$, stochastisch sind (wir werden unten zeigen, dass (10) hinreichend dafür ist, dass (16) stochastisch ist). Man kann dann via (14) mit dem Fortsetzungssatz von Kolmogorov einen stochastischen Prozess definieren, dessen Pfadeigenschaften allerdings (zunächst) unklar sind.

Sei $\lambda := \max_x \{-q_{x,x}\}$, setze

$$\hat{p}_{x,y} := \frac{q_{x,y}}{\lambda}, \ x \neq y, \quad \hat{p}_{x,x} := 1 + \frac{q_{x,x}}{\lambda}. \tag{17}$$

$(\hat{p}_{x,y})$ ist eine stochastische Matrix auf E (sie unterscheidet sich von der Übergangsmatrix $(\tilde{p}_{x,y})$ der Skelettkette nur durch die Möglichkeit des „Stehenbleibens“, und offensichtlich gilt $q_{x,y} = \lambda \hat{p}_{x,y}$ für $x \neq y$. Sei $(\hat{X}_n)$ eine $\hat{p}$-Markovkette mit Startverteilung ν, (N_t) ein davon unabhängiger Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate λ. Dann ist

$$X_t := \hat{X}_{N_t}, \ t \geq 0 \quad \text{eine } Q\text{-Markovkette.} \tag{18}$$

Sei $\tilde{p}_{x,y}(t) := \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)(\hat{p}^n)_{x,y}$, so gilt nach Konstruktion wegen (2), Unabhängigkeit der Zuwächse von (N_t),

$$\mathbb{P}\big(X_{t+u} = y \big| N_s, s \leq t, \hat{X}_k, k \leq N_t\big) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_u = m)(\hat{p}^m)_{\hat{X}_{N_t},y} = \tilde{p}_{X_t,y}(t),$$

was die Markov-Eigenschaft impliziert (benutze die Turmeigenschaft der bedingten Erwartung). Aus (6–8) und der Definition von $\hat{p}$ folgt, dass der in (18) definierte Prozess X die Bedingung (11) erfüllt, d.h. X ist tatsächlich eine Q-Markovkette, und $\tilde{p}_{x,y}(t) = p_{x,y}(t)$, die Q-Halbgruppe. Wir haben insbesondere bewiesen, dass eine Generatormatrix eine stochastische Halbgruppe erzeugt. Da (18) einen Prozess mit càdlàg-Pfaden definiert, haben wir auch bewiesen, dass eine Q-Markovkette stets eine càdlàg-Version besitzt. Wir werden i.A. (ggfs. implizit) eine càdlàg-Version verwenden.

2.2 Vorwärts- und Rückwärtsgleichung

Analytisch: Da Q und $\exp(tQ)$ kommutieren, gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(tQ) = Q \exp(tQ) = \exp(tQ) Q, \tag{19}$$

wie man sich durch gliedweise Differentiation der Reihe (16) überzeugt, demnach für $t \geq 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = QP(t), \quad \text{d.h.} \quad \forall\, x, y \in E: \quad \frac{\partial}{\partial t} p_{x,y}(t) = \sum_z q_{x,z} p_{z,y}(t) = \sum_z q_{x,z}\big(p_{z,y}(t) - p_{x,y}(t)\big), \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = P(t)Q, \quad \text{d.h.} \quad \forall\, x, y \in E: \quad \frac{\partial}{\partial t} p_{x,y}(t) = \sum_z p_{x,z}(t) q_{z,y} = p_{x,y}(t) q_{y,y} + \sum_{z \neq y} p_{x,z}(t) q_{z,y}. \tag{21}$$

Stochastisch: Gleichung (20) heißt Kolmogorovs *Rückwärtsgleichung*, denn gemäß (11) gilt (wir schreiben $\mathbb{P}_x(\cdot)$ für $\mathbb{P}(\,\cdot\,|X_0 = x)$)

$$\begin{aligned}
\frac{p_{x,y}(t+h) - p_{x,y}(t)}{h} &= \frac{1}{h}\big(\mathbb{P}_x(X_{t+h} = y) - \mathbb{P}_x(X_t = y)\big) \\
&= \frac{1}{h}\Big(\sum\nolimits_z \mathbb{P}_x(X_{t+h} = y | X_h = z)\mathbb{P}_x(X_h = z) - \mathbb{P}_x(X_t = y)\Big) \\
&= \frac{1}{h}\Big(\sum\nolimits_z p_{z,y}(t)\big(1_{\{x=z\}} + h q_{x,z} + o(h)\big) - p_{x,y}(t)\Big) = \sum_z q_{x,z} p_{z,y}(t) + o(1),
\end{aligned}$$

man leitet sie also aus (11) her durch „Rückwärtszerlegung" des Prozesses X im Intervall $[0, t+h]$ gemäß dem Verhalten am Anfang des Intervalls. Analog heißt (21) Kolmogorovs *Vorwärtsgleichung*, sie entsteht durch Zerlegung gemäß dem Wert bei t:

$$\begin{aligned}\frac{p_{x,y}(t+h) - p_{x,y}(t)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\sum\nolimits_z \mathbb{P}_x(X_{t+h} = y | X_t = z)\mathbb{P}_x(X_t = z) - \mathbb{P}_x(X_t = y)\Big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\sum\nolimits_z p_{x,z}(t)\big(1_{\{z=y\}} + hq_{y,z} + o(h)\big) - p_{x,y}(t)\Big) = \sum_z q_{x,z}p_{z,y}(t) + o(1).\end{aligned}$$

Sowohl (20) als auch (21) sind (im Fall $|E| < \infty$) eindeutig lösbar und beide bestimmen die Halbgruppe (es sind beides endliche Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten).

2.3 Martingale

Sei $f : E \to \mathbb{R}$, dann ist

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Qf(X_s)\,ds \tag{22}$$

ein Martingal (bezüglich $\mathscr{F}_t = \sigma(X_u : u \le t)$), wo $Qf(x) := \sum_y q_{x,y}f(y)$. Es ist für $0 \le s < t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[M_t - M_s \big| \mathscr{F}_s\big] &= \mathbb{E}\Big[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t Qf(X_u)\,du \,\Big|\, \mathscr{F}_s\Big] \\ &= P(t-s)f(X_s) - f(X_s) - \int_s^t (P(u-s)Qf)(X_s)\,du = 0,\end{aligned}$$

denn $P(w)f - f = \int_0^w P(v)Qf\,dw$ nach (21). Umgekehrt gilt, dass X eine Q-Markovkette ist, wenn (M_t) für jedes f ein Martingal ist (wähle fs der Form $1_{\{y\}}(\cdot)$).

3 Abzählbar unendlicher Zustandsraum

Im Fall $|E| = \infty$ sind die Verhältnisse komplizierter, insbesondere müssen (20, 21) nicht mehr eindeutig lösbar sein. Stochastisch gesehen bedeutet dies, dass sich die Sprungzeitpunkte einer Q-Markovkette X im endlichen häufen können. Wir sehen zumindest, dass die simple Konstruktion (18) nicht mehr funktioniert, sobald $\sup_{x\in E} -q_{x,x} = \infty$ gilt. Die „einfachste" Lösung ist, einen „Friedhofszustand" ∂ zu E hinzuzufügen und $X_t := \partial$ für $t \ge \lim_n T_n$ mit T_n aus (15) zu setzen. Dies ist der *minimale Prozess* (zu Q). Weitergehende Informationen finden sich z.B. bei Chung [C].

Ein einfaches Beispiel einer Markovkette X mit „explosiver" Q-Matrix ist ($E = \mathbb{N}$),

$$q_{i,i+1} = \frac{(i+1)i}{2}, \; q_{i,i} = -q_{i,i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Sei $X_0 = 1$. Da X sich mit jedem Sprung um 1 nach rechts bewegt, ist $X_{T_n} = n+1$ (mit Sprungzeiten T_n wie in (15) definiert) und die Elemente der Folge $W_n := T_n - T_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ sind unabhängig, W_n ist $\mathrm{Exp}(n(n+1)/2)$-verteilt. Folglich gilt

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[W_i] = \sum_{i=1}^n \frac{2}{i(i+1)} = 2\sum_{i=1}^n \Big(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\Big) = 2 - \frac{2}{n+1} \to 2,$$

insbesondere $\lim_{n\to\infty} T_n < \infty$ (denn es gilt sogar $\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} T_n] = 2 < \infty$ gemäß dem Satz von der monotonen Konvergenz). X ist die Zeitumkehr des sogenannten block counting-Prozesses des Kingman-Koaleszenten.

Literatur

[C] K.L. Chung, *Markov chains with stationary transition probabilities*, 2nd ed., Springer 1967.

[K] A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer 2006.

[N] J. Norris, *Markov chains*, Cambridge University Press 1997.