Prof. Dr. Matthias Birkner | JGU Mainz

Stochastische Modelle der Populationsbiologie: Übungen und Ergänzungen | **WS 2022/23**

Blatt 8

Aufgabe 8.1 (Eine Poissonprozess-Konstruktion von Λ-Koaleszenten) Sei Λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1]$ mit $\Lambda(\{0\}) = 0$,

$$Q = \sum\nolimits_i \delta_{(t_i, x_i; u_1, u_2, \dots)}$$

ein Poissonprozess auf $[0,\infty) \times (0,1] \times [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit Intensität $dt \otimes x^{-2}\Lambda(dx) \otimes (\mathrm{Unif}[0,1])^{\otimes \mathbb{N}}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leqslant m < n$ sei

$$J_{n,m}(t) := \#\{t_i \leqslant t : u_n \leqslant x_i, u_m \leqslant x_i \text{ und } u_\ell > x_i \text{ für } 1 \leqslant \ell < m\}, \quad t \geqslant 0$$

a) Zeigen Sie, dass die Menge der Sprünge von $J_{n,m}$ f.s. keine endlichen Häufungspunkte hat.

b) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $(A_k(t))_{t \geqslant 0}$ gegeben als die Lösung von

$$A_k(t) = k - \sum_{1 \leqslant m < n \leqslant k} \int_0^t (n-m)\mathbf{1}(A_k(s-) = n)\, J_{n,m}(ds), \quad t \geqslant 0$$

(wobei wir $J_{n,m}$ als die Verteilungsfunktion des – zufälligen – Zählmaßes auffassen, das jeweils an den Sprungstellen von $J_{n,m}$ Atome der Masse 1 besitzt).

Weiter sei für $t \geqslant 0$ eine Äquivalenzrelation $\mathcal{R}_t$ auf $\mathbb{N}$ definiert via

$$k \sim_{\mathcal{R}_t} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad A_k(t) = A_\ell(t)$$

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Einschränkung von $\mathcal{R}_t$ auf $\{1, 2, \dots, n\}$ ein Λ-n-Koaleszent.

Hinweis. Vergleichen Sie dies mit Aufgabe 3.2.

Aufgabe 8.2 (Ein Zugang zum Satz von de Finetti) Sei $X = (X_1, X_2, \dots)$ eine unendliche, austauschbare Folge von $\{0,1\}$-wertigen Zufallsvariablen, d.h. es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$ und jede Permutation π von $\{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{\pi(1)} = x_1, X_{\pi(2)} = x_2, \dots, X_{\pi(n)} = x_n)$$

Wir möchten einsehen, dass die Verteilung von X dann eine Mischung über u.i.v.-Folgen ist, d.h. es gibt eine $[0,1]$-wertige Zufallsvariable ξ, so dass für jede Wahl von $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$ gilt

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{E}\big[\xi^k (1-\xi)^{n-k}\big] \quad \text{mit } k = \sum_{j=1}^n x_j \tag{1}$$

a) Sei $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Zeigen Sie: Für $0 \leqslant k \leqslant n$ und $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$ mit $x_1 + \dots + x_n = k$ gilt

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n \mid S_n = k) = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

b) Sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} k_n/n = y \in [0,1]$. Für $m \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_m \in \{0,1\}$ gilt

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m \mid S_n = k_n) = y^{x_1+\cdots+x_m}(1-y)^{m-x_1-\cdots-x_m}$$

c) Sei $n_j \nearrow \infty$ für $j \to \infty$ derart, dass die Folge von Zufallsvariablen S_{n_j}/n_j in Verteilung gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $[0,1]$ konvergiert, d.h. es gilt

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\big[f(S_{n_j}/n_j)\big] = \int_{[0,1]} f(y)\,\nu(dy) \qquad \text{für jede stetige Funktion } f:[0,1]\to\mathbb{R}$$

Folgern Sie, dass dann für $m \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_m \in \{0,1\}$ gilt

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m) = \int_{[0,1]} y^{x_1+\cdots+x_m}(1-y)^{m-x_1-\cdots-x_m}\,\nu(dy)$$

Sei nun $n'_j \nearrow \infty$ eine weitere Folge derart, dass $S_{n'_j}/n'_j$ in Verteilung gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν' auf $[0,1]$ konvergiert. Dann gilt $\nu' = \nu$.

d)* Kennen Sie einen Satz, der garantiert, dass es stets eine Folge $(n_j)_j$ mit den Eigenschaften aus c) gibt? Warum gilt (1)?

Aufgabe 8.3 (Für großes n verhält sich die Skelettkette des Blockzählprozesses für manche Koaleszenten fast wie eine Irrfahrt) Sei $1 < \alpha < 2$ und $\Lambda = \mathrm{Beta}(2-\alpha,\alpha)$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1]$ mit Dichte

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

für $n > k \geqslant 1$ sei

$$q_{n,k} = \binom{n}{n-k+1}\int_{[0,1]} x^{n-k-1}(1-x)^{k-1}\,\Lambda(dx)$$

die Rate, mit der der zu diesem Λ-Koaleszenten gehörende Blockzählprozess von n nach k springt und $-q_{n,n} = \sum_{k=1}^{n-1} q_{n,k}$ die Gesamtsprungrate im Zustand n. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha/(\alpha\Gamma(\alpha))}{-q_{n,n}} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n,n-j}}{-q_{n,n}} = \frac{\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\Gamma(j+1-\alpha)}{\Gamma(j+2)}, \quad j = 1,2,\dots$$

Hinweis. Verwenden Sie z.B. die Darstellung

$$\begin{aligned} -q_{n,n} &= \int_{[0,1]} \frac{1-(1-x)^n - nx(1-x)^{n-1}}{x^2}\,\Lambda(dx) = \int_{[0,1]}\int_0^x n(n-1)t(1-t)^{n-2}\,dt\,\frac{1}{x^2}\Lambda(dx) \\ &= n(n-1)\int_0^1 t(1-t)^{n-2}\int_{(t,1]}\frac{1}{x^2}\Lambda(dx)\,dt \end{aligned}$$

zusammen mit

$$\int_t^1 \frac{1}{x^2}x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}\,dx \sim \int_t^1 x^{-1-\alpha}\,dx \sim \frac{1}{\alpha}t^{-\alpha} \quad \text{für } t \downarrow 0$$

Zudem: für $a,b>0$ gilt $\int_0^t x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ sowie $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.