Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastische Modelle der Populationsbiologie: Übungen und Ergänzungen **WS 2022/23**

Blatt 1

Aufgabe 1.1 (Erinnerung an diskrete Markovketten) Rufen Sie sich Grundlagen der Theorie zeitdiskreter Markovketten auf endlichen (oder abzählbaren) Zuständsräumen in Erinnerung und/oder schlagen Sie diese in der Literatur nach. Was sind/bedeuten die folgenden Begriffe?

Markov-Eigenschaft, Übergangsmatrix, Irredizibilität und Aperiodizität (einer Markovkette)

Auftreffwahrscheinlichkeit, harmonische Funktion und Dirichlet-Problem

Gleichgewicht, Konvergenz einer Markovkette ins Gleichgewicht

Rekurrenz und Transienz

Hinweis: Rat und Hilfe finden Sie beispielsweise in den folgenden Quellen:

- Kapitel 7 in M. Birkner, *Einführung in die Stochastik*, Vorlesungsskript, JGU Mainz, WS 2020/21 `https://www.staff.uni-mainz.de/birkner/GrundlStoch_2021/Stochastik-Einfuehrung_WS2021.pdf`
- Kapitel 4 im von Prof. L. Hartung für die Vorlesung Grundlagen der Stochastik verwendeten Vorlesungsskript: A. Bovier, *Stochastik für Lehramt-ALMA 2 Teil 1*, `https://www.dropbox.com/s/zmby80t7r4ih7l8/skript.pdf?dl=0`
- Kapitel 2 in A. Klenke, *Einführung in die Stochastik*, Vorlesungsskript, JGU Mainz, WS 2021/22 `https://www.staff.uni-mainz.de/klenke/vorlesungen/vorl_ws21-1/stoch0-skript.pdf`
- Kapitel 6 in H.-O. Georgii, *Stochastik*, 5. Aufl., de Gruyter, 2015 (in der UB auch als E-Book erhältlich)
- Kapitel IV.15 in G. Kersting und A. Wakolbinger, *Elementare Stochastik*, Birkhäuser 2010 und (deutlich mehr in) Kapitel 2 in G. Kersting und A. Wakolbinger, *Stochastische Prozesse*, Birkhäuser 2015 (jeweils in der UB auch als E-Book erhältlich)
- D. A. Levin, Y. Peres with contributions by E. L. Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times*, 2nd ed., AMS 2017 `http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/`

Aufgabe 1.2 (Verhalten des Wright-Fisher-Modells via Simulation untersuchen)
a) Für Populationsgröße $N \in \mathbb{N}$ sei $X^{(N)} = (X_g^{(N)})_{g \in \mathbb{N}_0}$ die Anzahl Typ-1-Individuuen in einem neutralen 2-Typ-Wright-Fisher-Modell, d.h. $X^{(N)}$ ist eine Markovkette auf $\{0, 1, \dots, N\}$ mit Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}\big(X_{g+1}^{(N)} = y \,\big|\, X_g^{(N)} = x\big) = \binom{N}{y}\Big(\frac{x}{N}\Big)^y\Big(1 - \frac{x}{N}\Big)^{N-y}, \quad x, y \in \{0, 1, \dots, N\}$$

d.h. die bedingte Verteilung von $X_{g+1}^{(N)}$, gegeben $\{X_g^{(N)} = x\}$, ist $\mathrm{Bin}(N, x/N)$. Schreiben Sie ein Programm (z.B. in R), das für gegebenen Startwert $X_0^{(N)} = x_0$ so lange simuliert, bis einer der beiden Typen verschwunden ist, d.h. bis $T_{\text{fix}}^{(N)} = \inf\big\{g \in \mathbb{N}_0 : X_g^{(N)} \in \{0,1\}\big\}$.

Schätzen Sie damit mittels Monte-Carlo-Simulation (jeweils mit geeigneter Anzahl Replikate) für einige Wahlen von N (z.B. $N \in \{100, 500, 1000, 10000\}$) und jeweils einige Wahlen des Startanteils z_0 (z.B. $z_0 \in \{j/10 : j = 1, \dots, 9\}$), d.h. mit Startwert $X_0^{(N)} = \lfloor z_0 N \rfloor$, die Antwort auf folgende Fragen:

- Wie wahrscheinlich ist es, dass Typ 1 fixiert?
- Wie lange dauert es im Mittel, bis nur noch ein Typ vorhanden ist?
- Bedingt darauf, dass Typ 1 fixiert, wie lange dauert es im Mittel, bis der andere Typ verschwunden ist?

b) Nehmen wir nun an, dass Typ 1 im Vergleich zu Typ 0 einen (möglicherweise recht kleinen) selektiven Vorteil besitzt. Bei gegebener Anzahl $x = X_g^{(N)}$ von Typ 1-Individuen in einer Elterngeneration g wird nun im Gegensatz zur Situation in a) der Typ jedes Kinds nicht durch uniforme Wahl aus den möglichen Eltern bestimmt, sondern durch gewichtetes Ziehen: Typ 0-Eltern erhalten Gewicht 1, Typ 1-Eltern erhalten Gewicht $1 + s$, wobei $s > 0$ den selektiven Vorteil von Typ 1 parametrisiert. Die Chance, ein Typ 1-Elter zu ziehen ist somit

$$\frac{x(1+s)}{x(1+s) + (N-x)} = \frac{(1+s)x}{N + xs}$$

und die Verteilung von $X_{g+1}^{(N)}$, gegeben $\{X_g^{(N)} = x\}$, gerade $\mathrm{Bin}\big(N, (1+s)x/(N+xs)\big)$.

Modifizieren Sie Ihr Programm aus a) entsprechend und beantworten Sie für einige Wahlen von s (z.B. $s \in \{10^{-4}, 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}, 1/100, 1/10, 1/2, 1\}$ und Kombinationen von N und z_0 wiederum mittels Monte-Carlo-Simulation die Fragen aus a). Betrachten Sie hier auch die Situation $X_0^{(N)} = 1$.

c)* Falls Sie schon entsprechenden Theorieapparat besitzen: Welche Ergebnisse der Simulation würden Sie für $N \gg 1$ erwarten (mathematisch: bei geeigneter Skalierung und Betrachtung des Grenzwerts $N \to \infty$)?

Aufgabe 1.3 (Auftreffwahrscheinlichkeiten für Geburts- und Todes-Ketten) Sei $N \in \mathbb{N}$, wir betrachten eine Markovkette Y auf $\{0, 1, \dots, N\}$ mit Übergangsmatrix

$$p(x,y) = \begin{cases} r_x, & \text{falls } y = x+1 \leqslant N \\ \ell_x, & \text{falls } y = x-1 \geqslant 0 \\ 1 - r_x - \ell_x, & \text{falls } y = x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $r_x, \ell_x > 0$ mit $r_x + \ell_x \leqslant 1$ für $x = 1, 2, \dots, N-1$ gilt (und $r_0, \ell_N \in [0,1]$). Finden Sie einen Ausdruck, der die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\big(Y \text{ trifft Zustand } N \text{ vor Zustand } 0 \,\big|\, Y_0 = y_0\big)$$

als Funktion des Startpunkts y_0 beschreibt.

Aufgabe 1.4 (Erneuerungsprozesse als Markovketten angeschaut) a) Seien $T_1, T_2, \dots$ u.i.v., $T_i \sim \mu$, wobei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$ ist mit $\mathbb{E}[T_1] = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\{k\}) < \infty$ (und es gelte $\mathrm{ggT}(\{k : \mu(\{k\}) > 0\}) = 1$). Wir setzen

$$W_n := T_1 + \cdots + T_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{mit } W_0 := 0)$$

(W_n ist der Zeitpunkt der „n-ten Erneuerung“) und

$$X_n := \inf\big\{W_k - n : k \in \mathbb{N}_0, W_k \geqslant n\big\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Interpretieren Sie die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (eine Skizze kann hilfreich sein) und zeigen Sie, dass sie eine irreduzible und aperiodische Markovkette (auf $E := \{0, 1, \dots, \sup\{k : \mu(\{k\}) > 0\}\} \cap \mathbb{N}_0$) mit Übergangangsmatrix

$$p(i,j) = \begin{cases} \mu(j+1) & i = 0 \leqslant j, \\ 1, & j = i-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

bildet.

b) Zeigen Sie: Das eindeutige Gleichgewicht der Kette (X_n) ist gegeben durch

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[T_1]}\mu\big(\{x+1, x+2, \dots\}\big), \quad x \in E$$

c) Seien nun $T_1', T_2', \dots$ unabhängige Kopien der T_i aus a), wir bilden daraus wie in a) Folgen von Zufallsvariablen W_n' und X_n', $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Die Folge der Paare $(X_n, X_n')_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Markovkette. Finden Sie deren eindeutiges Gleichgewicht und folgern Sie, dass gilt

$$\mathbb{P}\big(W_n = W_m' \text{ für unendlich viele Paare } (m,n) \in \mathbb{N}^2\big) = 1$$