Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastische Modelle der Populationsbiologie: Übungen und Ergänzungen **WS 2022/23**

Blatt 2

Aufgabe 2.1 (Homogener Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$) Rufen Sie sich die Definition eines (homogenen) Poissonprozesses auf $\mathbb{R}_+$ ins Gedächtnis oder schauen Sie in der Literatur nach, z.B. in Kapitel 5.5 des Buches von A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Aufl., Springer, 2020 oder im Unterkapitel „Ein Exkurs zum Poissonprozess und zu zeitkontinuierlichen Markovketten“ in `https://www.staff.uni-mainz.de/birkner/SMPB1516/smpb1516.pdf`.

a) Formulieren Sie Fragen/Unklarheiten (falls vorhanden).

Sei nun $(M_t)_{t\geqslant 0}$ ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate („Intensität“) $\lambda > 0$, für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $T_n := \inf\{t \geqslant 0 : M_t \geqslant n\}$ den Zeitpunkt des n-ten Sprungs.

b) Sei $t > 0$, wie ist M_t verteilt? Wie ist $L_t := t - T_{M_t}$ verteilt? Wie ist $R_t := T_{M_t+1} - t$ verteilt? Sind L_t und R_t unabhängig? Wogegen konvergiert $\mathscr{L}(L_t + R_t)$?

c) Wogegen konvergiert M_t/t? Um wieviel weicht M_t/t für großes, aber endliches t typischerweise von seinem Grenzwert ab?

Aufgabe 2.2 („Aufwärmübung“ rund um den Kingman-Koaleszenten) Betrachten Sie den Kingman-Koaleszenten als Markovprozess auf $\mathcal{E}_n$. Welche Zustände sind transient, welche rekurrent, welche absorbierend? Die selbe Frage für den Blockzählprozess.

Aufgabe 2.3 (Wann ist das Bild einer Markovkette wieder eine?) Sei $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ eine (zeitdiskrete) Markovkette auf der (höchstens) abzählbaren Menge E mit Übergangsmatrix $(p(x,y))_{x,y\in E}$ und Startverteilung $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, weiter sei $f : E \to E'$ eine Abbildung von E in die (höchstens) abzählbare Menge E'. Wir definieren die Folge von Zufallsvariablen $Y = (Y_n)_n$ durch $Y_n := f(X_n)$, $n = 0, 1, 2 \dots$.

a) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass im Allgemeinen Y keine Markovkette ist.

b) Finden Sie Bedingungen, damit Y eine Markovkette ist. Wie sieht die Übergangsmatrix von Y aus?

c) Wie sehen diese Bedingungen im Fall zeitkontinuierlicher Markovketten aus?

d) Sei $n \in \mathbb{N}$, $(R_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ Kingmans-n-Koaleszent (aufgefasst als zeitkontinuierliche Markovkette auf $\mathcal{E}_n$, der Menge der Äquivalenzrelationen auf $\{1,\dots,n\}$). Folgern Sie aus c):

i) Der Blockzählprozess $N_t := \#R_t^{(n)}$, $t \geqslant 0$ ist eine zeitkontinuierliche Markovkette.

ii) Sei $1 \leqslant n' < n$ und $\pi_{n,n'} : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_{n'}$ die Einschränkungsabbildung (d.h. für $\eta = \{C_1,\dots,C_k\} \in \mathcal{E}_n$ ist $\pi_{n,n'}(\eta) = \{C_i \cap \{1,\dots,n'\} : i = 1,\dots,k\} \in \mathcal{E}_{n'}$, wobei leere Äquivalenzklassen stillschweigend entfernt werden).
Dann ist $(\pi_{n,n'}(R_t^{(n)}))_{t\geqslant 0}$ ein n'-Koaleszent.

Hinweise: a) Sie können $\#E = 3$ betrachten oder sich spannendere, komplexere Beispiele überlegen.

b) Betrachten Sie die Äquivalenzrelation $\sim$ auf E, $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ (und sei $[x] := \{x' \in E : x' \sim x\} = f^{-1}(f(\{x\}))$ die zugehörige Äquivalenzklasse). Nehmen wir an, wir haben $Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n$ beobachtet. Was sagt das über X_n? Damit die bedingte Verteilung von Y_{n+1} nur von y_n abhängt, nicht aber von den $y_0, \dots, y_{n-1}$, welche Eigenschaft muss $p(\cdot, \cdot)$ haben?

Aufgabe 2.4 (Zur Gesamtlänge des n-Koaleszenten) Sei L_n die Gesamtlänge (d.h. die Summe aller Astlängen) des n-Koaleszenten. Im Gegensatz der Höhe (d.h. dem Abstand von den Blättern zur Wurzel) hat L_n für $n \to \infty$ keinen endlichen Grenzwert.

a) Zeigen Sie für $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{L_n}{\log n} - 2\Big| > \varepsilon\Big) = 0$$

b) Tatsächlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n - 2\log n \leqslant t) = \exp\big(-\exp(-t/2)\big), \quad t \in \mathbb{R}$$

d.h. die Grenzverteilung ist eine Gumbel-Verteilung (mit Skalenparamter 1/2 und Lageparameter 0). Haben Sie eine Idee, wie man das beweisen kann? (Zudem: Warum tritt hier eine der klassischen Extremwertverteilungen auf?)

Hinweis: a) Stellen Sie L_n als Summe von $n-1$ unabhängigen ZVn dar. Berechnen Sie damit $\mathbb{E}[L_n]$ und $\mathrm{Var}[L_n]$.