

Aufgabe 10.1 (Poissonprozess, zeitkontinuierliche Markovketten und zugehörige Martingale) a) Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess auf $[0, \infty)$ mit Rate $\lambda > 0$, d.h. (N_t) hat rechtsstetige Pfade und für $t, h \geq 0$ ist $N_{t+h} - N_t$ unabhängig von $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$ und $\text{Pois}(\lambda h)$ -verteilt. Zeigen Sie:

$$M_t := N_t - \lambda t \quad \text{und} \quad \widetilde{M}_t := M_t^2 - \lambda t, \quad t \geq 0$$

sind Martingale (bezüglich $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$).

b) Seien $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ die Sprungzeitpunkte von (N_t) und für $i \in \mathbb{N}$ seien

$$\begin{aligned} H_t^{(i)} &:= M_{t \wedge T_i} - M_{t \wedge T_{i-1}} = \mathbb{1}(T_{i-1} < t) \left(\mathbb{1}(T_i \leq t) - \lambda((T_i \wedge t) - (T_{i-1} \wedge t)) \right), \quad t \geq 0 \\ &= \mathbb{1}(T_i \leq t) - \lambda((T_i \wedge t) - (T_{i-1} \wedge t)) \end{aligned}$$

und

$$\widetilde{H}_t^{(i)} := (H_t^{(i)})^2 - \lambda((T_i \wedge t) - (T_{i-1} \wedge t)), \quad t \geq 0$$

Zeigen Sie: $(H_t^{(i)})_{t \geq 0}$ und $(\widetilde{H}_t^{(i)})_{t \geq 0}$ sind Martingale. Für $i \neq j$ ist auch $(H_t^{(i)} H_t^{(j)})_{t \geq 0}$ ein Martingal.

c) Sei weiterhin E eine endliche Menge, $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine zeitdiskrete Markovkette auf E mit Übergangsmatrix $(\tilde{p}_{x,y})_{x,y \in E}$, die unabhängig von $(N_t)_{t \geq 0}$ ist, und $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$g(x) := \sum_{y \in E} \tilde{p}_{x,y} (f(y) - f(x)), \quad h(x) := \sum_{y \in E} \tilde{p}_{x,y} (f(y) - f(x))^2, \quad x \in E$$

und setzen für $i \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$

$$\begin{aligned} W_t^{(i)} &:= \mathbb{1}(T_i \leq t) (f(\tilde{X}_i) - f(\tilde{X}_{i-1})) - \lambda g(\tilde{X}_{i-1}) ((T_i \wedge t) - (T_{i-1} \wedge t)) \\ \widetilde{W}_t^{(i)} &:= (W_t^{(i)})^2 - \lambda h(\tilde{X}_{i-1}) ((T_i \wedge t) - (T_{i-1} \wedge t)) \end{aligned}$$

Dann sind $(W_t^{(i)})_{t \geq 0}$ und $(\widetilde{W}_t^{(i)})_{t \geq 0}$ Martingale bezüglich der Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(N_s, s \leq t; \tilde{X}_k, k \leq N_t))_{t \geq 0}$. Für $i \neq j$ ist auch $(W_t^{(i)} W_t^{(j)})_{t \geq 0}$ ein Martingal.

d) Sei E eine endliche Menge, $(q_{x,y})_{x,y \in E}$ die Sprungratenmatrix einer zeitkontinuierlichen Markovkette $X = (X_t)_{t \geq 0}$ auf E . Für $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir

$$Lf(x) = \sum_{y \in E} q_{x,y} (f(y) - f(x)), \quad \Gamma f(x) = Lf^2(x) - 2f(x)Lf(x) = \sum_{y \in E} q_{x,y} (f(y) - f(x))^2, \quad x \in E$$

Dann sind

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds \quad \text{und} \quad \widetilde{M}_t := M_t^2 - \int_0^t \Gamma f(X_s) ds, \quad t \geq 0$$

Martingale (z.B. bezüglich der von X erzeugten Filtration).

Hinweise. a) Für die Martingaleigenschaft von $(\tilde{M}_t)$ beachten Sie z.B.

$$(N_{t+h} - \lambda(t+h))^2 = (N_t - \lambda t)^2 + 2(N_t - \lambda t)(N_{t+h} - N_t - \lambda h) + (N_{t+h} - N_t - \lambda h)^2$$

b) Die Sprungzeiten T_i sind Stoppzeiten bezüglich $\mathcal{F}$; erinnern Sie sich, dass gestoppte Martingale wiederum Martingale sind. Beachten Sie weiter, dass

$$(H_t^{(i)})^2 = \mathbb{1}(t > T_{i-1})(M_{t \wedge T_i} - M_{t \wedge T_{i-1}})^2 = \mathbb{1}(t > T_{i-1})(M_{t \wedge T_i}^2 + M_{T_{i-1}}^2 - 2M_{t \wedge T_i}M_{T_{i-1}})$$

Warum gilt für $i < j$ und $s < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H_t^{(i)} H_t^{(j)} | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[H_{t \wedge T_i}^{(i)} H_t^{(j)} | \mathcal{F}_{s \vee T_i}] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[H_{t \wedge T_i}^{(i)} \mathbb{E}[H_t^{(j)} | \mathcal{F}_{s \vee T_i}] | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[H_{t \wedge T_i}^{(i)} H_{t \wedge (s \vee T_i)}^{(j)} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[H_{t \wedge T_i}^{(i)} \mathbb{1}(s > T_i) H_s^{(j)} | \mathcal{F}_s] = H_s^{(i)} H_s^{(j)} \end{aligned}$$

(Die allgemeine Beobachtung hier ist, dass das Produkt zweier Martingale, die sich nur in disjunkten [möglicherweise zufälligen] Intervallen bewegen, wieder ein Martingal ist.)

c) Man kann z.B. schreiben

$$W_t^{(i)} = W_t^{(i)} = \mathbb{1}(T_{i-1} < t) W_{t \wedge T_i}^{(i)} = g(\tilde{X}_{i-1}) H_t^{(i)} + J_t$$

mit $J_t = \mathbb{1}(T_i \leq t)(f(\tilde{X}_i) - f(\tilde{X}_{i-1}) - g(\tilde{X}_{i-1}))$. Prüfen Sie dann, dass $(g(\tilde{X}_{i-1}) H_t^{(i)})_{t \geq 0}$ und $(J_t)_{t \geq 0}$ beides Martingale bezüglich $\tilde{\mathcal{F}}$ sind.

Für die Martingaleigenschaft von $\tilde{W}^{(i)}$ kann es hilfreich sein zu prüfen, dass auch

$$\begin{aligned} &(g(\tilde{X}_{i-1}))^2 (H_t^{(i)})^2 - \lambda (g(\tilde{X}_{i-1}))^2 ((T_i \wedge t) - (T_{i-1} \wedge t)), \quad t \geq 0 \\ &J_t - (h(\tilde{X}_{i-1}) - (g(\tilde{X}_{i-1}))^2) ((T_i \wedge t) - (T_{i-1} \wedge t)), \quad t \geq 0 \quad \text{und} \\ &g(\tilde{X}_{i-1}) H_t^{(i)} J_t, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ -Martingale sind.

d) Wir können den Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ folgendermaßen darstellen: Sei $\lambda = \max\{-q_{x,x} : x \in E\}$, $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Rate λ und unabhängig davon $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine zeitdiskrete Markovkette auf E mit Übergangsmatrix

$$\tilde{p}_{x,y} = \begin{cases} q_{x,y}/\lambda, & x \neq y \\ 1 - \sum_{y \neq x} q_{x,y}/\lambda, & y = x \end{cases}$$

Dann ist $X_t := \tilde{X}_{N_t}$, $t \geq 0$ eine zeitkontinuierliche Markovkette mit Sprungratenmatrix $(q_{x,y})$ und Startpunkt $X_0 = \tilde{X}_0$. Mit dieser Darstellung ist $f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{N_t} (f(\tilde{X}_i) - f(\tilde{X}_{i-1}))$ und

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds = \sum_{i=1}^{\infty} W_t^{(i)}$$

Beachten Sie auch: Da $|W_t^{(i)}| \leq 2\|f\|_{\infty} \mathbb{1}(T_i \leq t) + \lambda \|g\|_{\infty} ((T_i \wedge t) - (T_{i-1} \wedge t))$ ist, gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n |W_t^{(i)}| \leq C(N_t + t)$ für eine Konstante $C < \infty$.

Aufgabe 10.2 (Rund um den zeitdiskreten Galton-Watson-Prozess) Sei X eine $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariable, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$, $0 \leq t \leq 1$ die Erzeugendenfunktion von X , es gelte $\mu := \mathbb{E}[X] = \varphi'_X(1-) < \infty$, $\sigma^2 := \text{Var}[X] < \infty$ und $\mathbb{P}(X = 1) < 1$. Seien weiter $X_{n,i}$, $n, i \in \mathbb{N}$ u.i.v. Kopien von X , wir setzen

$$Z_0 = 1, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Z_n beschreibt die Größe der n -ten Generation einer Population von Individuen, die sich unabhängig mit jeweils derselben Verteilung in diskreten Zeitschritten vermehren, $(Z_n)_n$ heißt in der Literatur ein Galton-Watson-Prozess (manchmal auch Bienaymé-Galton-Watson-Prozess).

Zeigen Sie einige oder alle der folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n$ und $(M_n)_{n=0,1,\dots}$ mit $M_n := Z_n/\mu^n$ ist ein Martingal (z.B. bezüglich der von (Z_n) erzeugten Filtration).

b) Es gilt

$$\mathbb{E}[Z_n^2] = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{(1/\mu)-1}(\mu^n - \mu^{2n}) + \mu^{2n}, & \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 + 1, & \mu = 1 \end{cases}$$

Falls $\mu > 1$ ist, so ist das Martingal $(M_n)_n$ aus Teil b) $\mathcal{L}^2$ -beschränkt und es gilt

$$\mathbb{P}(Z_n > 0 \text{ für alle } n) \geq \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n > 0) > 0$$

c) Die Erzeugendenfunktion von Z_n ist gegeben durch

$$\varphi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}[t^{Z_n}] = (\underbrace{\varphi_X \circ \dots \circ \varphi_X}_{n \text{ mal}})(t)$$

d) Sei $q_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$, so gilt $q_n \nearrow q := \mathbb{P}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ dem Ereignis, dass die Population ausstirbt. q ist der kleinste Fixpunkt der Funktion φ_X . (Die Funktion φ_X hat maximal 2 Fixpunkte.)

Falls $\mu \leq 1$, so gilt $q = 1$; falls $\mu > 1$, so gilt $0 \leq q < 1$.

e) Für $0 < s \leq 1$ sei $X^{(s)}$ eine $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^{(s)}] = 1 + s$ und $\sigma_s^2 := \text{Var}[X^{(s)}] < \infty$, es gelte $\lim_{s \downarrow 0} \sigma_s^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Sei $(Z_n^{(s)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Galton-Watson-Prozess mit $Z_0^{(s)} = 1$ und Nachkommensverteilung $\mathcal{L}(X^{(s)})$, d.h. wir verwenden für die $X_{n,i}$ unabhängige Kopien von $X^{(s)}$ in obiger Konstruktion. Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z_n^{(s)} > 0 \text{ für alle } n) \sim \frac{2s}{\sigma^2} \quad \text{für } s \downarrow 0$$

Hinweise. a)–d) sind mehr oder weniger „Standard“-Eigenschaften von Galton-Watson-Prozessen, die Sie in vielen guten Büchern finden, z.B. in A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Aufl., Springer, 2020 oder in R. Lyons, Y. Peres, *Probability on Trees and Networks*, Cambridge University Press, 2016, <https://rdlyons.pages.iu.edu/prbtree/prbtree.html>.

e) Sei q_s der kleinste Fixpunkt von $\varphi_s(t) = \mathbb{E}[t^{X^{(s)}}]$. Angesichts von d) geht es also um die Größe von $1 - q_s$ für kleine s . Hierfür kann es hilfreich sein,

$$\varphi_s(1 - w) = 1 - (1 + s)w + w\Lambda_s(w), \quad 0 \leq w \leq 1$$

mit $\Lambda_s(w) = (\varphi_s(1 - w) - 1 + (1 + s)w)/w$ zu schreiben. Zeigen Sie, dass $\Lambda_s : [0, 1] \rightarrow [0, s + \varphi_s(0)]$ stetig und strikt monoton wachsend ist mit $\Lambda_s(0) = 0$, so dass die Umkehrfunktion $\Lambda_s^{-1} : [0, s + \varphi_s(0)] \rightarrow [0, 1]$ existiert, und dass $q_s = 1 - \Lambda_s^{-1}(s)$.

Weiter ist $\varphi'_s(1-) = \mathbb{E}[X^{(s)}] = 1 + s$, $\varphi''_s(1-) = \mathbb{E}[X^{(s)}(X^{(s)} - 1)] = \sigma_s^2 + s(1 + s)$ und $0 \leq \varphi'''_s(t) = \mathbb{E}[X^{(s)}(X^{(s)} - 1)(X^{(s)} - 2)t^{X^{(s)}}] \leq \mathbb{E}[(X^{(s)})^3] \leq C$ für $0 \leq t < 1$, so dass Taylorentwicklung liefert

$$\Lambda_s(w) = \frac{1}{2}(\sigma_s^2 + s(1 + s))w + R(w)$$

mit $|R(w)| \leq Cw^2$.