Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastische Modelle der Populationsbiologie: Übungen und Ergänzungen **WS 2022/23**

Blatt 9

Aufgabe 9.1 (Beweisdetails zu Beispiel 3.7) Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariablen wie in Beispiel 3.7 mit $\mathbb{P}(X_1 = k) \sim c_X \alpha k^{-1-\alpha}$ für $k \to \infty$, wobei $c_X \in (0, \infty)$ und $1 < \alpha < 2$, wir schreiben $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ und $S_N := X_1 + \cdots + X_n$.

a) Zeigen Sie: Für $\varepsilon > 0$ gibt es $c > 0$ und $C < \infty$; so, dass gilt

$$\mathbb{P}(S_N < (1-\varepsilon)N\mu) \leqslant \exp(-cN)$$

und

$$\mathbb{P}(S_N > (1+\varepsilon)N\mu) \leqslant CN^{1-\alpha}$$

b) Zeigen Sie

$$\lim_{N\to\infty} N^\alpha \mathbb{E}\Big[\frac{X_1(X_1-1)}{S_N(S_N-1)}\Big] = c_X \alpha \mu^{-\alpha} \Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha)$$

und für $0 < x < 1$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} N^\alpha \mathbb{P}\Big(\frac{X_1}{S_N} > x\Big) = c_X \mu^{-\alpha} \int_x^1 \frac{1}{y^2} \cdot \alpha y^{1-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}\, dy$$

Hinweise. a) Sei $\varphi(\lambda) := \mathbb{E}[\exp(\lambda(\mu - X_1))]$ für $\lambda \geqslant 0$. φ ist stetig in $[0,\infty)$ und stetig differenzierbar in $(0,\infty)$ mit $\lim_{\lambda\downarrow 0} \varphi'(\lambda) = \mathbb{E}[\mu - X_1] = 0$, $\varphi(0) = 1$. Daher gibt es $\lambda_0 > 0$ mit $\varphi(\lambda) \leqslant 1 + \varepsilon\lambda/3 \leqslant e^{\lambda\varepsilon/2}$ für $0 \leqslant \lambda < \lambda_0$. Weiter ist

$$\mathbb{P}(S_N < (1-\varepsilon)N\mu) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^N (\mu - X_i) > \varepsilon N\Big) \leqslant e^{-\lambda\varepsilon N}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sum_{i=1}^N \lambda(\mu - X_i)\Big)\Big] = \big(e^{-\lambda\varepsilon}\varphi(\lambda)\big)^N$$

Für die andere Ungleichung beachten Sie

$$\mathbb{P}(S_N > (1+\varepsilon)N\mu) \leqslant N\mathbb{P}(X_1 > N) + \mathbb{P}\big(S_N > (1+\varepsilon)N\mu, \max_{1\leqslant j\leqslant N} X_j \leqslant N\big)$$

sowie $\mathbb{P}(X_1 > N) \leqslant \widetilde{C}N^{-\alpha}$ und $\mathbb{E}[X_1^2 \mathbb{1}(X_1 \leqslant N)] \leqslant \widetilde{C}N^{2-\alpha}$ für eine Konstante $\widetilde{C} < \infty$; verwenden Sie dann für den zweiten Term in obiger Formel die Chebychev-Ungleichung in geeigneter Weise.

b) Der entscheidende Gedanke ist, jeweils S_N durch $X_1 + (N-1)\mu$ zu ersetzen (bzw. durch $X_1 + N\mu$, was für die Asymptotik keinen Unterschied ausmacht) und den dabei entstehenden Fehler mittels Teil a) zu geeignet zu beschränken.

Falls Sie „stecken bleiben“, können Sie den Artikel von Jason Schweinsberg, Coalescent processes obtained from supercritical Galton-Watson processes, *Stoch. Proc. Appl.* 106, no. 1, 107–139, (2003) konsultieren.

Aufgabe 9.2 (Kingmans Paintbox-Konstruktion) a) Seien $0 \leqslant A_i \leqslant 1$, $i \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \leqslant 1$, weiter seien $B_1, B_2, \dots$ jeweils $\mathbb{N} \cup \{0\}$-wertige Zufallsvariablen, die gegeben $A = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ u.i.v. sind mit $\mathbb{P}(B_1 = i \mid A) = A_i$, $i \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{P}(B_1 = 0 \mid A) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Wir definieren eine zufällige Äquivalenzrelation $\mathcal{R}$ auf $\mathbb{N}$ via

$$m \sim_{\mathcal{R}} n \iff B_m = B_n \geqslant 1 \qquad \text{für } m, n \in \mathbb{N}$$

Für eine endliche Permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (d.h. es gilt $\#\{j \in \mathbb{N} : \sigma(j) \neq j\} < \infty$) definieren wir $\sigma\mathcal{R}$ via

$$m \sim_{\sigma\mathcal{R}} n \iff \sigma(m) \sim_{\mathcal{R}} \sigma(n) \qquad \text{für } m, n \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie: $\mathcal{R}$ ist *austauschbar*, d.h. $\sigma\mathcal{R}$ hat dieselbe Verteilung wie $\mathcal{R}$ für jedes solche σ.

b) Sei $\mathcal{R}$ eine austauschbare zufällige Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$. In dieser Teilaufgabe wollen wir uns überzeugen, dass dann $\mathcal{R}$ in Verteilung einer Konstruktion wie in Teil a) gleicht.

(i) Seien $C_1, C_2, \dots$ die Äquivalenzklassen von $\mathcal{R}$, sortiert nach dem jeweils kleinsten Element (d.h. C_1 enthält die 1, C_2 enthält das kleinste Element von $\mathbb{N} \backslash C_1$, etc.). Weiter seinen $U_1, U_2, \dots$ unabhängige Unif$([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Für $j \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$X_j = U_k \iff j \in C_k$$

Zeigen Sie: Die Folge $(X_1, X_2, \dots)$ ist austauschbar, d.h. es gilt

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(n)})$$

für jede Permutation π von $\{1, \dots, n\}$, vgl. auch Aufgabe 8.2 (dort wurden allerdings wörtlich nur $\{0,1\}$-wertige X_is betrachtet), und die Folge von Funktionen

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}(X_j \leqslant x), \quad x \in [0,1]$$

konvergiert für $n \to \infty$ fast sicher uniform gegen eine (i.A.) zufällige Limesfunktion $F(x)$, die nicht-fallend in x ist. Die Menge der Sprunstellen von F ist enthalten in $\{U_1, U_2, \dots\}$.

(ii) Seien $\widetilde{A}_1 \geqslant \widetilde{A}_2 \geqslant \cdots$ die der Größe nach sortierten Sprünge der Limesfunktion F aus Teil *(i)*, wobei wir $\widetilde{A}_m = 0$ setzen, falls F weniger als m Sprungstellen hat. Sei dann $\widetilde{\mathcal{R}}$ die zufällige Äquivalenzrelation, die entsteht, wenn man in die Konstruktion aus Teil a) für die dort verwendeten A_i die obigen $\widetilde{A}_i$ einsetzt. Zeigen Sie: Dann gilt $\widetilde{\mathcal{R}} =^d \mathcal{R}$.

Hinweis. Details finden sich beispielsweise in Kapitel 2.2 von Jim Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes*, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXII – 2002, Springer, (2006).