Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastische Modelle der Populationsbiologie: Übungen und Ergänzungen **WS 2022/23**

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (Erwartete Auftreffzeiten für Markov-Ketten) Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovkette auf der endlichen Menge E mit Übergangsmatrix $(p(x,y))_{x,y\in E}$, $\varnothing \neq B \subsetneq E$, $\tau_B := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\}$, es gelte $\mathbb{P}_x(\tau_B < \infty) > 0$ für alle $x \in E$.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $g(x) := \mathbb{E}_x[\tau_B], x \in E$ löst das Gleichungssystem

$$\begin{cases} g(x) = 0, & x \in B, \\ g(x) = 1 + \sum_y p(x,y)g(y), & x \in E\backslash B \end{cases} \tag{1}$$

Ist die Lösung eindeutig?

b) Sei $N \in \mathbb{N}$, $E = \{0,1,\dots,N\} \supset B = \{0,N\}$, X die symmetrische gewöhnliche Irrfahrt auf E (mit Absorption in B, d.h. $p(0,0) = p(N,N) = 1$). Berechnen Sie $\mathbb{E}_x[\tau_B]$ für $x \in E$.

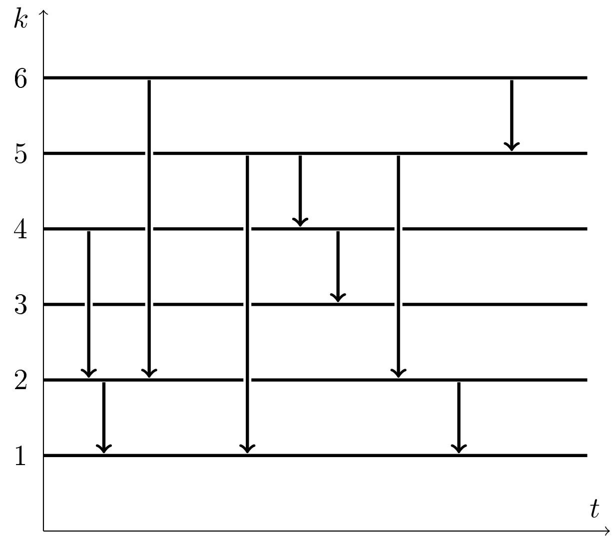
[*Hinweis.* Sie können z.B. mit quadratischen Polynomen experimentieren oder die in (1) implizite Differenzengleichung betrachten.]

Aufgabe 3.2 (Kopplung aller (Kingman-)n-Koaleszenten via "look down") Für $1 \leqslant i < j$ seien $(L_{j,i}(t))_{t\geqslant 0}$ unabhängige Poissonprozesse auf $\mathbb{R}_+$ mit Rate 1. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $(A_k(t))_{t\geqslant 0}$ gegeben als die Lösung von

$$A_k(t) = k - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} \int_0^t (j-i)\mathbf{1}(A_k(s-) = j)\, L_{j,i}(ds), \quad t \geqslant 0$$

(wobei wir $L_{j,i}$ als die Verteilungsfunktion des – zufälligen – Zählmaßes auffassen, das jeweils an den Sprungstellen von $L_{j,i}$ Atome der Masse 1 besitzt).

Zur Veranschaulichung des Systems der Lösungen A_k kann folgendes Bild hilfreich sein: Für jedes $k = 1, 2, \dots$ betrachte eine Kopie der Zeitachse auf Niveau k, für $i < j$ zeichne zu den Sprungzeitpunkten des Prozesses $L_{j,i}$ einen Pfeil von Niveau j nach Niveau i.



Weier sei $Q = (q_{\ell,m})_{\ell,m\in\mathbb{N}}$ mit

$$q_{\ell,m} = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant m < \ell \\ -(\ell-1), & m = \ell, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $A_k = (A_k(t))_{t\geqslant 0}$ Markovkette auf $[k] := \{1,\dots,k\}$, deren Sprungratenmatrix durch die Einschränkung von Q auf $[k]$ gegeben ist.

b) Die Prozesse A_k, $k \in \mathbb{N}$ bilden ein System verschmelzender Markovketten, d.h. für $k \neq \ell$ und $t \geqslant 0$ gilt

$$A_k(t) = A_\ell(t) \quad \Longrightarrow \quad A_k(t+s) = A_\ell(t+s) \text{ für all } s > 0$$

c) Für $n \in \mathbb{N}$ und $t \geqslant 0$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $R_t^{(n)}$ of $[n]$ via

$$k \sim_{R_t^{(n)}} \ell \;\; :\Leftrightarrow \;\; A_k(t) = A_\ell(t)$$

$(R_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ ist verteilt wie Kingmans-n-Koaleszent.

d) $R_t^{(n)}$ entsteht aus $R_t^{(n+1)}$ durch Einschränkung der Klassen von $R_t^{(n+1)}$ auf $[n]$ (eine etwaige leere Klasse $\varnothing = \{n+1\} \cap [n]$ wird stillschweigend entfernt).

Aufgabe 3.3 (Kolmogorovs Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen für zeitkontinuierliche Markovketten) Sei $Q = (q_{x,y})_{x,y\in E}$ die Sprungratenmatrix einer zeitkontinuierlichen Markovkette auf der endlichen Menge E. Überzeugen Sie sich, dass mit

$$\exp(tQ) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n \tag{2}$$

für $t \geqslant 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(tQ) = Q \exp(tQ) = \exp(tQ) Q, \tag{3}$$

gilt, demnach für $t \geqslant 0$ und $P_t = e^{tQ} = (p_t(x,y))_{x,y\in E}$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t = QP_t, \text{ d.h. } \forall\, x,y \in E \;:\quad \frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y) = \sum_z q_{x,z} p_t(z,y) = \sum_z q_{x,z}\big(p_t(z,y) - p_t(x,y)\big), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t = P_t Q, \text{ d.h. } \forall\, x,y \in E \;:\quad \frac{\partial}{\partial t} p_t(x,y) = \sum_z p_t(x,z) q_{z,y} = p_t(x,y) q_{y,y} + \sum_{z\neq y} p_t(x,z) q_{z,y}. \tag{5}$$

[*Hinweis.* Warum ist gliedweise Differentiation der Exponentialreihe hier erlaubt?

Bericht: Die Gleichungen (4) und (5) haben eine stochastische Interpretation. (4) heißt Kolmogorovs *Rückwärtsgleichung*, denn es gilt (wir schreiben $\mathbb{P}_x(\cdot)$ für $\mathbb{P}(\,\cdot\,|X_0 = x)$)

$$\begin{aligned} \frac{p_{t+h}(x,y) - p_t(x,y)}{h} &= \frac{1}{h}\big(\mathbb{P}_x(X_{t+h} = y) - \mathbb{P}_x(X_t = y)\big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\sum\nolimits_z \mathbb{P}_x(X_{t+h} = y | X_h = z)\mathbb{P}_x(X_h = z) - \mathbb{P}_x(X_t = y)\Big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\sum\nolimits_z p_t(z,y)\big(1_{\{x=z\}} + hq_{x,z} + o(h)\big) - p_t(x,y)\Big) = \sum_z q_{x,z} p_t(z,y) + o(1), \end{aligned}$$

man leitet sie also aus her durch „Rückwärtszerlegung“ des Prozesses X im Intervall $[0, t+h]$ gemäß dem Verhalten am Anfang des Intervalls. Analog heißt (5) Kolmogorovs *Vorwärtsgleichung*, sie entsteht durch Zerlegung gemäß dem Wert bei t:

$$\begin{aligned}\frac{p_{t+h}(x,y) - p_t(x,y)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\sum\nolimits_z \mathbb{P}_x(X_{t+h} = y | X_t = z)\mathbb{P}_x(X_t = z) - \mathbb{P}_x(X_t = y)\Big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\sum\nolimits_z p_t(x,z)\big(1_{\{z=y\}} + hq_{y,z} + o(h)\big) - p_t(x,y)\Big) = \sum_z q_{x,z} p_t(z,y) + o(1).\end{aligned}$$

Sowohl (4) als auch (5) sind (im Fall $|E| < \infty$) eindeutig lösbar und beide bestimmen die Halbgruppe von Übergangsmatrizen $(P_t)_{t \geqslant 0}$ – es sind beides endliche Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.]

b) Sei $E = \{0, 1\}$, $Q = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ mit $a, b > 0$.

Zeigen Sie: Für $x, y \in \{0, 1\}$ gilt $p_t(x, y) = \delta_{x,y} e^{-(a+b)t} + (1 - e^{-(a+b)t})\mu(y)$ mit $\mu(0) = b/(a + b)$, $\mu(1) = a/(a + b)$.

c) Sei $E = \{0, 1, 2, 3\}$ (oder auch $E = \{\mathsf{A}, \mathsf{G}, \mathsf{C}, \mathsf{T}\}$) und

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Für $x, y \in E$ gilt $p_t(x, y) = \delta_{x,y} e^{-4t} + \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})$.