Stochastik-Praktikum, WS 2010/2011

Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell zur Bewertung von Derivaten und die Formel von Black und Scholes

Matthias Birkner

http://www.mathematik.uni-mainz.de/~birkner/SP1011/

20.12.2010

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Inhalt

Eine Aktie habe heute den Wert $S_0 = 400\,€$, zu einem zukünftigen Zeitpunkt T gelte

$$S_T = \begin{cases} 500\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p = \frac{1}{2}, \\ 350\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Eine Aktie habe heute den Wert $S_0 = 400\,€$, zu einem zukünftigen Zeitpunkt T gelte

$$S_T = \begin{cases} 500\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p = \frac{1}{2}, \\ 350\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Eine (europäische) Kaufoption („Call-Option“) auf die Aktie (mit Fälligkeit („maturity“) T und Ausübungspreis („strike“) K):
Das Recht (aber nicht die Pflicht), zum Zeitpunkt T eine Aktie zum Preis K zu kaufen.

Wert des Calls zum Zeitpunkt T:

$$C_T = (S_T - K)_+$$

Eine Aktie habe heute den Wert $S_0 = 400$ €, zu einem zukünftigen Zeitpunkt T gelte

$$S_T = \begin{cases} 500\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p = \frac{1}{2}, \\ 350\,€ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Eine (europäische) Kaufoption („Call-Option“) auf die Aktie (mit Fälligkeit („maturity“) T und Ausübungspreis („strike“) K):
Das Recht (aber nicht die Pflicht), zum Zeitpunkt T eine Aktie zum Preis K zu kaufen.

Wert des Calls zum Zeitpunkt T:

$$C_T = (S_T - K)_+$$

Analog: (Europäische) Verkaufsoption („Put-Option“), das Recht, die Aktie zum Zeitpunkt T zum Preis K zu verkaufen.
Wert des Put zur Zeit T:

$$P_T = (K - S_T)_+$$

Fairer Preis einer Option?

Kurs heute $S_0 = 400$ €, zum Zeitpunkt T $S_T = 500$ € oder $S_T = 350$ €, jew. mit W'keit $1/2$.

Wert des Call zur Zeit T: $C_T = (S_T - K)_+$

Frage: $\pi(C)$, Wert des Call heute (z.B. für $K = 440$ €)?

Fairer Preis einer Option?

Kurs heute $S_0 = 400$ €, zum Zeitpunkt T $S_T = 500$ € oder $S_T = 350$ €, jew. mit W'keit $1/2$.

Wert des Call zur Zeit T: $C_T = (S_T - K)_+$

Frage: $\pi(C)$, Wert des Call heute (z.B. für $K = 440$ €)?

„Naiver Ansatz":

$$\pi(C) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}[C_T] = \frac{1}{2}(500 - 440)_+ \text{€} + \frac{1}{2}(350 - 440)_+ \text{€}$$
$$= \frac{1}{2} 60 \text{€} + \frac{1}{2} 0 \text{€} = 30 \text{€} ??$$

Fairer Preis einer Option via Hedging

Kurs heute $S_0 = 400$ €, zum Zeitpunkt T $S_T = 500$ € oder $S_T = 350$ €, jew. mit W'keit $1/2$.
Wert des Call zur Zeit T: $C_T = (S_T - K)_+$,
Wert heute (für $K = 440$ €)?

Beobachtung: („Hedging-Strategie“, „Sicherungsgeschäft“)
Mit einem Startkapital von 20 € kann man das Auszahlungsprofil der Call-Option replizieren.

Fairer Preis einer Option via Hedging

Kurs heute $S_0 = 400\,€$, zum Zeitpunkt T $S_T = 500\,€$ oder $S_T = 350\,€$, jew. mit W'keit $1/2$.
Wert des Call zur Zeit T: $C_T = (S_T - K)_+$,
Wert heute (für $K = 440\,€$)?

Beobachtung: („Hedging-Strategie“, „Sicherungsgeschäft“)
Mit einem Startkapital von 20 € kann man das Auszahlungsprofil der Call-Option replizieren.

Zeit 0: Leihe 140 €, kaufe 0,4 Aktien (zahle dafür $0{,}4 \cdot 400\,€ = 160\,€ = 20\,€ + 140\,€$)

Fairer Preis einer Option via Hedging

Kurs heute $S_0 = 400\,€$, zum Zeitpunkt T $S_T = 500\,€$ oder $S_T = 350\,€$, jew. mit W'keit $1/2$.
Wert des Call zur Zeit T: $C_T = (S_T - K)_+$,
Wert heute (für $K = 440\,€$)?

Beobachtung: („Hedging-Strategie“, „Sicherungsgeschäft“)
Mit einem Startkapital von $20\,€$ kann man das Auszahlungsprofil der Call-Option replizieren.

Zeit 0: Leihe $140\,€$, kaufe 0,4 Aktien (zahle dafür $0{,}4 \cdot 400\,€ = 160\,€ = 20\,€ + 140\,€$)

Zeit T:
Wenn $S_T = 500\,€$:
Wert des Portfolios: $0{,}4 \cdot 500\,€ - 140\,€ = 60\,€ = C_T$
Wenn $S_T = 350\,€$:
Wert des Portfolios: $0{,}4 \cdot 350\,€ - 140\,€ = 0\,€ = C_T$

Fairer Preis einer Option bei Arbitragefreiheit

Kurs heute $S_0 = 400$ €, zum Zeitpunkt T: $S_T = 500$ € oder $S_T = 350$ €, jew. mit W'keit $1/2$.
Fairer Preis $\pi(C)$ des Call mit strike $K = 440$ €?

Wir haben gesehen: Mit einem Startkapital von 20 € kann man das Auszahlungsprofil der Call-Option replizieren.
(Wir nehmen in unserem Modell (zunächst) an, dass beliebige (positive wie negative) Stückelungen gehandelt werden können und dass es weder Transaktionskosten noch Zinsen/Dividenden gibt.)

Fairer Preis einer Option bei Arbitragefreiheit

Kurs heute $S_0 = 400$ €, zum Zeitpunkt T: $S_T = 500$ € oder $S_T = 350$ €, jew. mit W'keit $1/2$.
Fairer Preis $\pi(C)$ des Call mit strike $K = 440$ €?

Wir haben gesehen: Mit einem Startkapital von 20 € kann man das Auszahlungsprofil der Call-Option replizieren.
(Wir nehmen in unserem Modell (zunächst) an, dass beliebige (positive wie negative) Stückelungen gehandelt werden können und dass es weder Transaktionskosten noch Zinsen/Dividenden gibt.)

Demnach ist der faire Preis $\pi(C) = 20$ €, sonst gäbe es in diesem Markt(modell) die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns (eine „Arbitrage“).

Fairer Preis einer Option bei Arbitragefreiheit

Kurs heute $S_0 = 400$ €, zum Zeitpunkt T: $S_T = 500$ € oder $S_T = 350$ €, jew. mit W'keit $1/2$.
Fairer Preis $\pi(C)$ des Call mit strike $K = 440$ €?

Wir haben gesehen: Mit einem Startkapital von 20 € kann man das Auszahlungsprofil der Call-Option replizieren.
(Wir nehmen in unserem Modell (zunächst) an, dass beliebige (positive wie negative) Stückelungen gehandelt werden können und dass es weder Transaktionskosten noch Zinsen/Dividenden gibt.)

Demnach ist der faire Preis $\pi(C) = 20$ €, sonst gäbe es in diesem Markt(modell) die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns (eine „Arbitrage“).

Beispiel: Wenn ich einen Käufer fände, der mir heute die Call-Option mit strike 440 € zum Preis von 30 € abkaufte, so könnte ich aus diesem Geschäft mit Sicherheit 10 € Gewinn machen, indem ich die Option einfach repliziere.

Definition: Eine *Arbitrage* ist eine Handelsstrategie, die mit Startkapital 0 stets einen nicht-negativen Endwert liefert und mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit einen strikt positiven.
Eine Arbitrage ist also die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns.

Definition: Eine *Arbitrage* ist eine Handelsstrategie, die mit Startkapital 0 stets einen nicht-negativen Endwert liefert und mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit einen strikt positiven.
Eine Arbitrage ist also die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns.

Annahme: Wir nehmen stets an, dass die Preise in unserem Marktmodellen derart sind, dass es *keine* Arbitrage gibt.
(Dies ist die Grundlage des sog. „arbitrage pricing".)

Definition: Eine *Arbitrage* ist eine Handelsstrategie, die mit Startkapital 0 stets einen nicht-negativen Endwert liefert und mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit einen strikt positiven.
Eine Arbitrage ist also die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns.

Annahme: Wir nehmen stets an, dass die Preise in unserem Marktmodellen derart sind, dass es *keine* Arbitrage gibt.
(Dies ist die Grundlage des sog. „arbitrage pricing".)

Ökonomische Interpretation: In einem „effizienten Markt" sollten Arbitragegelegenheiten „sehr schnell verschwinden".
Vorstellung: Nehmen wir an, der Preis eines Guts erlaubt Arbitrage. Da offenbar jeder Marktteilnehmer gerne ein für ihn günstiges Arbitragegeschäft eingeht, wird die steigende Nachfrage nach diesem Gut die Preise so verschieben, dass die Arbitragegelegenheit verschwindet.

Inhalt

Kurs heute $S_0 = 400\,€$, zum Zeitpunkt T: $S_T = 500\,€$ oder $S_T = 350\,€$, jew. mit W'keit $1/2$.
$\pi(C)$ = heutiger Preis des Calls
(mit Wert $C_T = (S_T - 440)_+$ zur Zeit T)

Wir haben gesehen:

$$\pi(C) = 20\,€ \neq 30\,€ = \mathbb{E}[C_T]$$

Kurs heute $S_0 = 400\,€$, zum Zeitpunkt T: $S_T = 500\,€$ oder $S_T = 350\,€$, jew. mit W'keit $1/2$.
$\pi(C)$ = heutiger Preis des Calls
(mit Wert $C_T = (S_T - 440)_+$ zur Zeit T)

Wir haben gesehen:

$$\pi(C) = 20\,€ \neq 30\,€ = \mathbb{E}[C_T]$$

aber es gilt

$$\pi(C) = \frac{1}{3}(500 - 440)_+ + \frac{2}{3}(350 - 440)_+,$$

d.h. $\pi(C) = \mathbb{E}_{p^*}[C_T]$ wo $p^* = 1/3$ und
$\mathbb{P}_{p^*}(S_T = 500) = p^* = 1 - \mathbb{P}_{p^*}(S_T = 350)$

Kurs heute $S_0 = 400\,€$, zum Zeitpunkt T: $S_T = 500\,€$ oder $S_T = 350\,€$, jew. mit W'keit $1/2$.
$\pi(C)$ = heutiger Preis des Calls
(mit Wert $C_T = (S_T - 440)_+$ zur Zeit T)

Wir haben gesehen:

$$\pi(C) = 20\,€ \neq 30\,€ = \mathbb{E}[C_T]$$

aber es gilt

$$\pi(C) = \frac{1}{3}(500 - 440)_+ + \frac{2}{3}(350 - 440)_+,$$

d.h. $\pi(C) = \mathbb{E}_{p^*}[C_T]$ wo $p^* = 1/3$ und
$\mathbb{P}_{p^*}(S_T = 500) = p^* = 1 - \mathbb{P}_{p^*}(S_T = 350)$,
d.h. wir können $\pi(C)$ als Erwartungswert der Auszahlung unter einem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß darstellen.

Kurs heute $S_0 = 400\,€$, zum Zeitpunkt T: $S_T = 500\,€$ oder $S_T = 350\,€$, jew. mit W'keit $1/2$.
$\pi(C)$ = heutiger Preis des Calls
(mit Wert $C_T = (S_T - 440)_+$ zur Zeit T)

Wir haben gesehen:

$$\pi(C) = 20\,€ \neq 30\,€ = \mathbb{E}[C_T]$$

aber es gilt

$$\pi(C) = \frac{1}{3}(500 - 440)_+ + \frac{2}{3}(350 - 440)_+,$$

d.h. $\pi(C) = \mathbb{E}_{p^*}[C_T]$ wo $p^* = 1/3$ und
$\mathbb{P}_{p^*}(S_T = 500) = p^* = 1 - \mathbb{P}_{p^*}(S_T = 350)$,
d.h. wir können $\pi(C)$ als Erwartungswert der Auszahlung unter einem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß darstellen.

Das ist kein Zufall ...

Betrache eine allgemeine Eventualforderung („contingent claim“) H mit Fälligkeit T (in unserem Mini-Marktmodell),

$$H_T = \begin{cases} H^b & \text{wenn } S_T = 500\,€, \\ H^a & \text{wenn } S_T = 350\,€. \end{cases}$$

Betrache eine allgemeine Eventualforderung („contingent claim") H mit Fälligkeit T (in unserem Mini-Marktmodell),

$$H_T = \begin{cases} H^b & \text{wenn } S_T = 500\,€, \\ H^a & \text{wenn } S_T = 350\,€. \end{cases}$$

Dann gilt $\pi(H) = \mathbb{E}_{p^*}[H_T] = p^* H^b + (1 - p^*) H^a$

Betrache eine allgemeine Eventualforderung („contingent claim") H mit Fälligkeit T (in unserem Mini-Marktmodell),

$$H_T = \begin{cases} H^b & \text{wenn } S_T = 500\,€, \\ H^a & \text{wenn } S_T = 350\,€. \end{cases}$$

Dann gilt $\pi(H) = \mathbb{E}_{p^*}[H_T] = p^* H^b + (1 - p^*) H^a$,
denn betrachte folgende Handelsstrategie:

Zur Zeit 0 kaufe

$$\Theta^1 := \frac{H^b - H^a}{150\,€} \text{ Aktien}$$

und verleihe

$$\Theta^0 = H^b - \frac{H^b - H^a}{150\,€} \cdot 500\,€$$

Contingent claim H, $H_T = H^b \mathbf{1}(S_T = 500\,€) + H^a \mathbf{1}(S_T = 350\,€)$

Zeit 0: Kaufe $\Theta^1 := \dfrac{H^b - H^a}{150\,€}$ Aktien,

verleihe $\Theta^0 = H^b - \dfrac{H^b - H^a}{150\,€} \cdot 500\,€$

Contingent claim H, $H_T = H^b \mathbf{1}(S_T = 500\,€) + H^a \mathbf{1}(S_T = 350\,€)$

Zeit 0: Kaufe $\Theta^1 := \dfrac{H^b - H^a}{150\,€}$ Aktien,

$$\text{verleihe } \Theta^0 = H^b - \frac{H^b - H^a}{150\,€} \cdot 500\,€$$

Wert des Portfolios zur Zeit T:

(Wir lassen im Folgenden aus Platzgründen die Einheit € weg.)

$$\Theta^1 S_T + \Theta^0 = \begin{cases} \frac{H^b - H^a}{150} 500 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 = H^b, \text{ wenn } S_T = 500 \\ \frac{H^b - H^a}{150} 350 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 = H^a, \text{ wenn } S_T = 350 \end{cases}$$

Contingent claim H, $H_T = H^b \mathbf{1}(S_T = 500\,€) + H^a \mathbf{1}(S_T = 350\,€)$

Zeit 0: Kaufe $\Theta^1 := \dfrac{H^b - H^a}{150\,€}$ Aktien,

verleihe $\Theta^0 = H^b - \dfrac{H^b - H^a}{150\,€} \cdot 500\,€$

Wert des Portfolios zur Zeit T:

(Wir lassen im Folgenden aus Platzgründen die Einheit € weg.)

$$\Theta^1 S_T + \Theta^0 = \begin{cases} \frac{H^b - H^a}{150} 500 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 = H^b, \text{ wenn } S_T = 500 \\ \frac{H^b - H^a}{150} 350 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 = H^a, \text{ wenn } S_T = 350 \end{cases}$$

Dieses Portfolio repliziert H, demnach muss $\pi(H)$ gleich dem Wert des Portfolios zur Zeit 0 sein (Arbitragefreiheit!):

$$\begin{aligned} \Theta^1 \cdot 400 + \Theta^0 &= \frac{H^b - H^a}{150} \cdot 400 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 \\ &= \frac{1}{3} H^b + \frac{2}{3} H^a = \mathbb{E}_{p^*}[H_T] = \pi(H) \end{aligned}$$

Bemerkung. Es gilt in diesem Modell

$$\mathbb{E}_{p^*}[\frac{S_T}{1}] = \frac{1}{3}500 + \frac{2}{3}350 = 400 = \frac{S_0}{1}.$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß P_{p^*} heißt im Jargon der Finanzmathematik „risikoneutrales Maß“ oder „äquivalentes Martingalmaß“ (der Aktienkurs ist unter P_{p^*} ein sog. Martingal: er ändert sich im Mittel nicht).

Inhalt

Inhalt

Marktmodell:

Handelszeitpunkte $\mathbb{T} = \{0, 1\}$,
es gebe zwei Wertpapiere:

- Bankkonto mit Zinssatz $r \geq 0$ („bond"):
$$S_0^0 = 1, S_1^0 = (1 + r)$$
- risikobehaftetes Wertpapier (Aktie, „stock"):
S_0^1 fest,
S_1^1 ZV mit $\mathbb{P}\big(S_1^1 = \overbrace{S_0^1(1+b)}^{S^b}\big) = p = 1 - \mathbb{P}\big(S_1^1 = \overbrace{S_0^1(1+a)}^{S^a}\big)$

Wir nehmen an, dass $a < r < b$, denn wenn $r < \min\{a, b\}$ oder $r > \max\{a, b\}$, so gibt es im Modell Arbitrage.

Marktmodell:

Handelszeitpunkte $\mathbb{T} = \{0, 1\}$,
es gebe zwei Wertpapiere:

- Bankkonto mit Zinssatz $r \geq 0$ („bond"):

$$S_0^0 = 1, S_1^0 = (1 + r)$$

- risikobehaftetes Wertpapier (Aktie, „stock"):
  S_0^1 fest,
  S_1^1 ZV mit $\mathbb{P}\big(S_1^1 = \overbrace{S_0^1(1+b)}^{S^b}\big) = p = 1 - \mathbb{P}\big(S_1^1 = \overbrace{S_0^1(1+a)}^{S^a}\big)$

Wir nehmen an, dass $a < r < b$, denn wenn $r < \min\{a, b\}$ oder $r > \max\{a, b\}$, so gibt es im Modell Arbitrage.

Portfolio:

$$\begin{aligned} \Theta_t^0 &:= \text{Einheiten des bond im Intervall } (t-1, t] \\ \Theta_t^1 &:= \text{Einheiten der Aktie im Intervall } (t-1, t] \end{aligned}$$

(Momentan ist nur $t = 1$ relevant, wir notieren hier mit allg. t „auf Vorrat".)

$S_0^0 = 1, S_1^0 = (1+r)$ (Bond), $S_1^1 = S_0^1(1+b)$ oder $= S_0^1(1+a)$ mit W'keit p bzw. $1-p$ (Aktie)

Portfolio (Θ_t^0, Θ_t^1): Wert zur Zeit 0: $V_0 = \Theta_1^0 \cdot S_0^0 + \Theta_1^1 S_0^1$,
Wert zur Zeit $t\,(=1)$: $V_t = \Theta_t^0 S_t^0 + \Theta_t^1 S_t$

$S_0^0 = 1, S_1^0 = (1+r)$ (Bond), $S_1^1 = S_0^1(1+b)$ oder $= S_0^1(1+a)$ mit W'keit p bzw. $1-p$ (Aktie)

Portfolio (Θ_t^0, Θ_t^1): Wert zur Zeit 0: $V_0 = \Theta_1^0 \cdot S_0^0 + \Theta_1^1 S_0^1$,
Wert zur Zeit $t\,(=1)$: $V_t = \Theta_t^0 S_t^0 + \Theta_t^1 S_t$

Gegeben: contingent claim H mit

$$H_1 = \begin{cases} H^a & \text{wenn } S_1^1 = S_0^1(1+a), \\ H^b & \text{wenn } S_1^1 = S_0^1(1+b) \end{cases} .$$

$S_0^0 = 1, S_1^0 = (1+r)$ (Bond), $S_1^1 = S_0^1(1+b)$ oder $= S_0^1(1+a)$ mit W'keit p bzw. $1-p$ (Aktie)

Portfolio (Θ_t^0, Θ_t^1): Wert zur Zeit 0: $V_0 = \Theta_1^0 \cdot S_0^0 + \Theta_1^1 S_0^1$,
Wert zur Zeit $t\,(=1)$: $V_t = \Theta_t^0 S_t^0 + \Theta_t^1 S_t$

Gegeben: contingent claim H mit

$$H_1 = \begin{cases} H^a & \text{wenn } S_1^1 = S_0^1(1+a), \\ H^b & \text{wenn } S_1^1 = S_0^1(1+b) \end{cases}.$$

Gesucht: Hedging-Strategie (Portfolio, dessen Wert am Ende gleich H_1 ist) und fairer Preis $\pi(H) := V_0$ (Wert zur Zeit $t=0$ dieses replizierenden Portfolios).

Sei Θ_1^1 Anzahl Aktien (über Handelsperiode $(0,1]$) im replizierenden Portfolio, V_0 sein Startwert. Dann muss gelten

$$H^b = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+b)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$
$$H^a = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+a)S_0^1 - (1+r)S_0^1)$$

Sei Θ_1^1 Anzahl Aktien (über Handelsperiode $(0,1]$) im replizierenden Portfolio, V_0 sein Startwert. Dann muss gelten

$$H^b = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+b)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$
$$H^a = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+a)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$

also $\Theta_1^1 = \dfrac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}$ (das sog. „Delta“).

Sei Θ_1^1 Anzahl Aktien (über Handelsperiode $(0,1]$) im replizierenden Portfolio, V_0 sein Startwert. Dann muss gelten

$$H^b = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+b)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$
$$H^a = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+a)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$

also $\Theta_1^1 = \dfrac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}$ (das sog. „Delta").

Einsetzen ergibt (denn $V_0 = \Theta_1^0 \cdot 1 + \Theta_1^1 \cdot S_0^1$):

$$H^b = (1+r)\Theta_1^0 + \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}(1+b)S_0^1$$

Sei Θ_1^1 Anzahl Aktien (über Handelsperiode $(0,1]$) im replizierenden Portfolio, V_0 sein Startwert. Dann muss gelten

$$H^b = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+b)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$
$$H^a = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+a)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$

also $\Theta_1^1 = \dfrac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}$ (das sog. „Delta").

Einsetzen ergibt (denn $V_0 = \Theta_1^0 \cdot 1 + \Theta_1^1 \cdot S_0^1$):

$$H^b = (1+r)\Theta_1^0 + \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}(1+b)S_0^1$$
$$\implies \Theta_1^0 = \frac{1}{1+r}\,\frac{(1+b)H^a - (1+a)H^b}{b-a}$$

Sei Θ_1^1 Anzahl Aktien (über Handelsperiode $(0,1]$) im replizierenden Portfolio, V_0 sein Startwert. Dann muss gelten

$$H^b = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+b)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$
$$H^a = (1+r)V_0 + \Theta_1^1((1+a)S_0^1 - (1+r)S_0^1),$$

also $\Theta_1^1 = \dfrac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}$ (das sog. „Delta").

Einsetzen ergibt (denn $V_0 = \Theta_1^0 \cdot 1 + \Theta_1^1 \cdot S_0^1$):

$$H^b = (1+r)\Theta_1^0 + \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}(1+b)S_0^1$$

$$\implies \Theta_1^0 = \frac{1}{1+r}\,\frac{(1+b)H^a - (1+a)H^b}{b-a}, \text{ sowie}$$

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\Big(H^a \underbrace{\frac{b-r}{b-a}}_{1-p^*} + H^b \cdot \underbrace{\frac{r-a}{b-a}}_{=:p^*}\Big) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{p^*}[H_1] = \mathbb{E}_{p^*}\Big[\frac{H_1}{S_1^0}\Big]$$

Wir halten fest:

Wert eines contingent claim H im ein-Perioden-Binomialmodell

$$\pi(H) = \frac{H_0}{S_0^0} = \mathbb{E}_{p^*}\Big[\frac{H_1}{S_1^0}\Big], \quad \text{wobei} \;\; p^* = \frac{r-a}{b-a},$$

das replizierende Portfolio lautet

$$\Theta_1^1 = \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}, \quad \Theta_1^0 = \frac{1}{1+r}\frac{(1+b)H^a - (1+a)H^b}{b-a}.$$

Bemerkung: In obiger Formel wird S^0 als sog. Numéraire benutzt — die griffige Beobachtung ist, dass Preise (in Einheiten von S^0 gemessen) unter $\mathbb{P}_{p^*}$ konstante Erwartungswerte haben.

Inhalt

Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Nach John Cox, Stephen Ross, Mark Rubinstein; 1979

Handelszeitpunkte: $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, zwei Wertpapiere:

1. $S_t^0 = (1 + r)^t$ (Bond)
2. $S_t^1 = S_0^1 \cdot X_1 \cdots X_t$, wo $X_1, \ldots, X_T$ unabhängig mit $\mathbb{P}[X_i = 1 + b] = p = 1 - \mathbb{P}[X_i = 1 + a]$ mit $-1 < a < r < b$ und $0 < p < 1$ (Aktie)

(Bem.: $\log(S_t^1)$ ist eine Irrfahrt.)

$S_t^0 = (1+r)^t$, $S_t^1 = S_0^1 \cdot X_1 \cdots X_t$

Beobachtung. (risikoneutrales Maß)

Sei $p^* = \frac{r-a}{b-a}$, unter $\mathbb{P}_{p^*}$ seien $X_1, \ldots, X_T$ unabh. mit $\mathbb{P}_{p^*}(X_i = 1+b) = p^* = 1 - \mathbb{P}_{p^*}(X_i = 1+a)$.

Für jede Wahl $x_1, \ldots, x_t, \in \{1+a, 1+b\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{p^*}\left[\frac{S_{t+1}^1}{S_{t+1}^0}\middle| X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t\right] \\
&=\mathbb{E}_{p^*}\left[\frac{S_0^1 x_1 \cdots x_t X_{t+1}}{S_t^0 (1+r)}\middle| X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t\right] \\
&=\frac{S_0^1 x_1 \cdots x_t}{S_t^0}\mathbb{E}_{p^*}\left[\frac{X_{t+1}}{1+r}\middle| X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t\right] \\
&=\frac{S_0^1 x_1 \cdots x_t}{S_t^0}\mathbb{E}_{p^*}\left[\frac{X_{t+1}}{1+r}\right] = \frac{S_0^1 x_1 \cdots x_t}{S_t^0}\underbrace{\left(p^* \frac{1+b}{1+r} + (1-p^*)\frac{1+a}{1+r}\right)}_{=1} \\
&=\frac{S_t^1}{S_t^0} \qquad \text{auf dem Ereignis } \{X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t\}
\end{aligned}
$$

Wir haben gesehen:
Für jede Wahl $x_1, \ldots, x_t, \in \{1 + a, 1 + b\}$ gilt

$$\mathbb{E}_{p^*}\left[\frac{S^1_{t+1}}{S^0_{t+1}}\middle|X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t\right] = \frac{S^1_t}{S^0_t}$$

auf dem Ereignis $\{X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t\}$

Wir haben gesehen:
Für jede Wahl $x_1, \ldots, x_t, \in \{1+a, 1+b\}$ gilt

$$\mathbb{E}_{p^*}\left[\frac{S^1_{t+1}}{S^0_{t+1}} \middle| X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t\right] = \frac{S^1_t}{S^0_t}$$

auf dem Ereignis $\{X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t\}$

Diese Tatsache schreibt man oft verkürzt als

$$\mathbb{E}_{p^*}\left[\frac{S^1_{t+1}}{S^0_{t+1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \frac{S^1_t}{S^0_t}$$

wobei $\mathcal{F}_t$ = „bis zur Zeit t im Markt verfügbare Information"

(Im Jargon der fortgeschrittenen Stochastik und der Finanzmathematik heißt $\frac{S^1_t}{S^0_t}$ ein „Martingal" bzgl. $\mathbb{P}_{p^*}$.)

CRR-Modell und (europäische) Optionen

Gegeben: Eine europäische Option H mit Fälligkeit T und Basiswertpapier S^1, d.h. $H_T = f(S^1_T)$.

Gesucht: Fairer Preis, zugehörige selbstfinanzierende Replikationsstrategie.

CRR-Modell und (europäische) Optionen

Gegeben: Eine europäische Option H mit Fälligkeit T und Basiswertpapier S^1, d.h. $H_T = f(S^1_T)$.

Gesucht: Fairer Preis, zugehörige selbstfinanzierende Replikationsstrategie.

CRR-Modell und (europäische) Optionen, II

Erlaubte Handelsstrategie(n):
$\Theta_t^1 \ldots$ Anzahl S^1, die im Intervall $(t-1, t]$ gehalten werden,
$\Theta_t^0 \ldots$ Anzahl S^0, die im Intervall $(t-1, t]$ gehalten werden.

CRR-Modell und (europäische) Optionen, II

Erlaubte Handelsstrategie(n):
$\Theta_t^1 \ldots$ Anzahl S^1, die im Intervall $(t-1, t]$ gehalten werden,
$\Theta_t^0 \ldots$ Anzahl S^0, die im Intervall $(t-1, t]$ gehalten werden.

Wert des Portfolios zur Zeit t:

$$V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0 \quad (\text{notiere } V_0 = \Theta_1^1 S_0^1 + \Theta_1^0 S_0^0)$$

CRR-Modell und (europäische) Optionen, II

Erlaubte Handelsstrategie(n):
$\Theta_t^1 \ldots$ Anzahl S^1, die im Intervall $(t-1, t]$ gehalten werden,
$\Theta_t^0 \ldots$ Anzahl S^0, die im Intervall $(t-1, t]$ gehalten werden.

Wert des Portfolios zur Zeit t:

$$V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0 \quad (\text{notiere } V_0 = \Theta_1^1 S_0^1 + \Theta_1^0 S_0^0)$$

1. „Selbstfinanzierungsbedingung“ muss gelten:

$$\Theta_{t+1}^1 S_t^1 + \Theta_{t+1}^0 S_t^0 = V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0, \; t = 1, \ldots, T-1,$$

d.h. während der Laufzeit der Option wird dem Portfolio weder Kapital entnommen noch zugeführt.

CRR-Modell und (europäische) Optionen, II

Erlaubte Handelsstrategie(n):
$\Theta_t^1 \ldots$ Anzahl S^1, die im Intervall $(t-1, t]$ gehalten werden,
$\Theta_t^0 \ldots$ Anzahl S^0, die im Intervall $(t-1, t]$ gehalten werden.
Wert des Portfolios zur Zeit t:

$$V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0 \quad (\text{notiere } V_0 = \Theta_1^1 S_0^1 + \Theta_1^0 S_0^0)$$

1. „Selbstfinanzierungsbedingung" muss gelten:

$$\Theta_{t+1}^1 S_t^1 + \Theta_{t+1}^0 S_t^0 = V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0, \; t = 1, \ldots, T-1,$$

d.h. während der Laufzeit der Option wird dem Portfolio weder Kapital entnommen noch zugeführt.

2. Θ_t^0, Θ_t^1 sind Funktionen von $(S_0^1, \ldots, S_{t-1}^1)$: die Investitionsentscheidungen über das Zeitintervall $(t-1, t]$ müssen zum Zeitpunkt $t-1$ getroffen werden, ohne „Blick in die Zukunft" (Im Jargon: Θ_t^0, Θ_t^1 sind „previsibel".)

Satz. Im CRR-Modell gilt

$$\frac{H_t}{S_t^0} = \mathbb{E}_{p^*}\left[\left.\frac{H_T}{S_T^0}\right| \mathcal{F}_t\right], \quad (t = 0, \ldots, T),$$

die zugehörige (selbstfinanzierende) duplizierende Handelsstrategie hat folgende Form (auf dem Ereignis $\{X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}\}$):

$$\Theta_t^1 = \frac{H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b} - H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a}}{(b-a)S_{t-1}^1},$$

$$\Theta_t^0 = \frac{1}{1+r}\,\frac{(1+b)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b} - (1+a)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a}}{(b-a)S_{t-1}^0}.$$

(Details siehe folgende Folie)

Beweis des Satzes über das CRR-Modell: Wir benutzen Rückwärtsinduktion:

Zum Zeitpunkt $T-1$, auf dem Ereignis $\{X_1 = x_1, \ldots, X_{T-1} = x_{T-1}\}$ handelt es sich um ein 1-Perioden-Modell (schlage Formeln dort nach).

Angenommen die Behauptung gilt für $t, t+1, \ldots, T-1$:

Fasse $\tilde{H}_t = H_t$ als Claim in einem 1-Perioden-Modell (von $t-1$ nach t) auf. Wir schreiben $H_t^{y_1,\ldots,y_t}$ für den Wert des Claims zum Zeitpunkt t auf dem Ereignis $\{X_1 = y_1, \ldots, X_t = y_t\}$

Auf $\{X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}\}$: Kaufe

$$\Theta_t^1 := \frac{H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b} - H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a}}{(b-a)S_{t-1}^1} \quad \text{Einheiten } S^1 \text{ und}$$

$$\Theta_t^0 := \frac{1}{r+1}\,\frac{(1+b)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a} - (1+a)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b}}{(b-a)S_{t-1}^0} \quad \text{Einheiten von } S^0.$$

Wert dieses Portfolios zur Zeit t:

1. Falls $S_t^1 = S_{t-1}^1 \cdot (1+b)$:

$$\begin{aligned}
V_t &= S_{t-1}^1(1+b)\,\frac{H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b} - H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a}}{(b-a)S_{t-1}^1} \\
&\quad + S_{t-1}^0(1+r)\,\frac{(1+b)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a} - (1+a)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b}}{(b-a)S_{t-1}^0} \\
&= \frac{(1+b)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b} - (1+b)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a} + (1+b)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a} - (1+a)H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b}}{b-a} \\
&= H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+b}.
\end{aligned}$$

2. Ebenso falls $S_t^1 = S_{t-1}^1 \cdot (1+a)$: $V_t = H_t^{x_1,\ldots,x_{t-1},1+a}$.

Aus den Ergebnissen des Ein-Perioden-Modells folgt darüberhinaus, dass $H_{t-1}^{x_1,\ldots,x_{t-1}} = \dfrac{1}{1+r}\mathbb{E}_{p^*}\left[H_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]$ gilt.

Beweis des Satzes über das CRR-Modell (Forts.):

Zur Selbstfinanzierungs-Bedingung: Wir müssen zeigen, dass

$$\Theta_{t+1}^1 S_t^1 + \Theta_{t+1}^0 S_t^0 \stackrel{!}{=} V_t = \Theta_t^1 S_t^1 + \Theta_t^0 S_t^0 .$$

Rechte Seite $= H_t$ (denn das Portfolio repliziert die Option H).

Die linke Seite ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1+r}{1+r} \frac{H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},X_t,1+b} - H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},X_t,1+a}}{(b-a)S_t^1} S_t^1 \\
&+ \frac{1}{1+r} \frac{(1+b)H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},X_t,1+a} - (1+a)H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},X_t,1+b}}{(b-a)S_t^0} S_t^0 \\
&= \quad \frac{1}{1+r} \frac{(r-a)H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},X_t,1+b} + (b-r)H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},X_t,1+a}}{b-a} \\
&= \quad \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{p*}\left[H_{t+1} \middle| \mathcal{F}_t\right],
\end{aligned}$$

was nach Induktionsvoraussetzung $= H_t$ ist. □

Beispiel: Europäische Call-Option

$C_T = (S_T^1 - K)_+$, $S_T^1 = S_0^1(1+b)^N(1+a)^{T-N}$, wo
$N = |\{i \leq T : X_i = 1+b\}|$, unter $\mathbb{P}_{p^*}$ ist N $Bin(T, p^*)$-verteilt.
Sei $A = \min\{n \in \mathbb{Z} : S_0^1(1+b)^n(1+a)^{T-n} > K\}$.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(1+r)^T}\mathbb{E}_{p^*}\left[(S_0^1(1+b)^N(1+a)^{T-N} - K)_+\right] \\
= \; & \frac{1}{(1+r)^T}\sum_{n=A}^{T}\binom{T}{n}(p^*)^n(1-p^*)^{T-n}(S_0^1(1+b)^n(1+a)^{T-n} - K) \\
= \; & S_1^0 Bin(T, p')(\{A, A+1, \ldots, T\}) \\
& - \frac{1}{(1+r)^T}K \cdot Bin(T, p^*)(\{A, \ldots, T\})
\end{aligned}
$$

mit $p' = \dfrac{p^*(1+b)}{1+r}$.

Bemerkung: Call-Put-Parität

$C_T = (S_T^1 - K)_+$, $P_T = (K - S_T^1)_+$, also $C_T - P_T = S_T^1 - K$, d.h. fairer Preis ist

$$\pi(C_T - P_T) = \pi(C_T) - \pi(P_T) = \pi(S_T^1 - K) = S_0^1 - (1+r)^{-T}K.$$

Der Vertrag mit Auszahlungsprofil $S_T^1 - K$ ist ein sog. Termingeschäft („Forward").
Demnach bestimmt der Preis des europäischen Calls den des Puts mit demselben Ausübungspreis und umgekehrt.

Inhalt

Black-Scholes-(Merton-)Modell

Fisher Black, Myron Scholes 1973, Robert Merton 1973; Merton und Scholes haben für diese Arbeiten 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten.

Wir betrachten eine (mit $N \in \mathbb{N}$ parametrisierte) Schar von CRR-Modellen.

T Zeithorizont, NT (strenggen. $\lceil NT \rceil$) die Anzahl der Handelsperioden (i-te Periode entspricht „Realzeitintervall" $(\frac{(i-1)}{N}, \frac{i}{N}]$), im N-ten Modell sei
$r_N := \frac{r}{N}$, $a_N := -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, $b_N := \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, $p_N := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma\sqrt{N}}$,
wo r die instantane Zinsrate ≥ 0, $\sigma > 0$ die „Volatilität", $\mu \in \mathbb{R}$ der „Renditeparameter", S_0^1 sei fest gegebener Wert.

Konvergenz der Preise einer europäischen Option

Satz 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetiges (beschränktes) Auszahlungsprofil einer Option, $H_{T,N} = f(S^1_{NT,N})$.
Die Folge $\pi_N(H_{T,N})$ der fairen Preise konvergiert gegen

$$e^{-rT} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_0^1 e^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

$$\left(= e^{-rT}\mathbb{E}\left[f\left(S_0^1 \exp(\sigma\sqrt{T}Z + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)\right)\right]\right)$$

mit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

(Beweis siehe folgende Folie)

Beweis des Satzes über die Konvergenz der Preisformeln:

Wir benutzen die Preisformel für das CRR-Model, im N-ten Approximationsschritt also $\pi_N(H_{T,N}) = H_{0,N} = \mathbb{E}_{p_N^*}\left[\frac{f(S^1_{NT,N})}{S^0_{NT,N}}\right]$

Für den Wert des Bonds zum Fälligkeitszeitpunkt ergibt sich

$$S^0_{NT,N} = (1+r_N)^{NT} = \left(1+\frac{r}{N}\right)^{NT} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{rT}. \tag{1}$$

Unter $\mathbb{P}_{p_N^*}$ ist $S^1_{NT,N}$ verteilt wie

$$S^1_0(1+a_N)^{NT-Y_N}(1+b_N)^{Y_N} = S^1_0 \exp\left[NT\log(1+a_N) + Y_N\log\frac{1+b_N}{1+a_N}\right] \tag{2}$$

mit $\mathrm{Bin}(NT, p_N^*)$-verteiltem Y_N (wo $p_N^* = (r_N - a_N)/(b_N - a_N) = \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sigma\sqrt{N}}$), d.h. es gilt

$$\mathbb{E}_{p_N^*}[Y_N] = NTp_N^* = \frac{NT}{2} + \sqrt{N}T\frac{r}{2\sigma}, \quad \mathrm{Var}_{p_N^*}[Y_N] = NTp_N^*(1-p_N^*) = NT\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{r}{2\sigma}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{r}{2\sigma}\right) = \frac{NT}{4} - T\frac{r^2}{4\sigma^2}.$$

Taylorentwicklung um $x=0$ zeigt $\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$, $\log\frac{1+x}{1-x} = 2x + O(x^3)$, demnach gilt (setze $x = \sigma/\sqrt{N}$ ein):

$$NT\log(1+a_N) = -\sigma T\sqrt{N} - \frac{1}{2}\sigma^2 T + R_{1,N}, \quad \log\frac{1+b_N}{1+a_N} = 2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + R_{2,N},$$

wobei die Restterme die Abschätzung $|R_{1,N}|, |R_{2,N}| \le C_1 N^{-3/2}$ für eine Konstante $C_1 < \infty$ erfüllen. Der Ausdruck im Exponenten in (2) ist also gleich

$$\begin{aligned} -\sigma T\sqrt{N} - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}Y_N + R_{3,N} &= \sigma\sqrt{T}\frac{Y_N - \frac{NT}{2} - \sqrt{N}T\frac{r}{2\sigma}}{\sqrt{NT/4}} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + R_{3,N} \\ &= \sigma\sqrt{T}\frac{Y_N - \mathbb{E}_{p_N^*}[Y_N]}{\sqrt{\mathrm{Var}_{p_N^*}[Y_N]}} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + R_{4,N} \end{aligned}$$

mit Resttermen $R_{3,N}, R_{4,N}$, die $|R_{3,N}|, |R_{4,N}| \le C_2 N^{-1/2}$ für ein $C_2 < \infty$ erfüllen. Gemäß dem zentralen Grenzwertsatz konvergiert die Zufallsvariable in (2) also in Verteilung gegen $\sigma\sqrt{T}Z + T(r - \frac{\sigma^2}{2})$, wo $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Dies zusammen mit (1) und der Preisformel im CRR-Modell beweist die Behauptung (denn Konvergenz in Verteilung zieht Konvergenz der Erwartung von stetigen, beschränkten Testfunktionen nach sich).

Black-Scholes-Formel für den Preis eines europäischen Calls

Korollar. Mit $f(s) = (s - K)_+$ gilt für den heutigen Wert $v(x, T)$ eines europäischen Calls bei aktuellem Kurs x und Laufzeit T (unter instantaner Zinsrate r und Volatilität σ)

$$v(x, T) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (xe^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - K)_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

$$= x\Phi(d_+(x, T)) - e^{-rT} K\Phi(d_-(x, T))$$

mit $d_-(x, T) = \dfrac{\log \frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$,

$d_+(x, T) = d_-(x, T) + \sigma\sqrt{T} = \dfrac{\log \frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$,

Φ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0, 1)$.

(Beweis siehe folgende Folie)

Beweis des Korollars über den Preis einer europäischen Call-Option:
Die Gleichung

$$v(x,T) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (xe^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - K)_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

folgt aus der Preisformel aus Satz 1 (die Tatsache, dass die Funktion $s \mapsto (s-K)_+$ nicht beschränkt ist, kann man durch die Call-Put-Parität umgehen: $(K-s)_+$ ist beschränkt, da der Aktienkurs stets ≥ 0 ist, und der Preis des Forward mit Auszahlungsprofil $s - K = (s-K)_+ - (K-s)_+$ ist stets $x - e^{-rT}K$, wobei x der aktuelle Kurs ist).
Der Integrand ist $= 0$ für

$$y \leq -\frac{\log\frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = -d_-(x,T),$$

also ist

$$\begin{aligned}
v(x,T) &= e^{-rT} \int_{-d_-(x,T)}^{\infty} (xe^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&= x\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_-(x,T)}^{\infty} e^{-(y-\sigma\sqrt{T})^2/2}\, dy + e^{-rT}K \int_{-d_-(x,T)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&= x \int_{-d_-(x,T)-\sigma\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy + e^{-rT}K \int_{-d_-(x,T)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&= x \int_{-\infty}^{d_-(x,T)+\sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy + e^{-rT}K \int_{-\infty}^{d_-(x,T)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&= x\Phi(d_+(x,T)) - e^{-rT}K\Phi(d_-(x,T)).
\end{aligned}$$

□