Statistik für Informatiker, SS 2017

2. Ideen aus der Statistik

2.1 Deskriptive Statistik

Matthias Birkner

http://www.staff.uni-mainz.de/birkner/StatInfo17/

21.6.2017

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Viele Menschen stehen „Statistik“ kritisch gegenüber:

It is easy to lie with statistics.
It is hard to tell the truth without it.

Andrejs Dunkels (1939–1998)

Worum geht es in der Statistik?

Die Welt ist voller Variabilität.

Wie geht man mit variablen Daten um?

Idee der Statistik:

Variabilität (Erscheinung der Natur) durch Zufall (mathematische Abstraktion) modellieren

Die Daten werden als Realisierungen von Zufallsvariablen aufgefasst, die in einem stochastischen Modell spezifiert werden.

Man versucht dann, anhand der Daten Rückschlüsse auf Parameter des Modells zu ziehen, und so systematische Effekte von Zufälligem zu trennen.

Deskriptive (d.h. beschreibende) Statistik

Wie geht man mit variablen Daten um?

„0. Antwort“: Man verschafft sich einen ersten Eindruck mittels graphischer Darstellungen und statistischer Kenngrößen

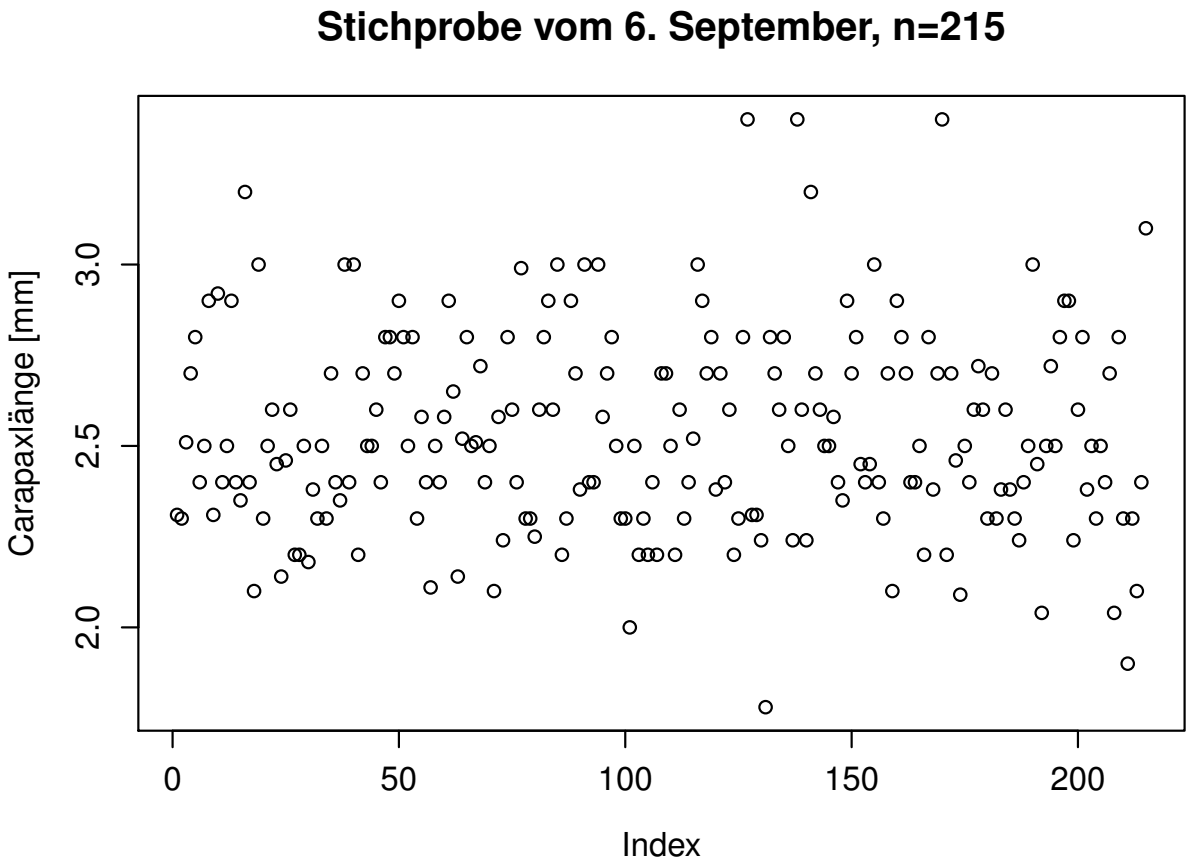
Ein Beispiel

Bei einer biologischen Expedition wurden in der Nordsee Springkrebse (*Galathea intermedia*) gefangen und untersucht.

Die Daten: Helgoländer Tiefe Rinne, Fang vom 6.9.

Carapaxlänge (mm):
Nichteiertragende Weibchen ($n = 215$)

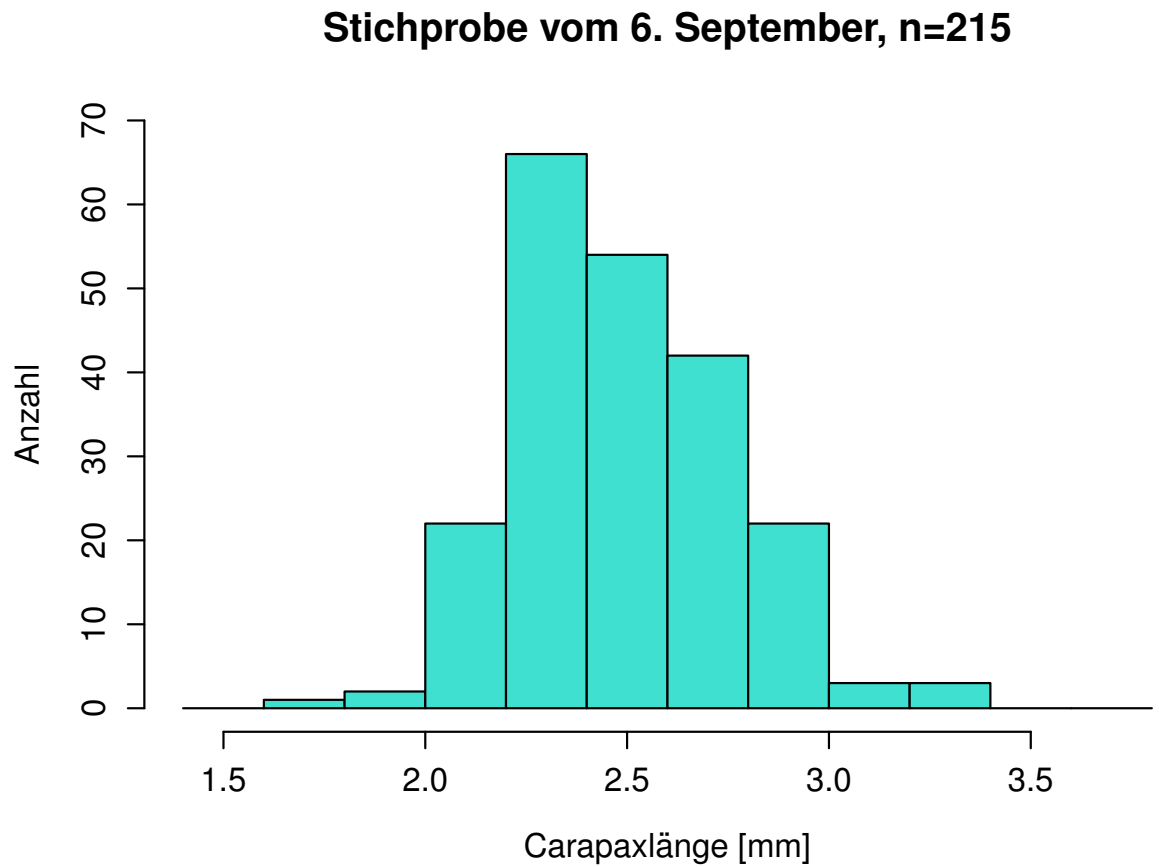
2,9	3,0	2,9	2,5	2,7	2,9	2,9	3,0
3,0	2,9	3,4	2,8	2,9	2,8	2,8	2,4
2.8	2.5	2.7	3.0	2.9	3.2	3.1	3.0


Stichprobe vom 6. September, n=215
Carapaxlänge [mm]
2.0
2.5
3.0
0
50
100
150
200
Index

Eine Möglichkeit der graphischen Darstellung:

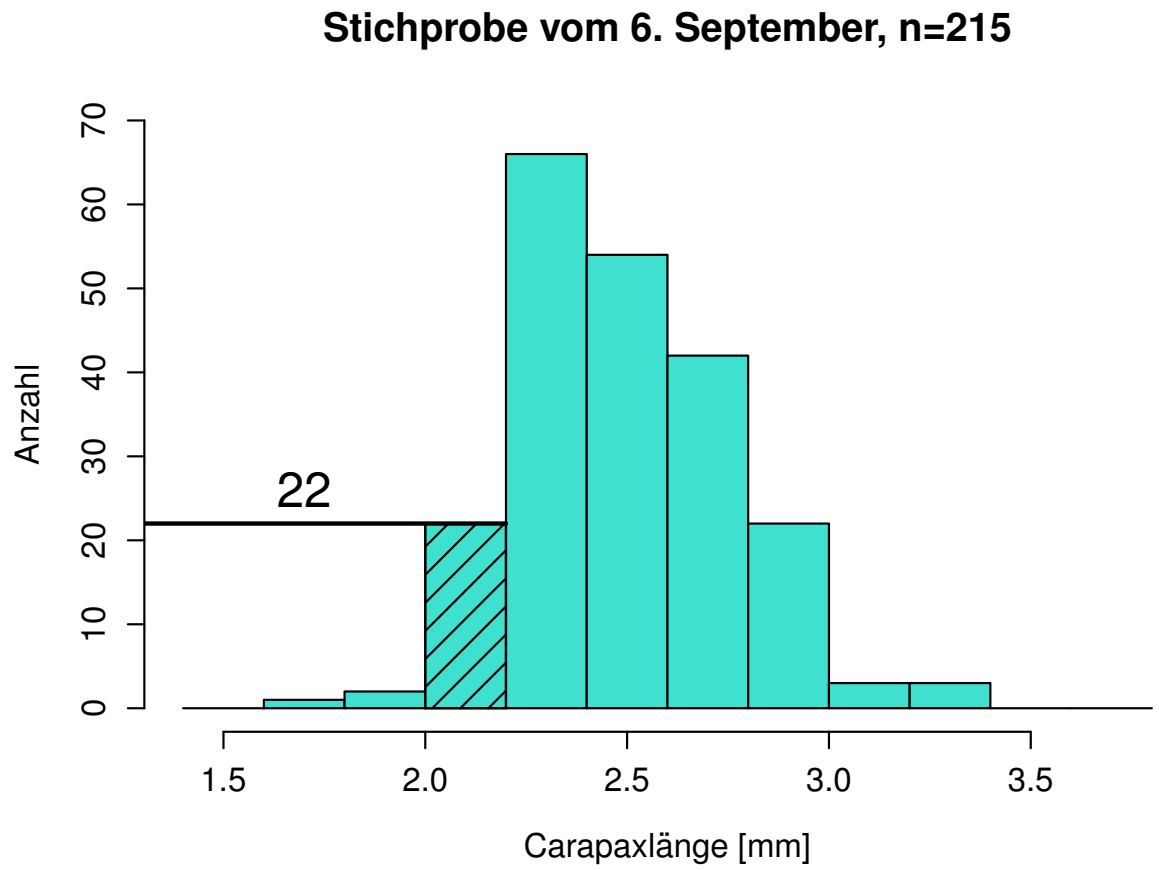
das Histogramm

Histogramm der Carapaxlängen in der Stichprobe



Wieviele hatten Carapaxlänge zwischen 2,0 und 2,2 mm ?

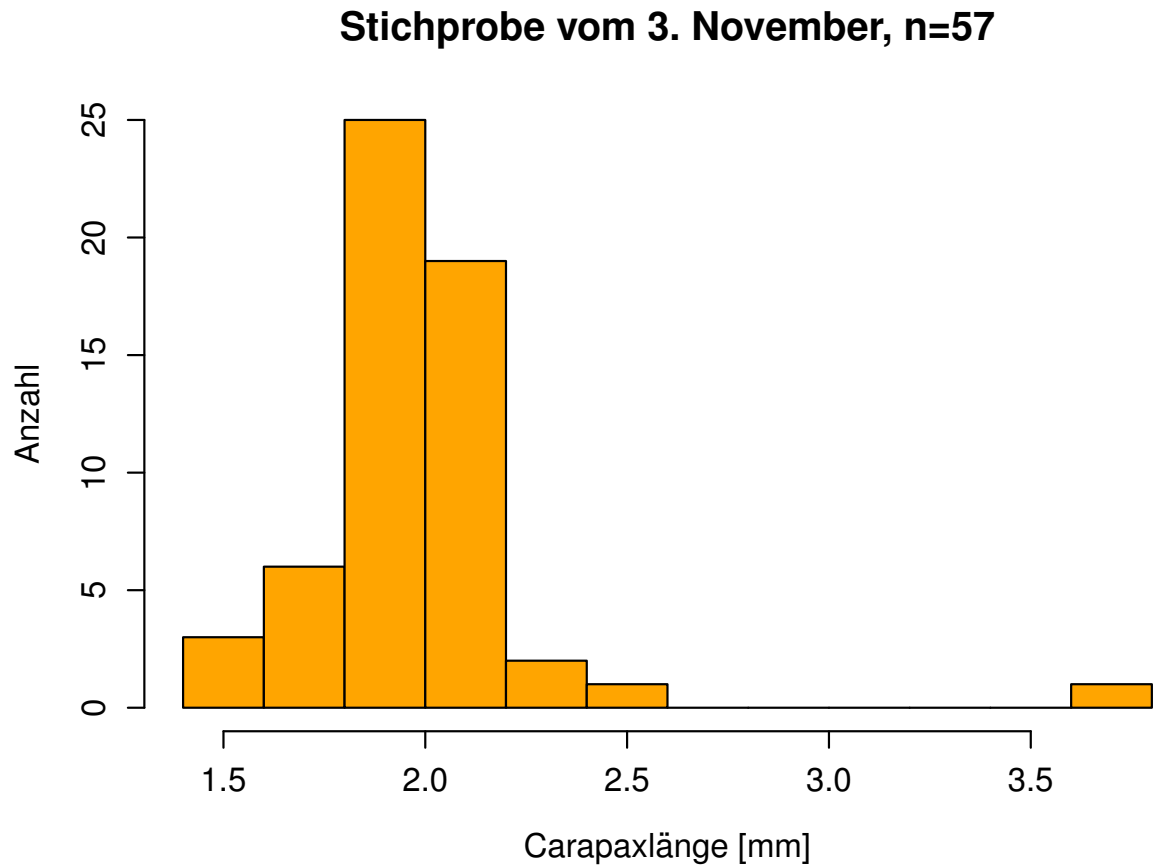
Histogramm der Carapaxlängen in der Stichprobe



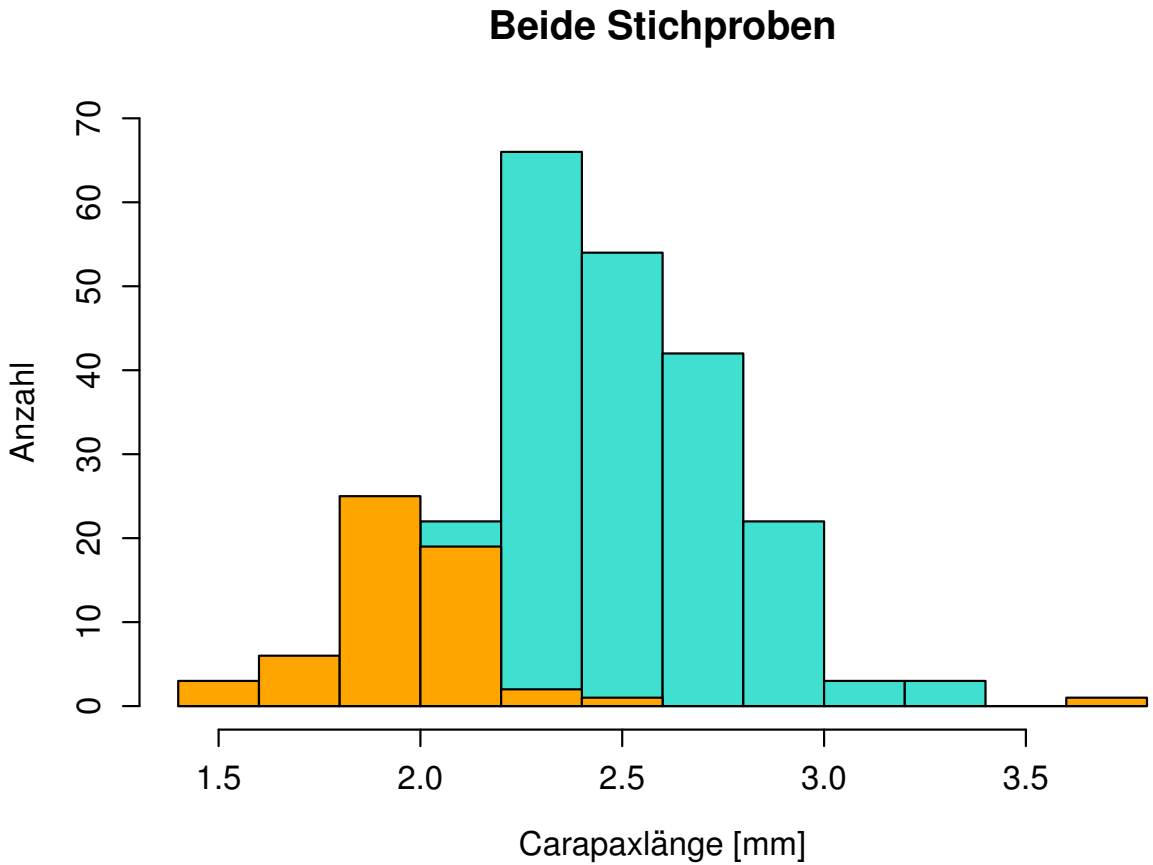
Wieviele hatten Carapaxlänge zwischen 2,0 und 2,2 mm

Analoge Daten zwei Monate später

(Stichprobe vom 3.11. der Größe $n = 57$)



Vergleich der beiden Verteilungen

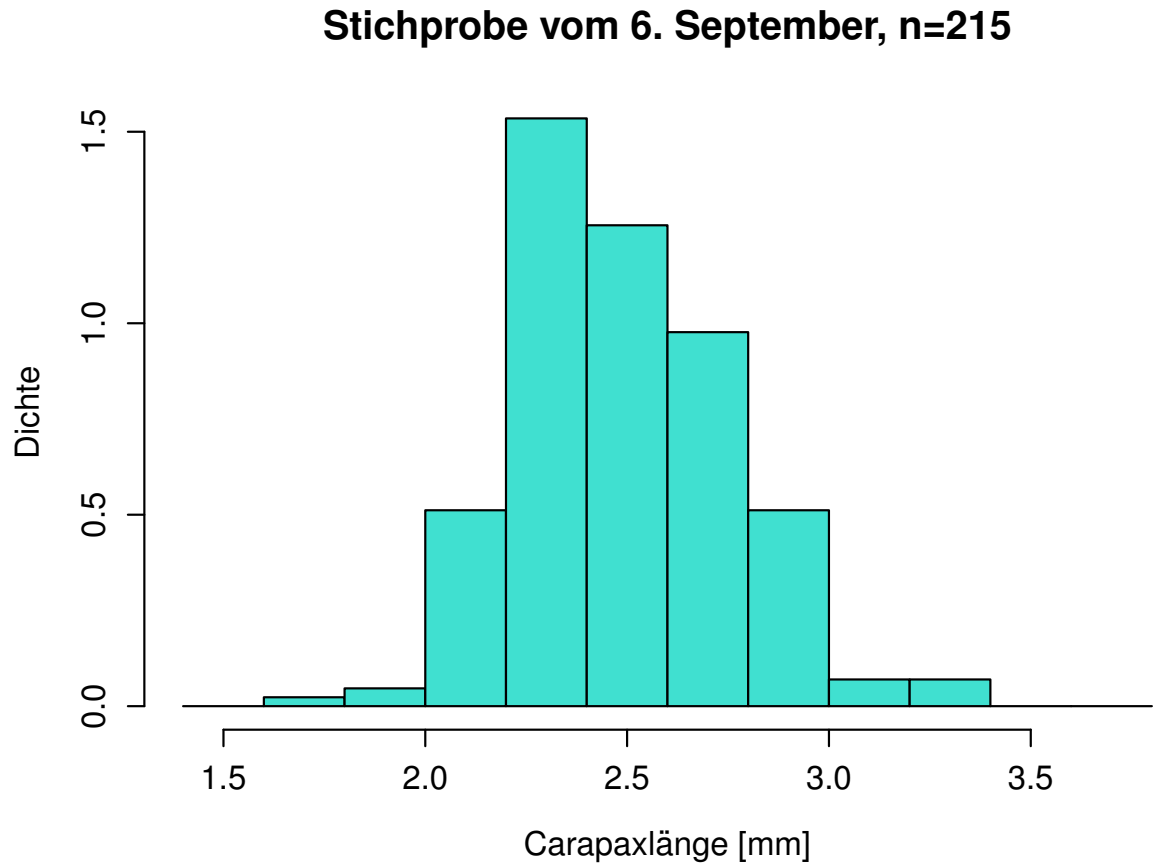


Problem: ungleiche Stichprobenumfänge:

6.Sept: $n = 215$

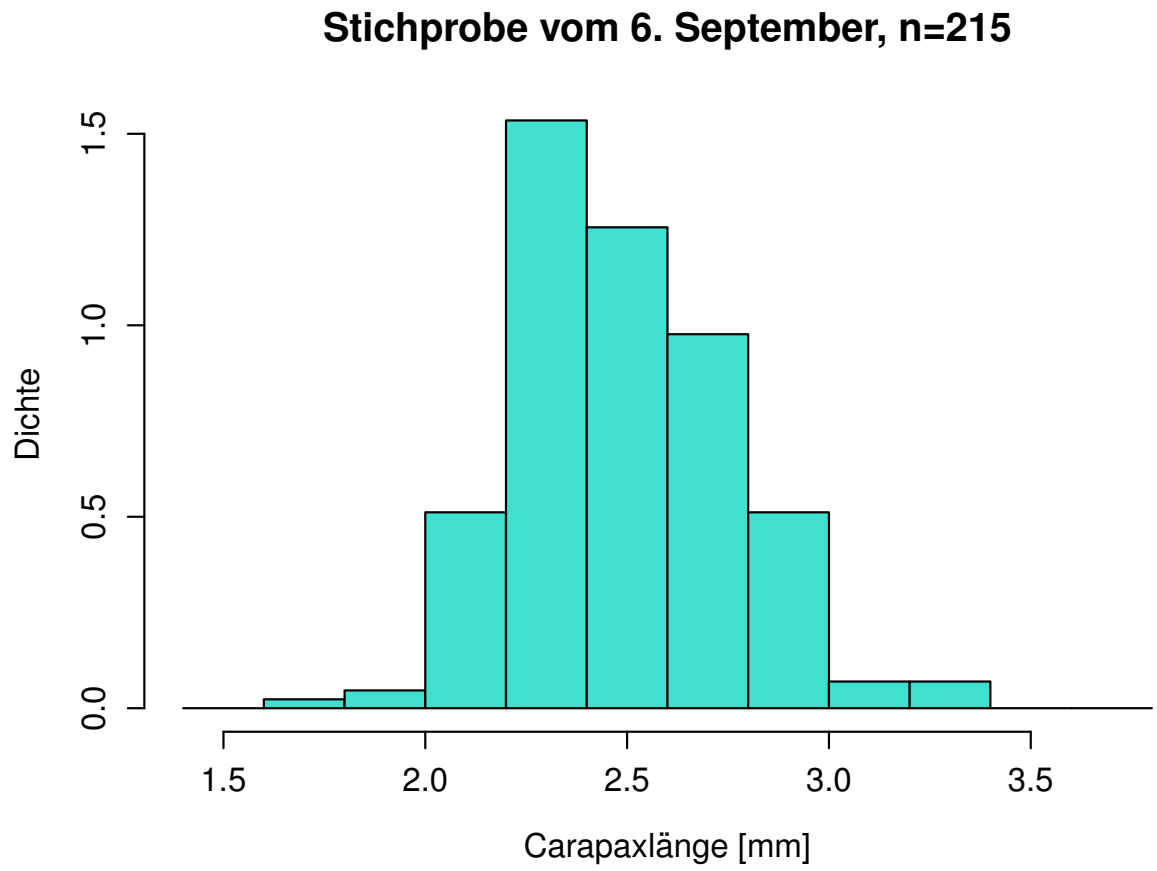
3.Nov : $n = 57$

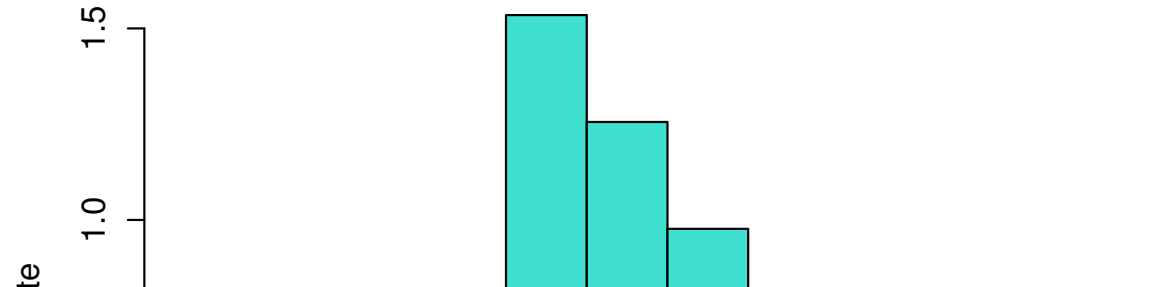
Idee: stauche vertikale Achse so, dass Gesamtfläche = 1.



Die Gesamtfläche der Balken ist nun = 1.

Die neue vertikale Koordinate ist jetzt eine Dichte (engl. density).

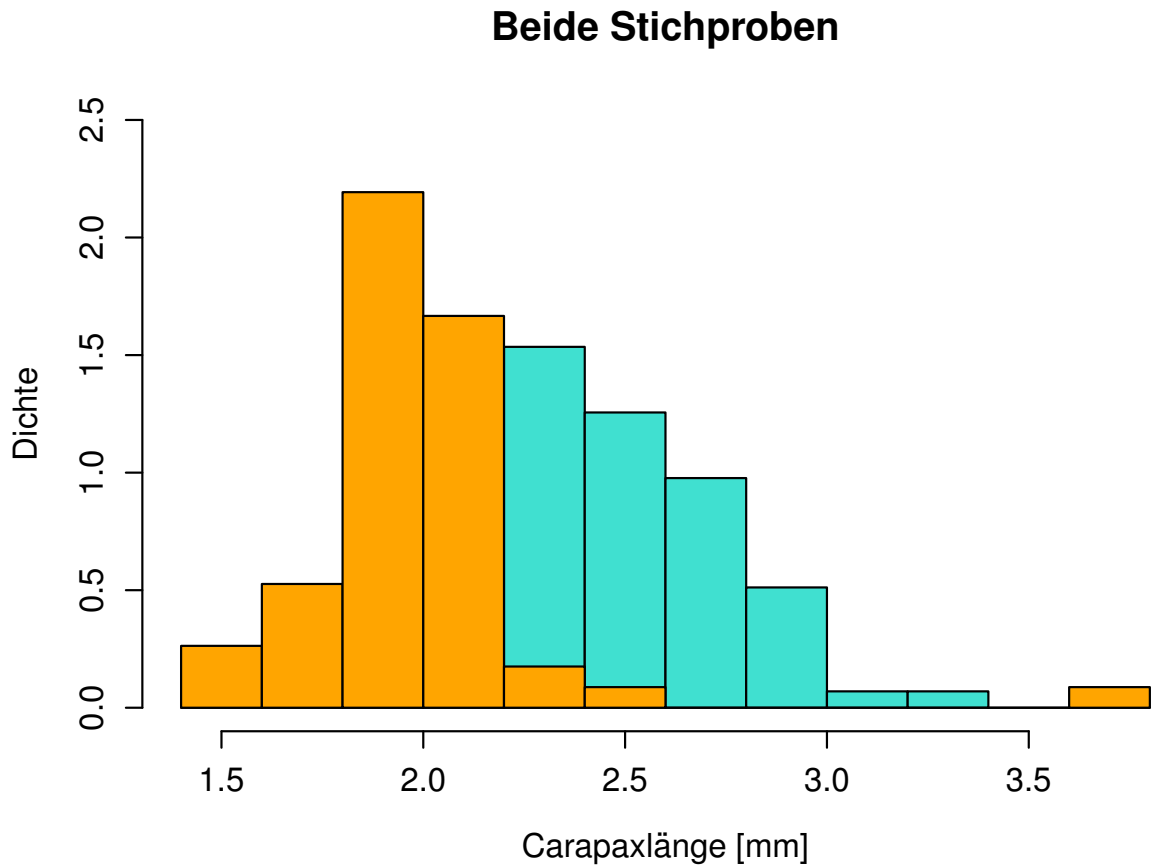

Stichprobe vom 6. September, n=215
Dichte
0.0
0.5
1.0
1.5
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Carapaxlänge [mm]


Stichprobe vom 6. September, n=215
1.0
1.5

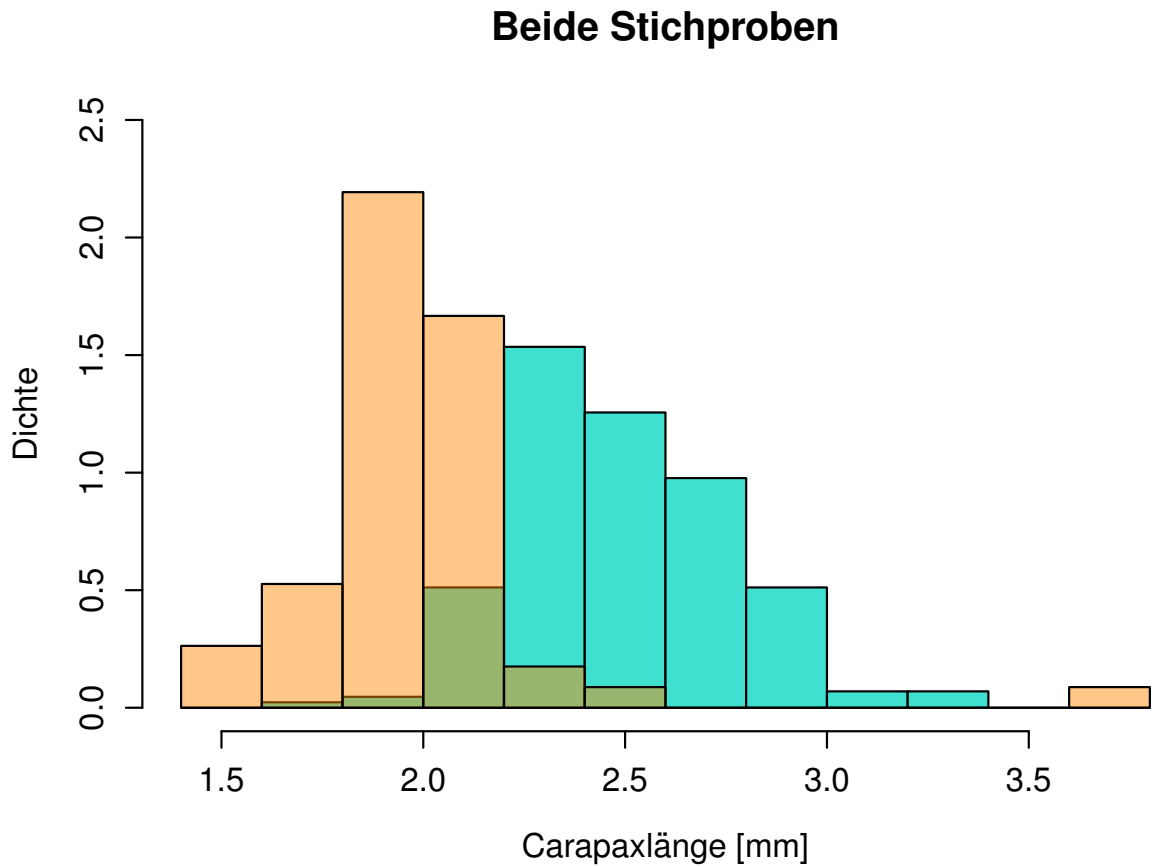
Die beiden Histogramme sind jetzt vergleichbar

(sie haben dieselbe Gesamtfläche).

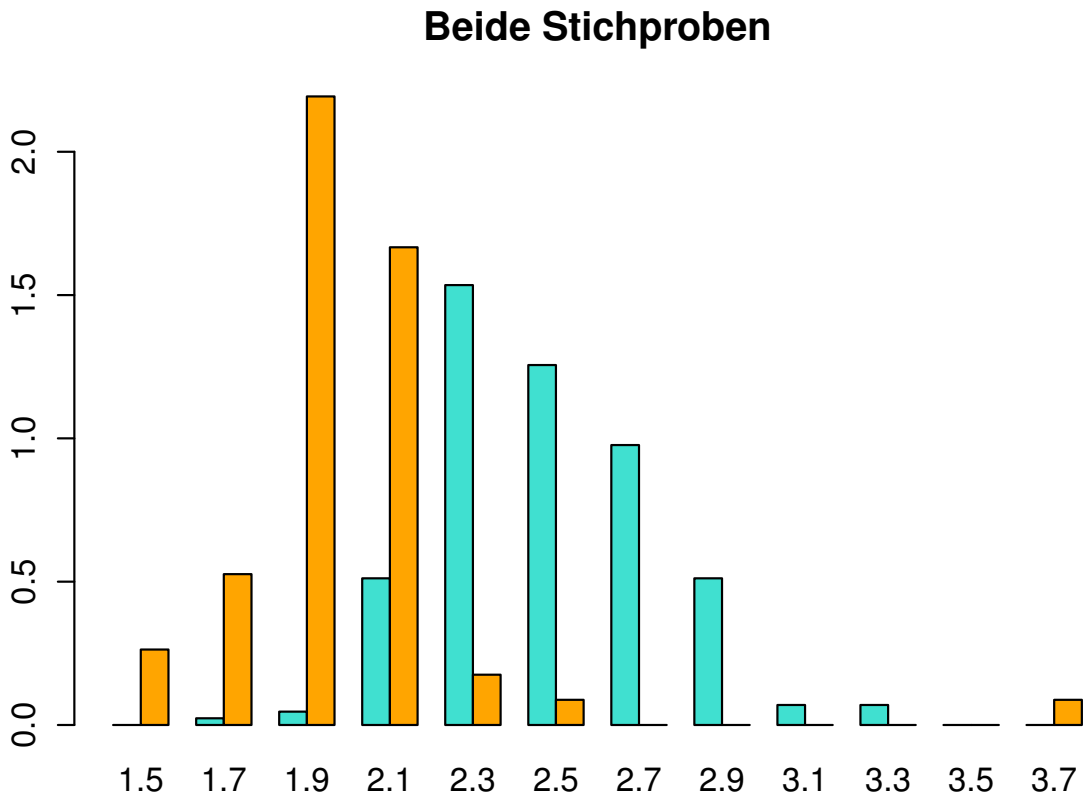
Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



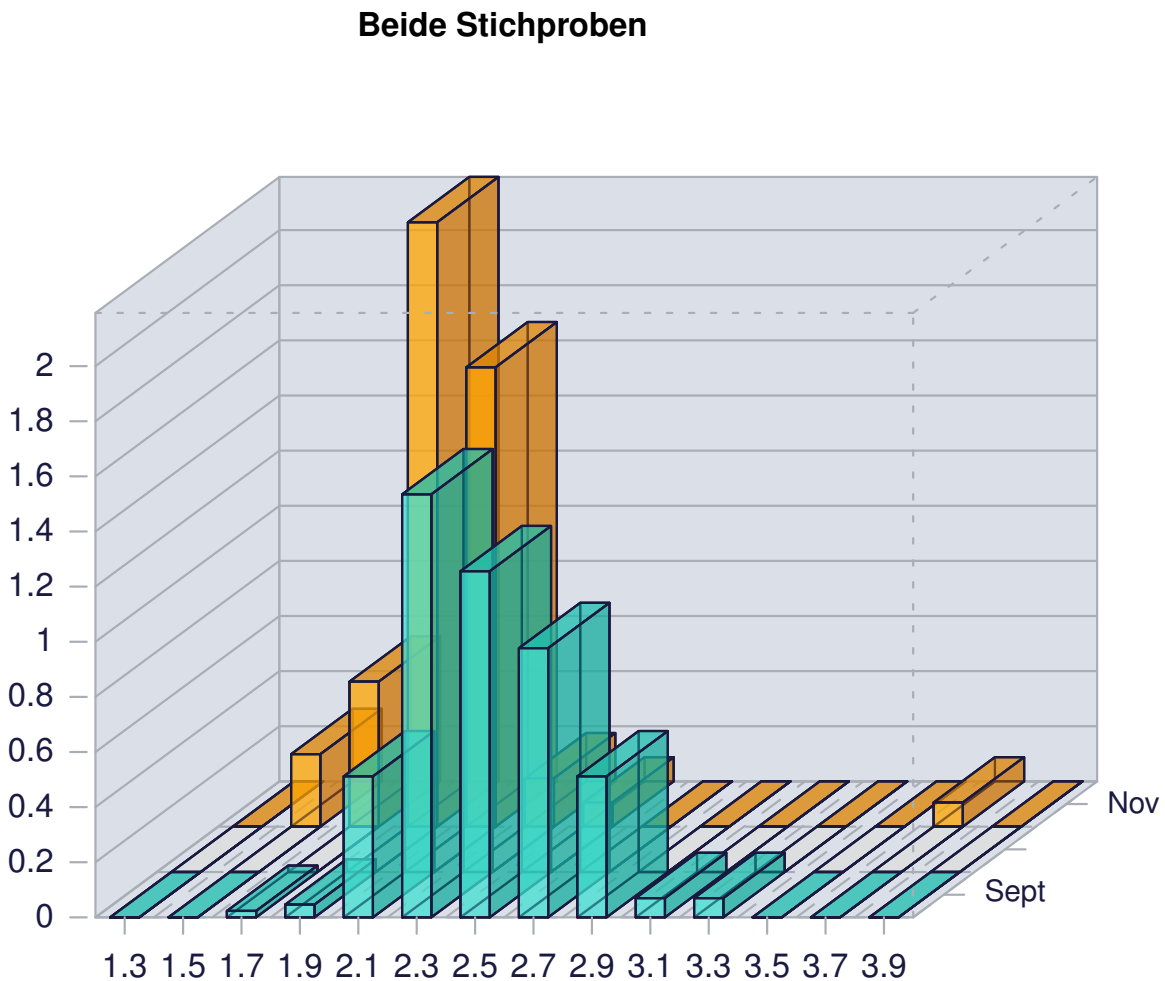
Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



Versuche, die Histogramme zusammen zu zeigen:



Vorschlag

Total abgefahrene 3D-Plots können in der Werbung nützlich sein,

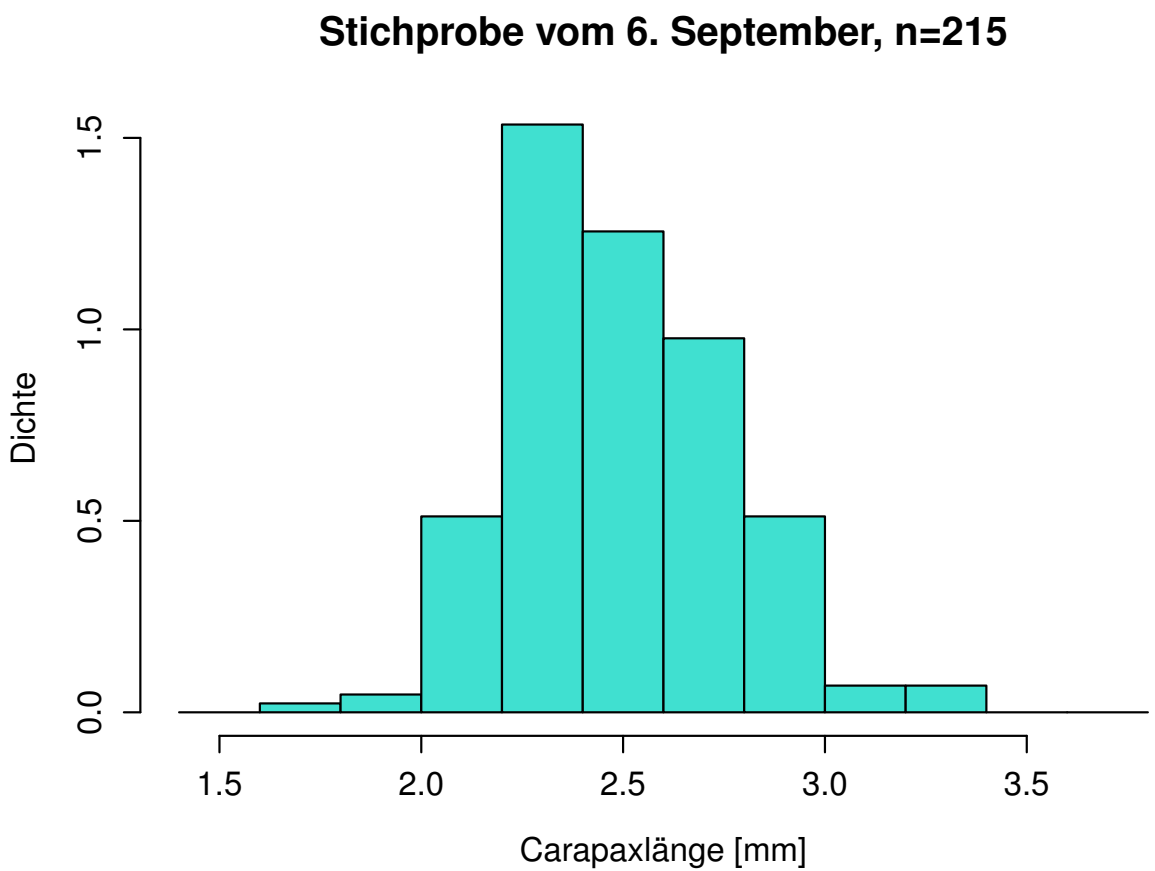
für die Wissenschaft sind einfache und klare
2D-Darstellungen meistens angemessener.

Problem

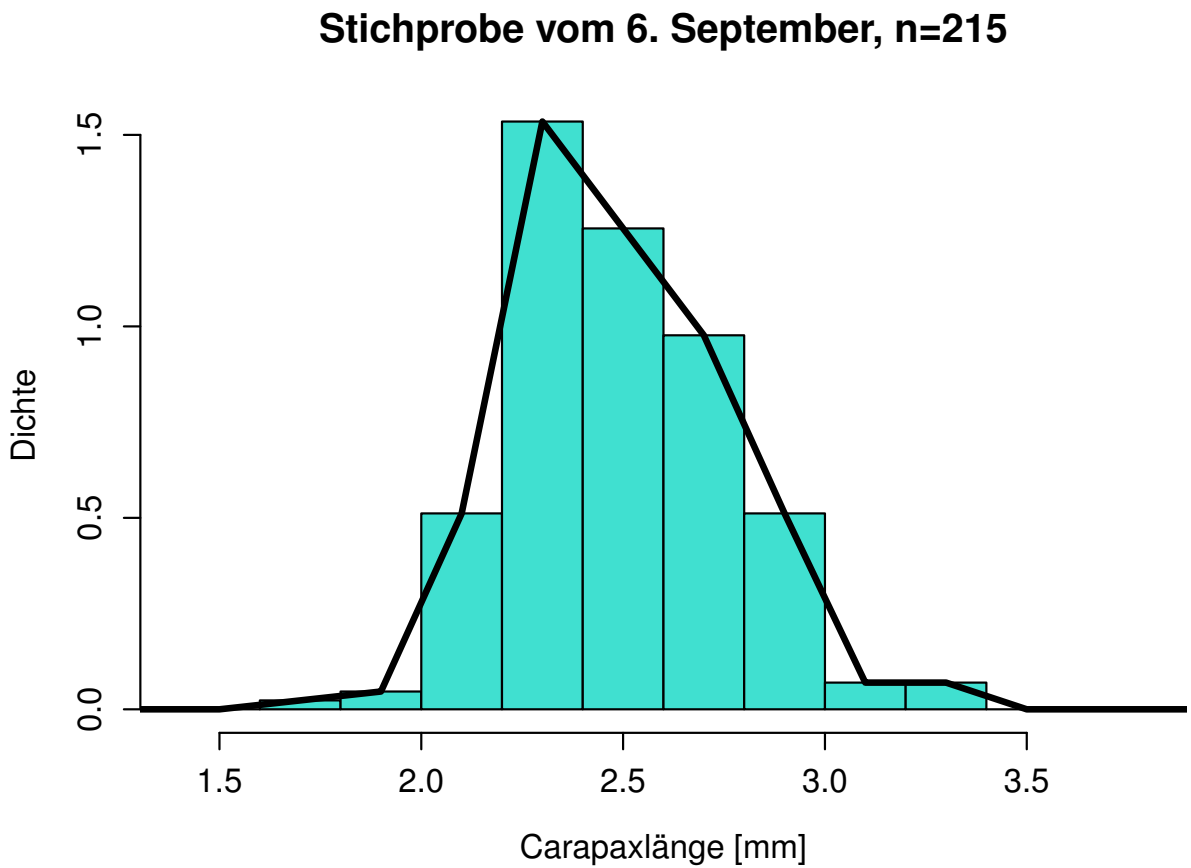
Histogramme kann man nicht ohne weiteres
in demselben Graphen darstellen,

weil sie einander überdecken würden.

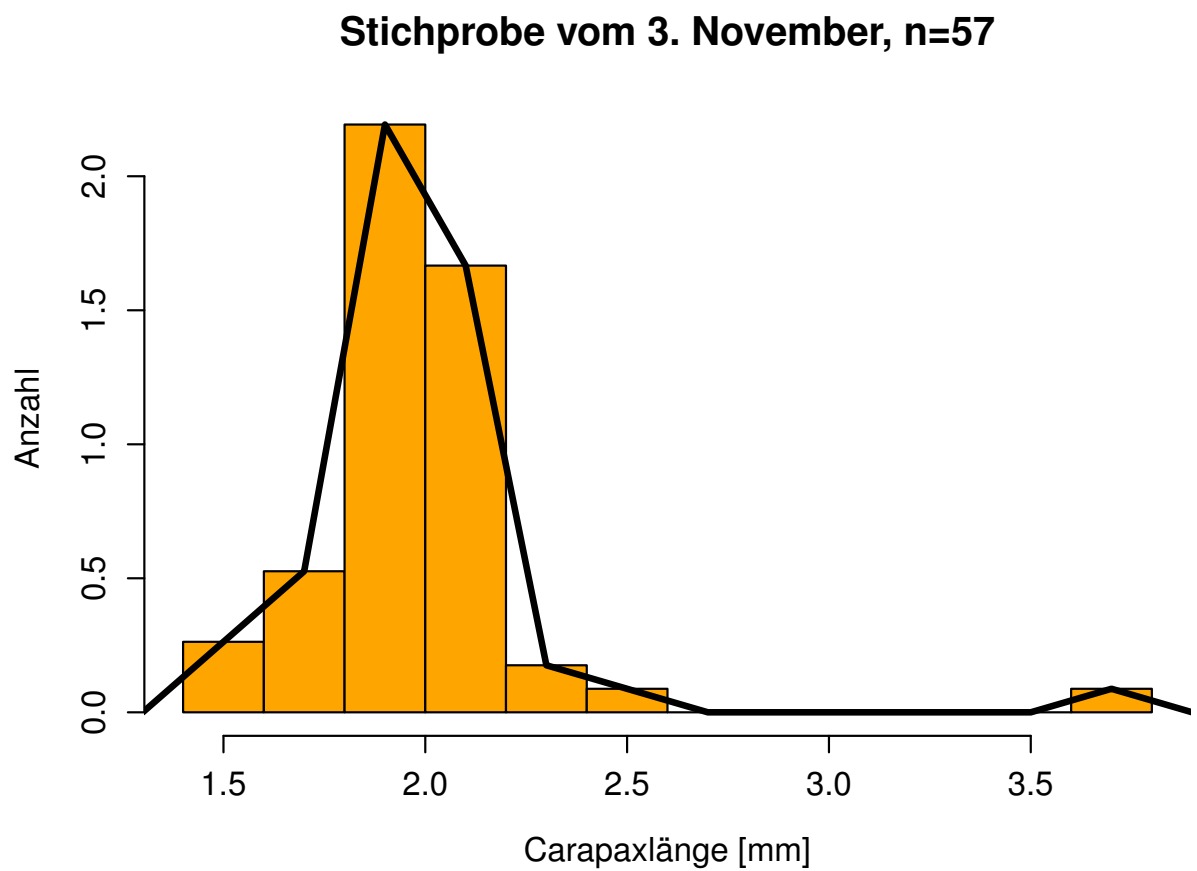
Einfache und klare Lösung: Dichtepolygone



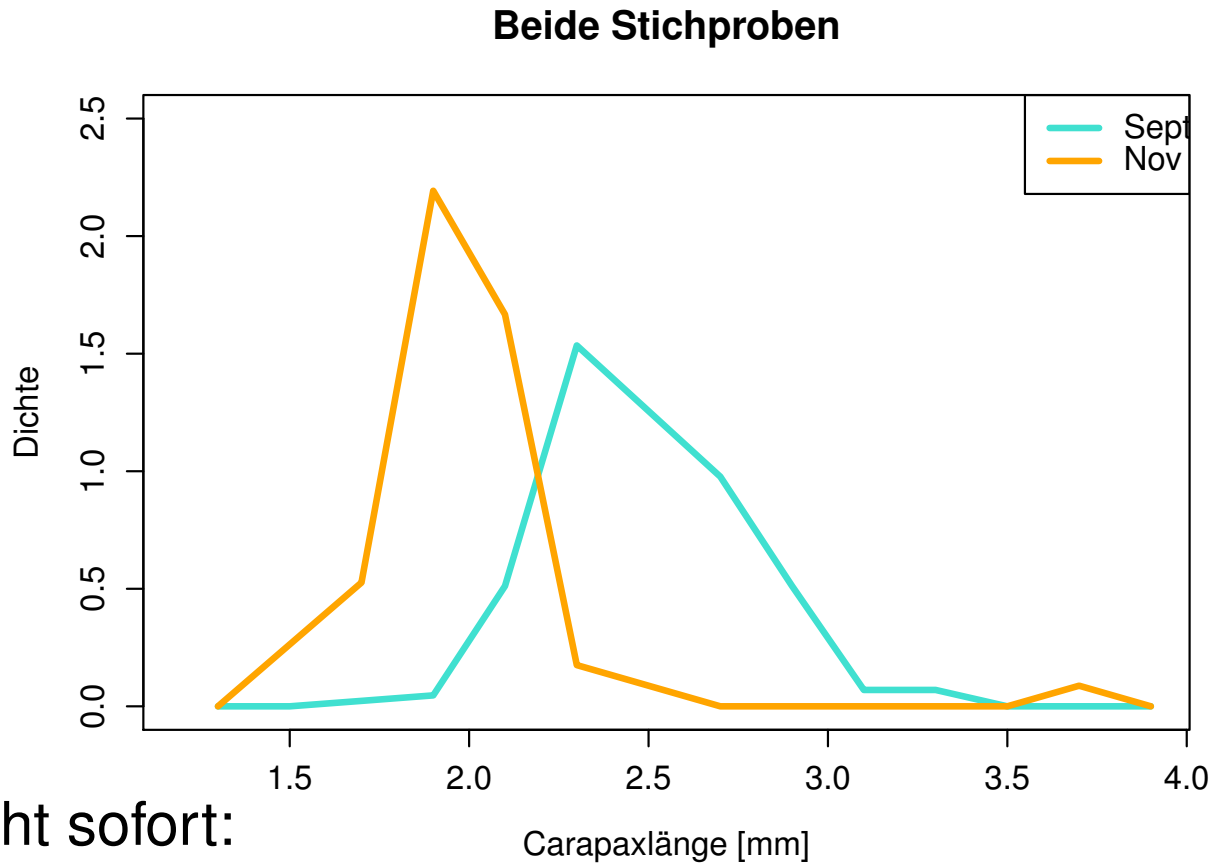
Einfache und klare Lösung: Dichtepolygone



Einfache und klare Lösung: Dichtepolygone



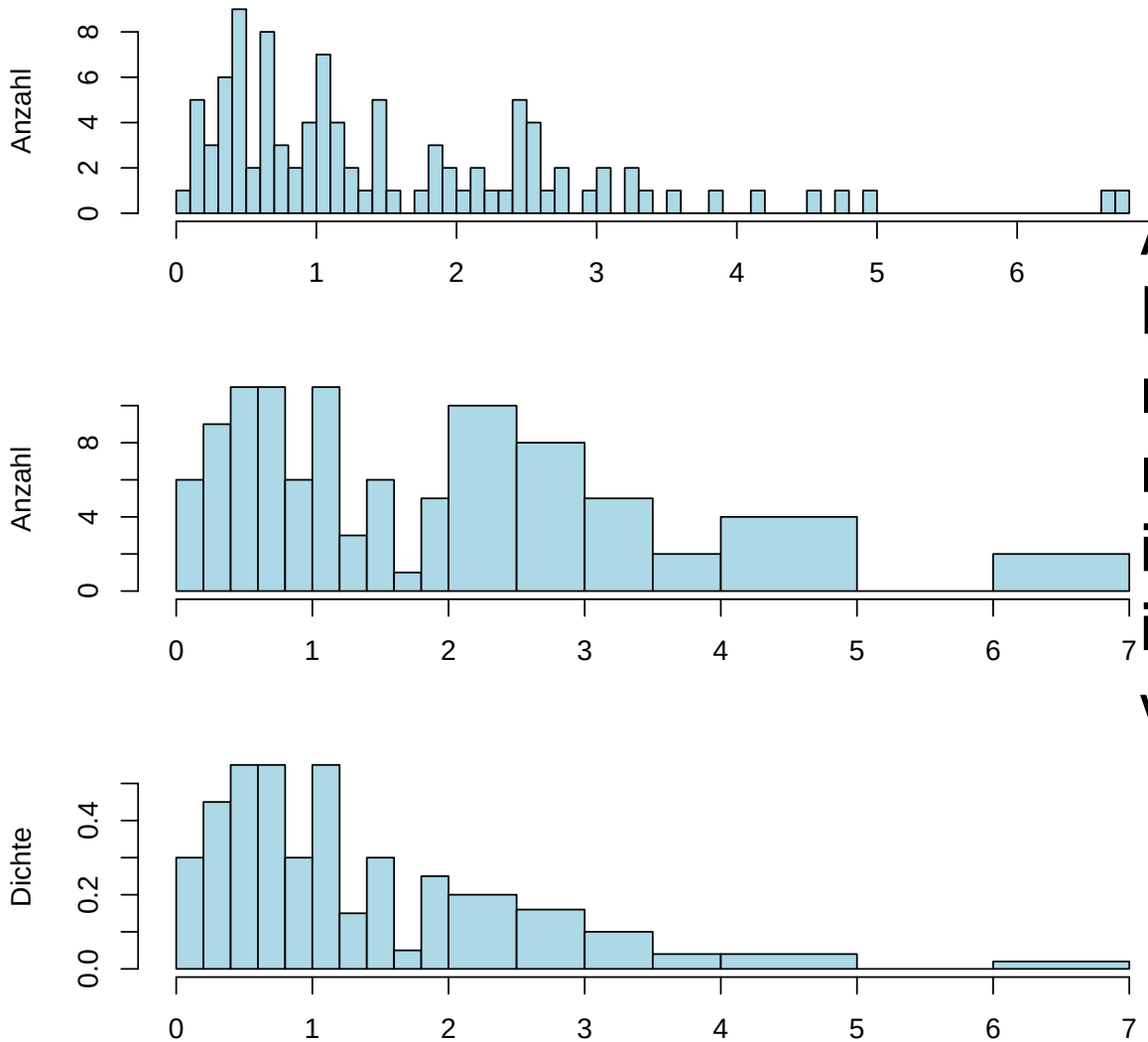
Zwei (oder mehr) Dichtepolygone in einem Plot



Man sieht sofort:

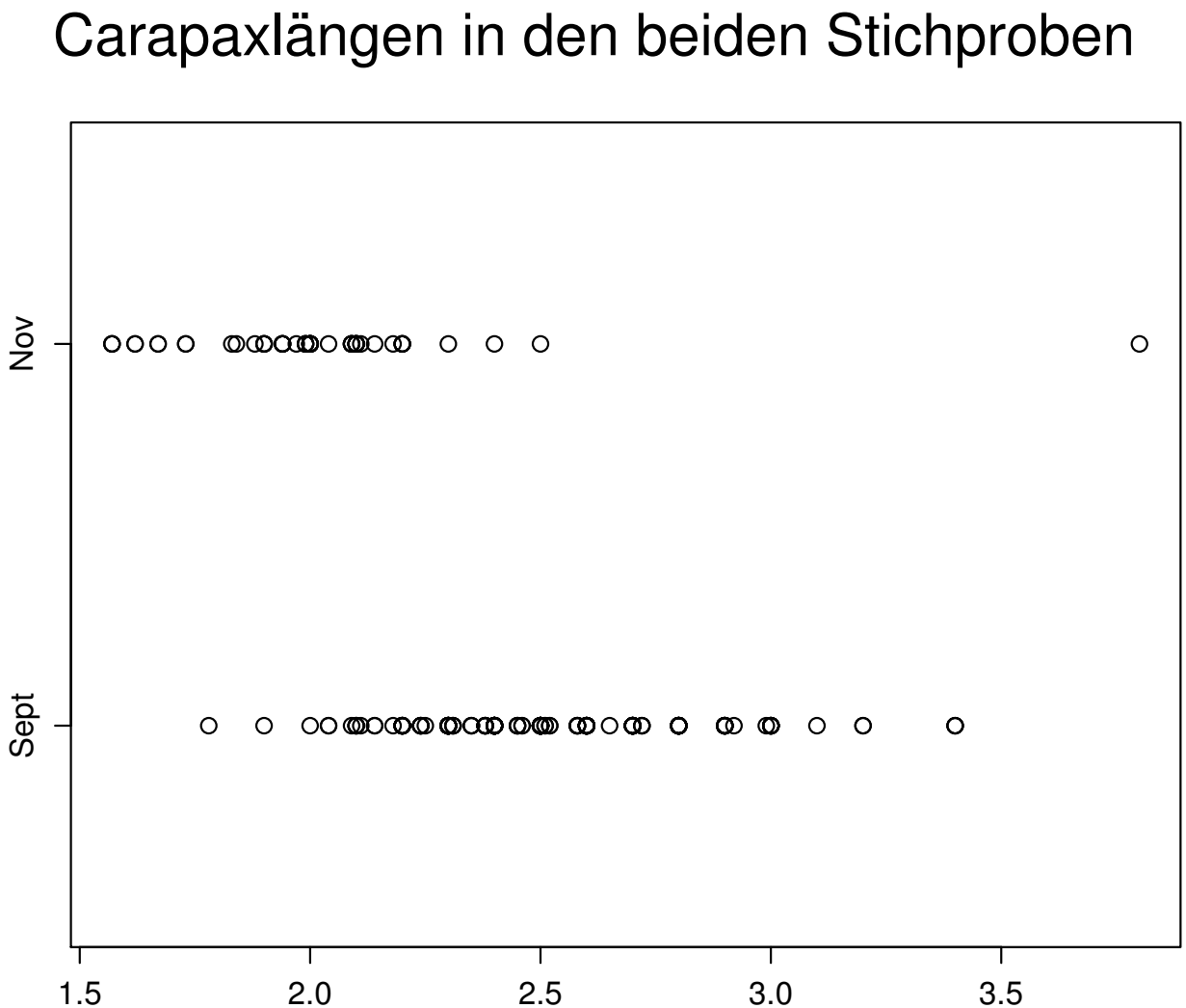
Die Verteilung in der Stichprobe vom November ist gegenüber der vom September nach links verschoben (und sie ist auch stärker um den häufigsten Wert konzentriert).

Anzahl vs. Dichte

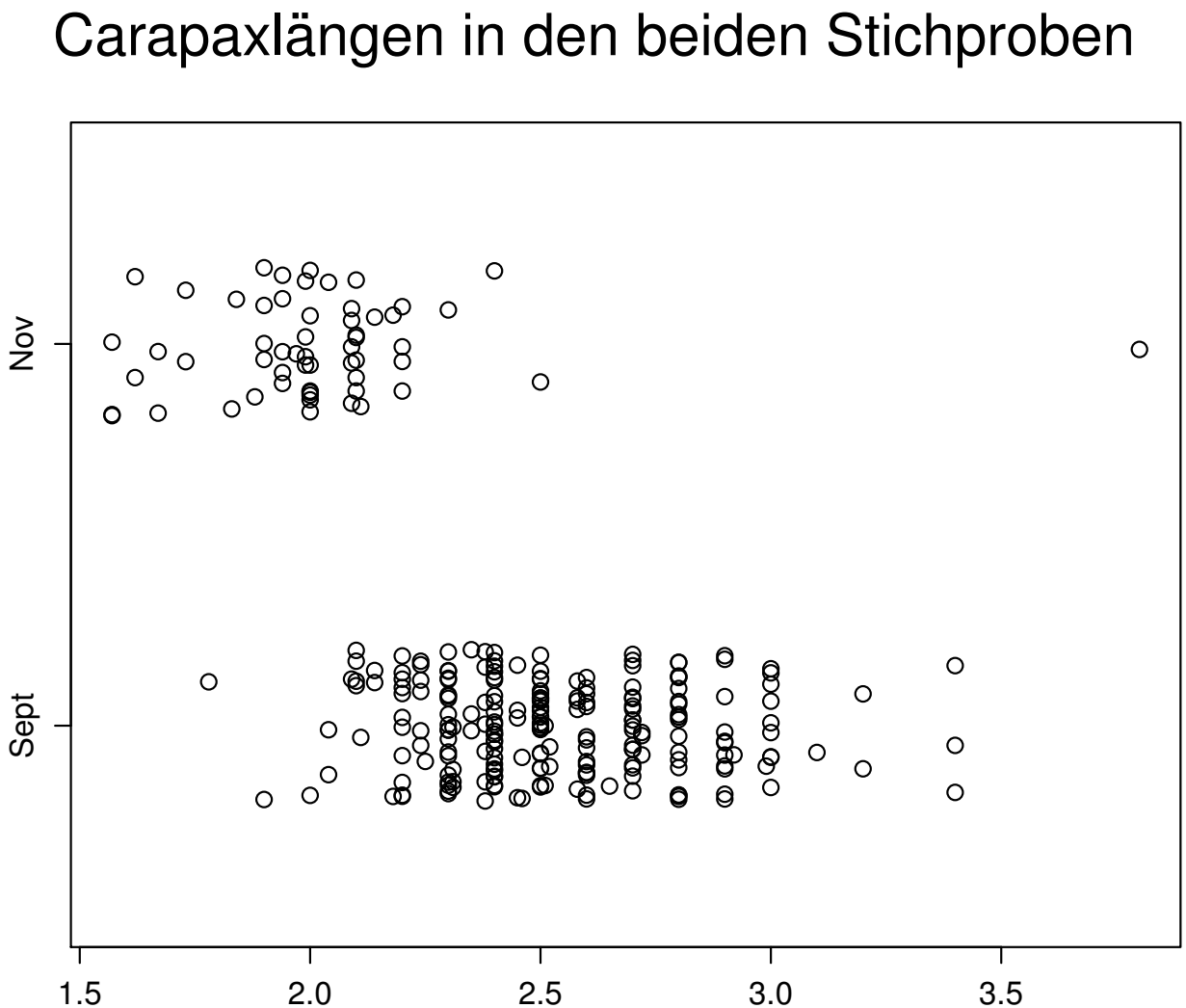


Also:
Bei Histogrammen mit ungleichmäßiger Unterteilung immer Dichten verwenden!

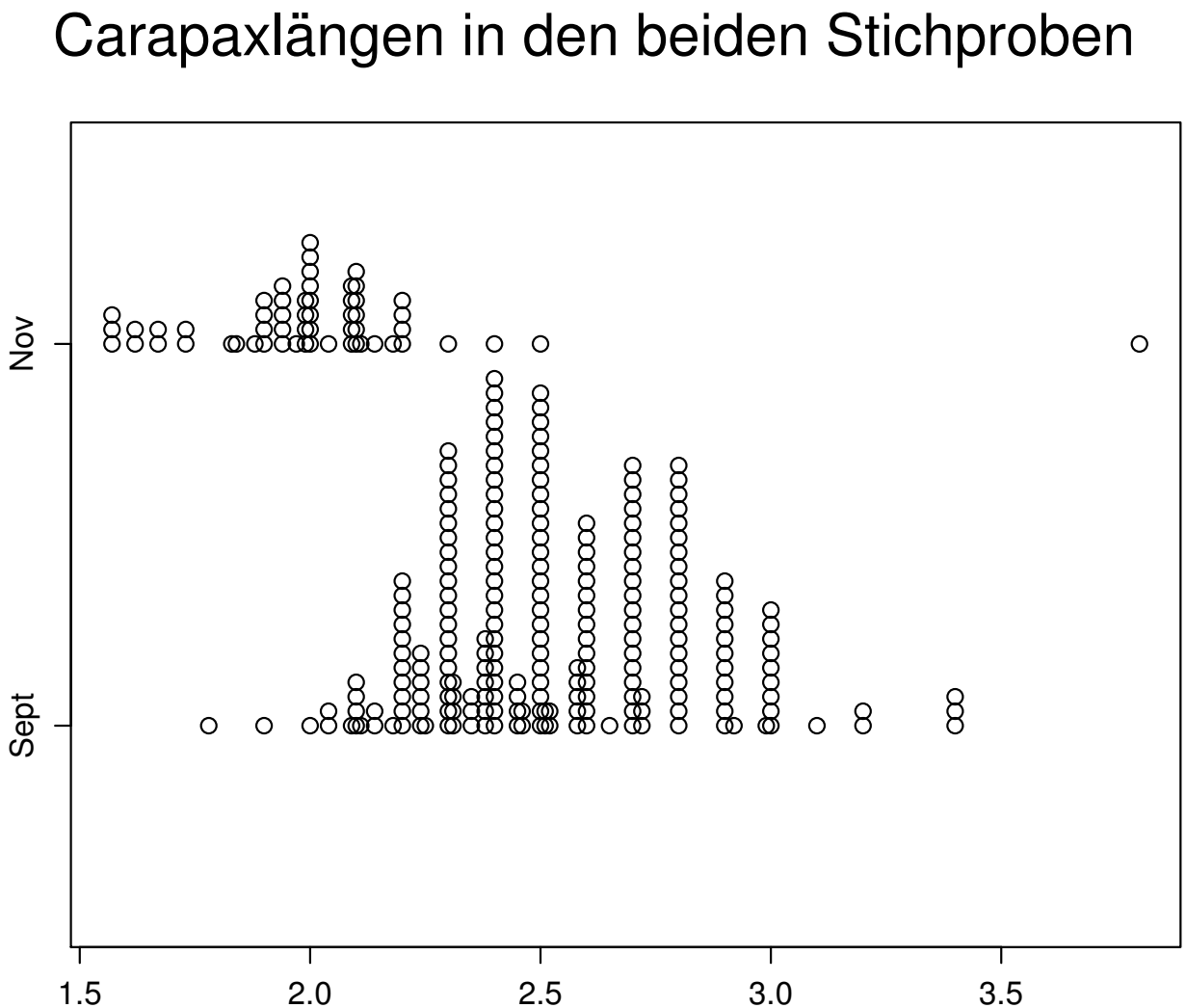
Stripchart, einfach



Stripchart, mit “jitter”



Stripchart, mit “stacking”



Histogramme/Dichtepolygone und Stripcharts geben ein ausführliches Bild eines Datensatzes.

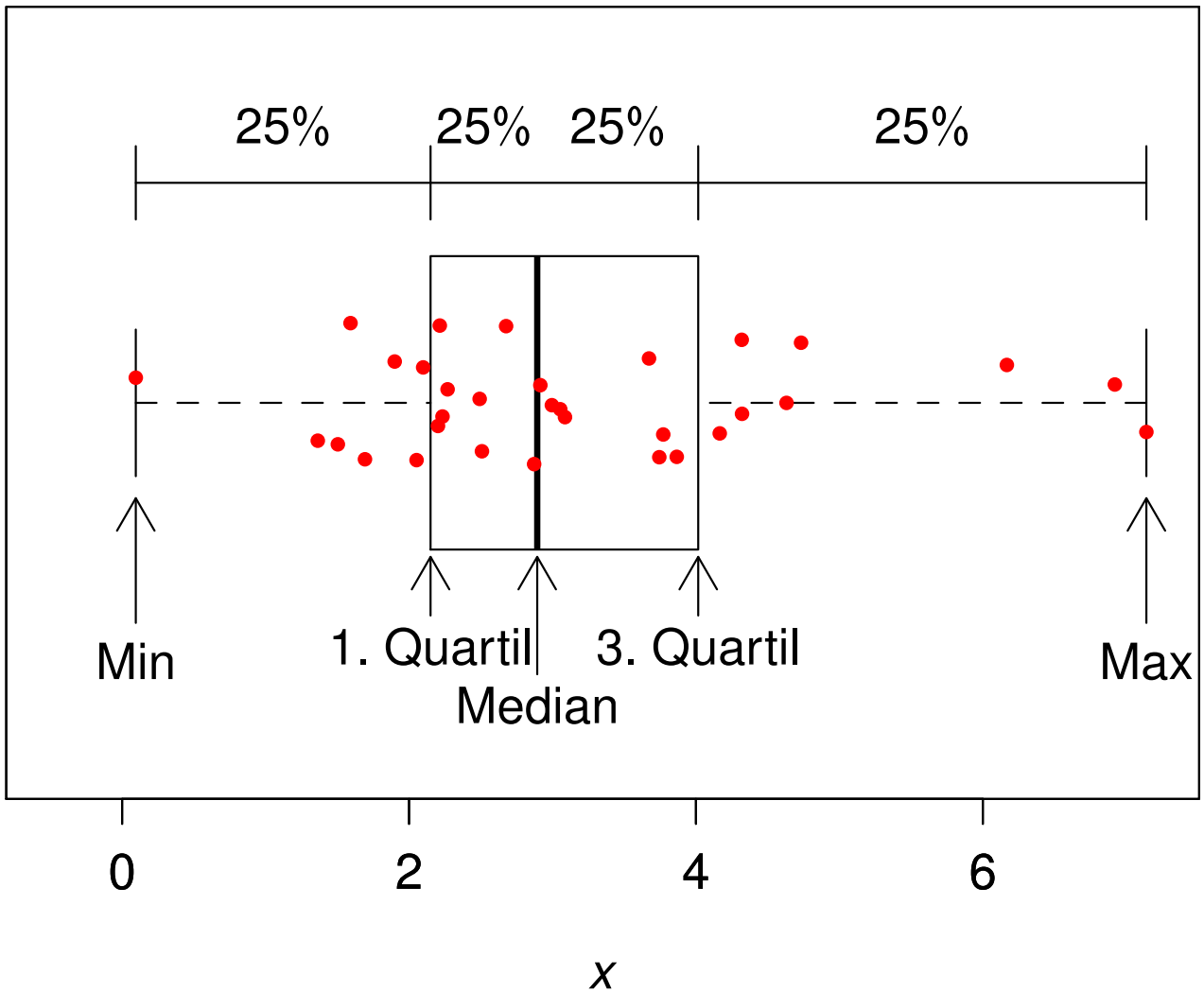
Manchmal zu ausführlich.

Zu viel Information erschwert den Überblick

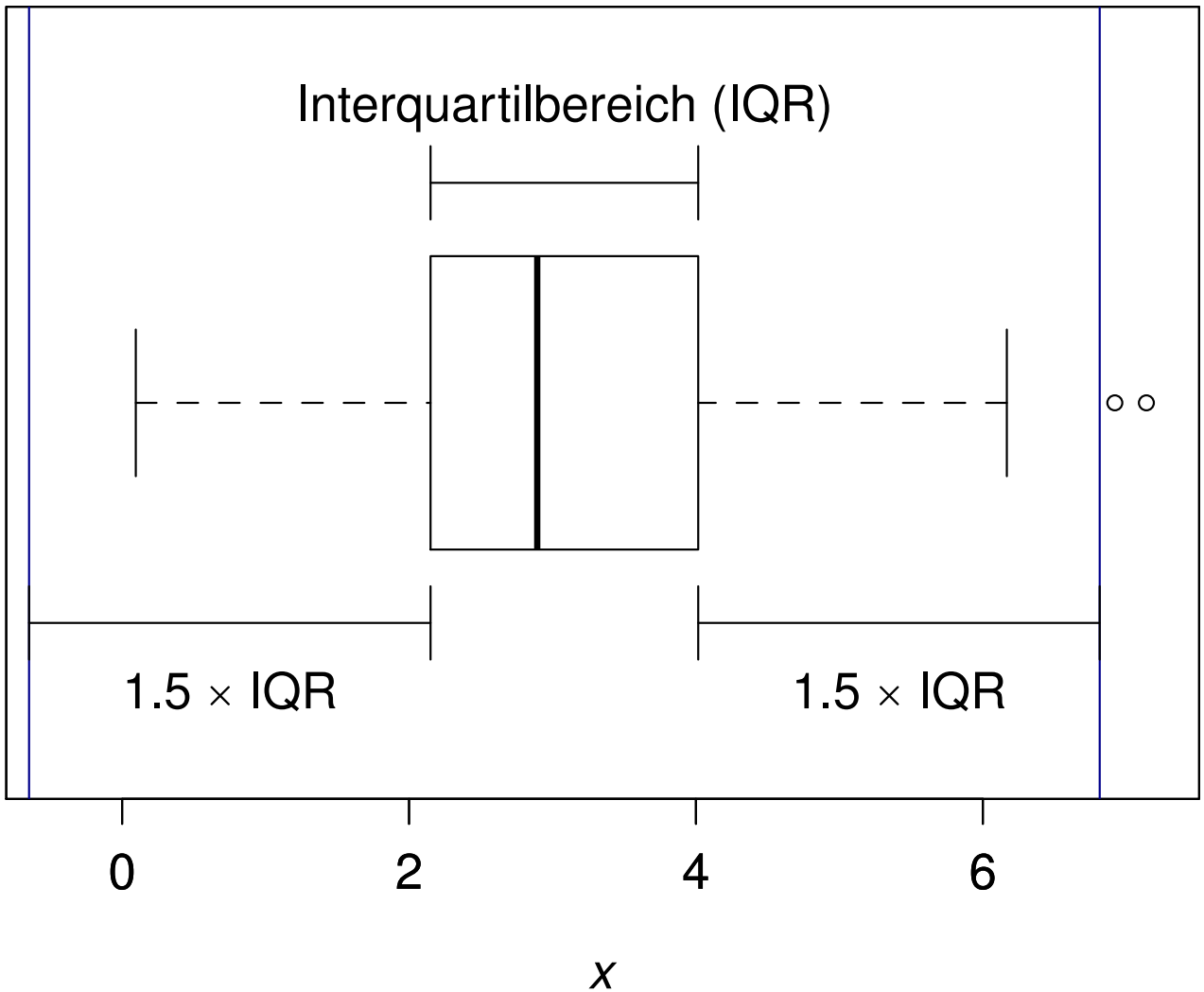
Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum Baum

Wald?

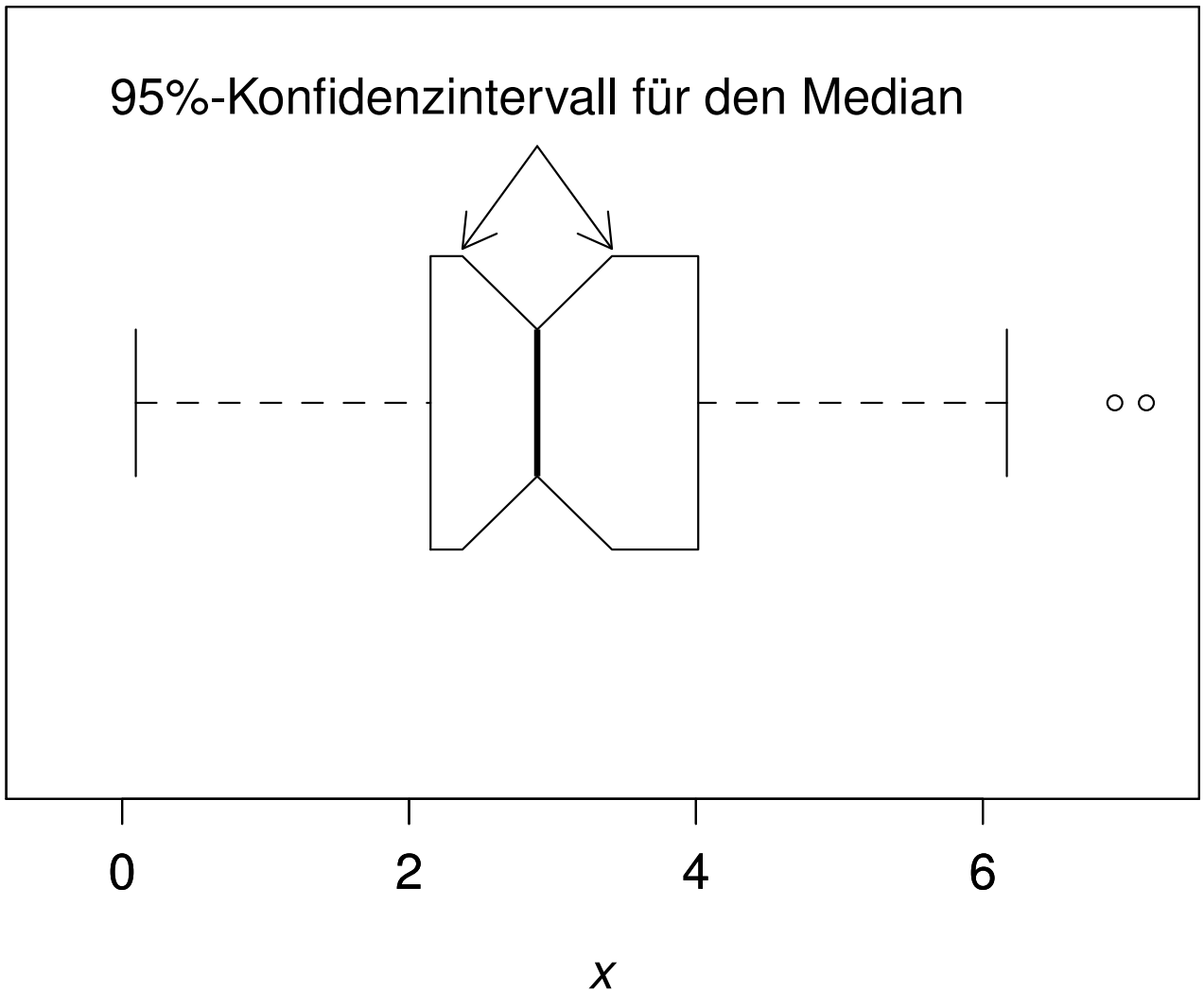
Boxplot, einfache Ausführung



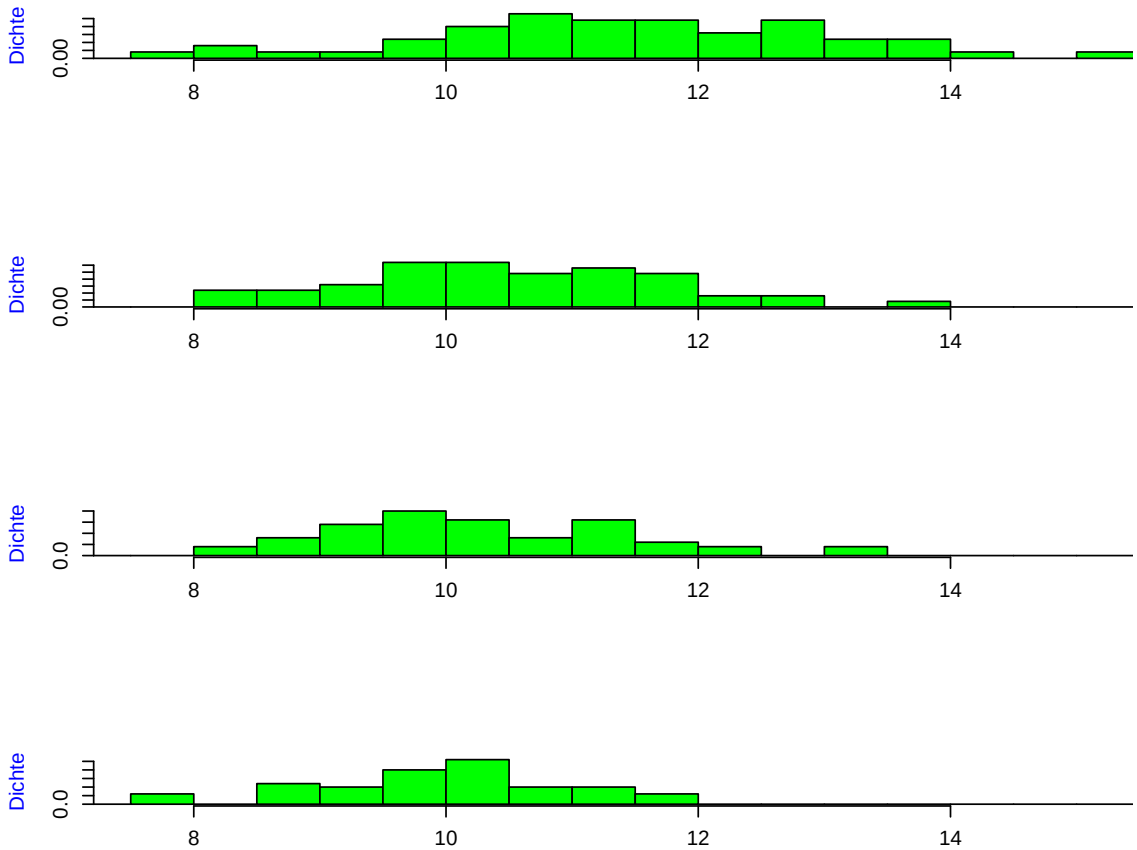
Boxplot, Standard-Ausführung

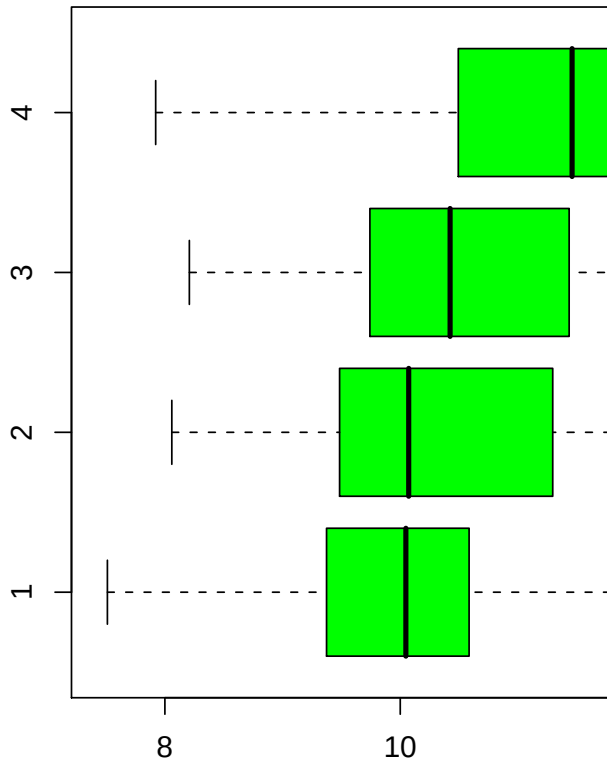


Boxplot, Profi-Ausführung



Beispiel:
Vergleich von mehreren Gruppen


Dichte
0.00
8
10
12
14
Dichte
0.00
8
10
12
14
Dichte
0.0
8
10
12
14
Dichte
0.0
8
10
12
14


4
3
2
1
8
10

Graphische Tricksereien

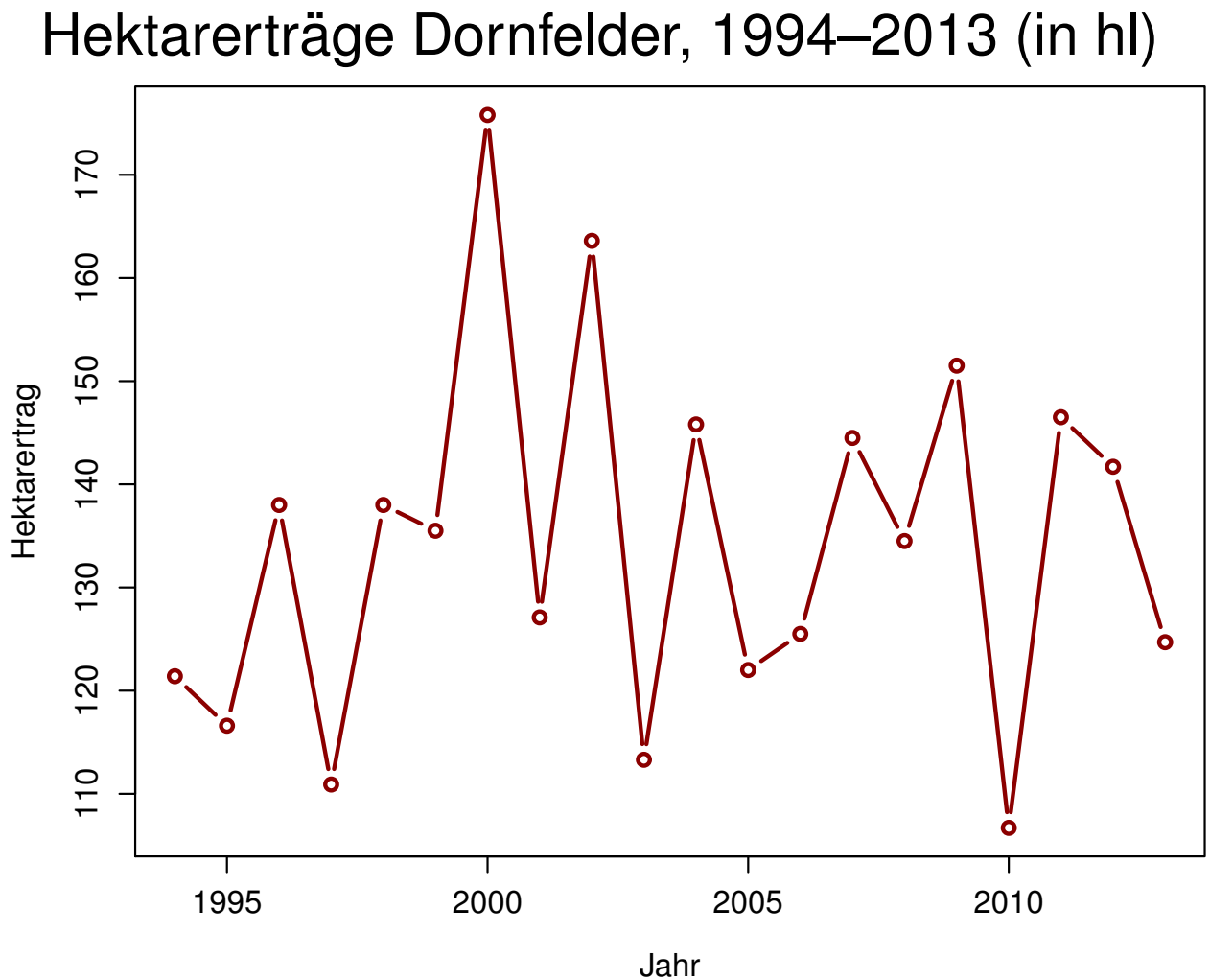
im Bereich der deskriptiven Statistik / der Kommunikation von numerischen Beobachtungen oder Resultaten:

(Graphische) Tricksereien / „Aufhübschen“ von Beobachtungen, z.B.

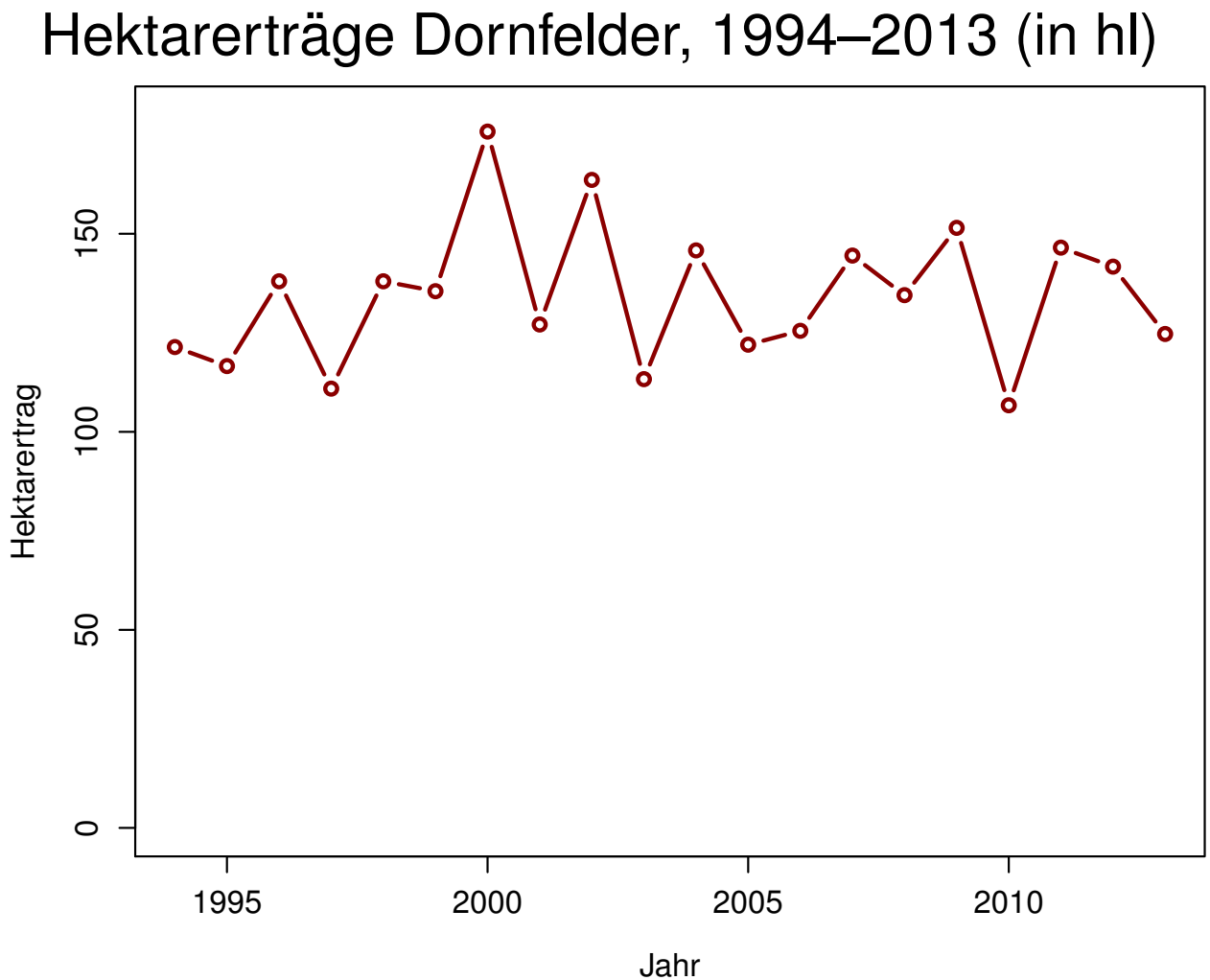
- Irreführende Wahl des Nullpunkts
- Stillschweigende nicht-lineare Transformationen der Achsen
- optische Täuschung durch unpassende 2d/3d-Grafiken
- ...

können den Betrachter (manchmal absichtlich) in die Irre führen.

Beunruhigend große Fluktuationen beim Dornfelder?



Beunruhigend große Fluktuationen beim Dornfelder?



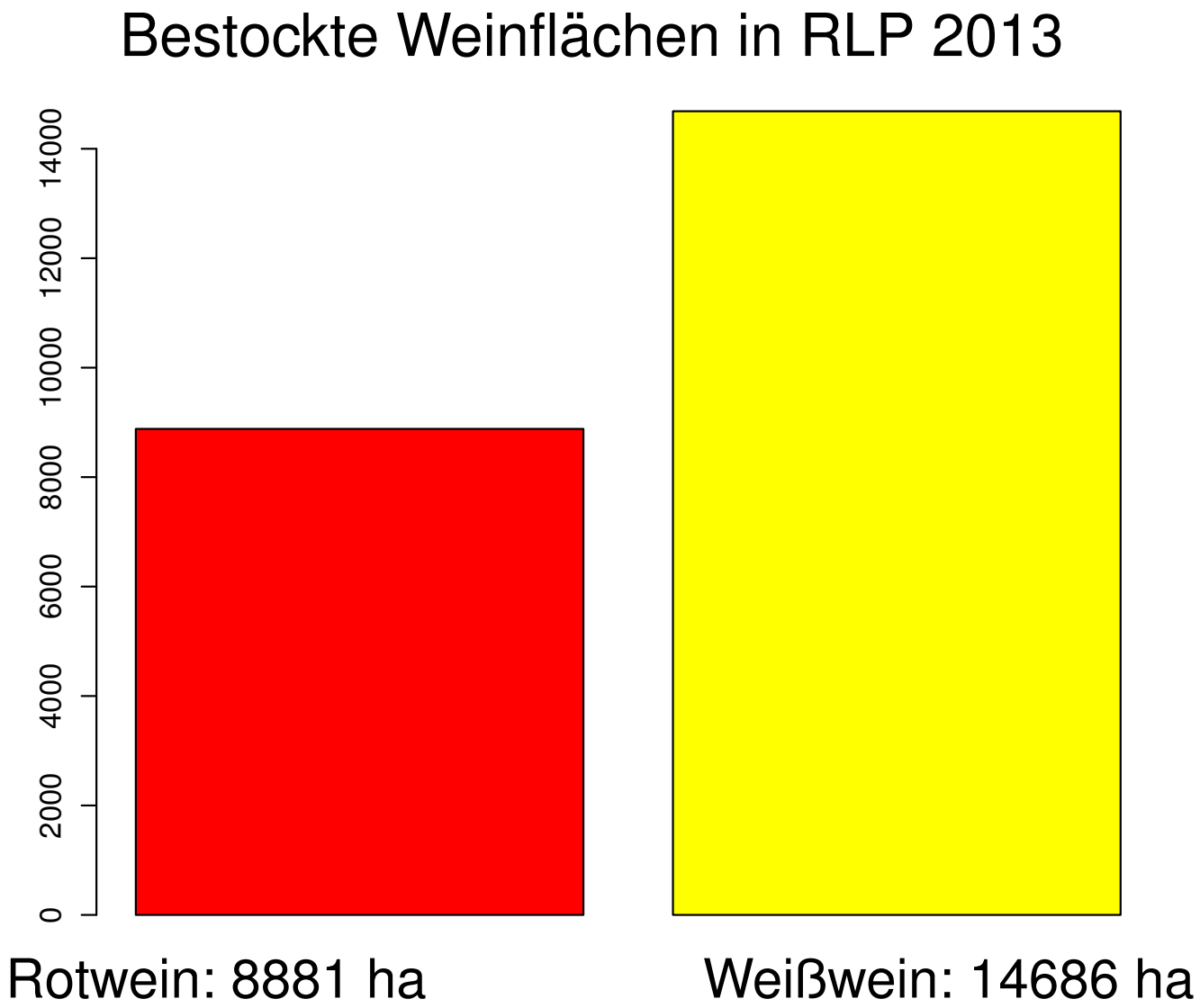
Rotwein in RLP: nur ein Tröpfchen?

Bestockte Weinflächen in RLP 2013

Rotwein: 8881 ha Weißwein: 14686 ha

Daten: Statistisches Landesamt RLP; Bilder (c) Benutzer André Karwath

Rotwein in RLP: nur ein Tröpfchen?



Fazit

1. Histogramme erlauben einen detailierten Blick auf die Daten
2. Dichtepolygone erlauben Vergleiche zwischen vielen Verteilungen
3. Boxplot können große Datenmengen vereinfacht zusammenfassen
4. Bei kleinen Datenmengen eher Stripcharts angemessen
5. Vorsicht mit Tricks wie 3D oder halbtransparenten Farben

Es ist oft möglich,
das Wesentliche
an einer Stichprobe

mit ein paar Zahlen
zusammenzufassen.

Wesentlich:

1. Wie groß?

Lageparameter

2. Wie variabel?

Streuungsparameter

Eine Möglichkeit
kennen wir schon
aus dem Boxplot:

Lageparameter

Der Median

Streuungsparameter

Der Quartilabstand $(Q_3 - Q_1)$

Der Median[1]:

die Hälfte der Beobachtungen sind kleiner,
die Hälfte sind größer.

Der Median ist
das 50%-Quantil
der Daten.

[1] „saloppe“ Definition (wir sehen gleich die präzise Definition)

Die Quartile

Das erste Quartil[2], Q_1:
ein Viertel der Beobachtungen
sind kleiner,
drei Viertel sind größer.

Q_1 ist das
25%-Quantil
der Daten.

[2] „saloppe“ Definition (wir sehen gleich die präzise Definition)

Die Quartile

Das dritte Quartil[3], Q_3:
drei Viertel der Beobachtungen
sind kleiner,
ein Viertel sind größer.

Q_3 ist das
75%-Quantil
der Daten.

[3] „saloppe“ Definition (wir sehen gleich die präzise Definition)

(Empirische) Quantile, allgemein

Seien n (reelle) Beobachtungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, $\alpha \in (0,1)$.

q ist (ein) α-Quantil der n Beobachtungswerte, wenn gilt

$$\frac{1}{n}\left|\{1 \le i \le n : x_i \le q\}\right| \ge \alpha \text{ und } \frac{1}{n}\left|\{1 \le i \le n : x_i \ge q\}\right| \ge 1-\alpha.$$

Bem.: Im Allgemeinen ist ein α-Quantil nicht eindeutig:

Seien $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$ die der Größe nach sortierten Werte.

Wenn $\alpha = \frac{k}{n}$ mit $1 \le k < n$, so ist jeder Wert $q \in [x_{(k)}, x_{(k+1)}]$ ein α-Quantil,

denn $\left|\{i : x_i \le x_{(k)}\}\right| \ge k$, $\left|\{i : x_i \ge x_{(k)}\}\right| \ge n-k+1$.

Wenn $n\alpha \notin \{1, \ldots, n-1\}$, so ist das α-Quantil der Wert $x_{(k)}$ mit $k = \lceil \alpha n \rceil$.

(Empirische) Quantile, allgemein II

n (reelle) Beobachtungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, $\alpha \in (0,1)$.

(ein) α-Quantil q der n Beobachtungswerte erfüllt

$$\frac{1}{n}\left|\{1 \le i \le n : x_i \le q\}\right| \ge \alpha \text{ und } \frac{1}{n}\left|\{1 \le i \le n : x_i \ge q\}\right| \ge 1-\alpha.$$

Bem.:

- Die Definition passt zu unserer früheren Definition für Verteilungen, wenn man die *empirische Verteilung* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ betrachtet.
- In der Literatur (und auch in Statistik-Software) sind verschiedene Interpolationen üblich, um „das“ α-Quantil stetig in α zu machen.

  (In `R` siehe etwa `help(quantile)`, es sind 9 Varianten implementiert.)

n (reelle) Beobachtungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Am häufigsten werden benutzt:

Lageparameter

Der Mittelwert $\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Streuungsparameter

Die Standardabweichung s (bzw. σ)

wobei

$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ die (empirische) Varianz

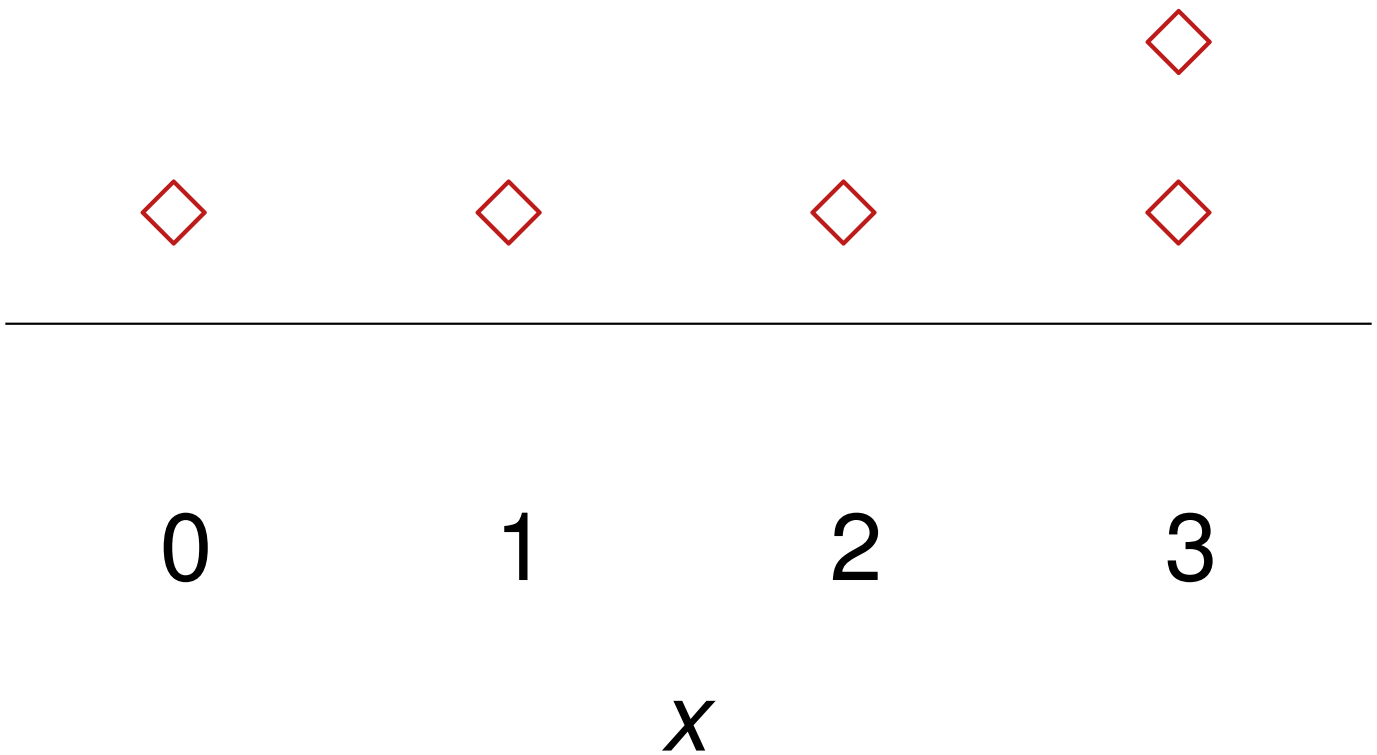
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ die korrigierte Stichproben-Varianz

$\left(= \frac{n}{n-1}\sigma^2 \right)$

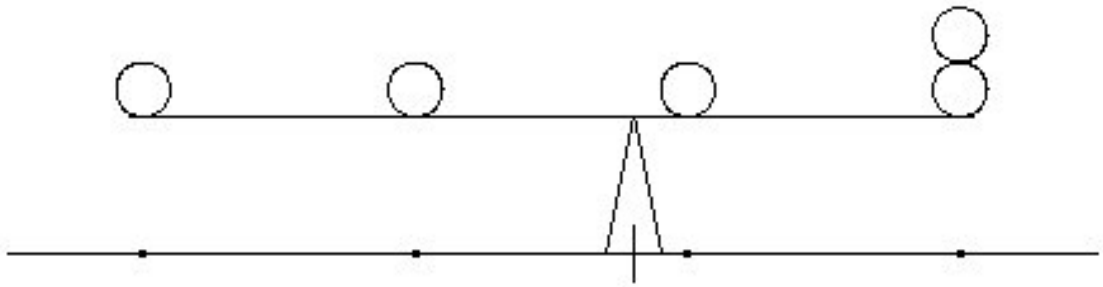
Erinnerung: Geometrische Bedeutung des Mittelwerts

Der Schwerpunkt

Wo muß der Drehpunkt sein, damit die Waage im Gleichgewicht ist?



$m = 1{,}8$?

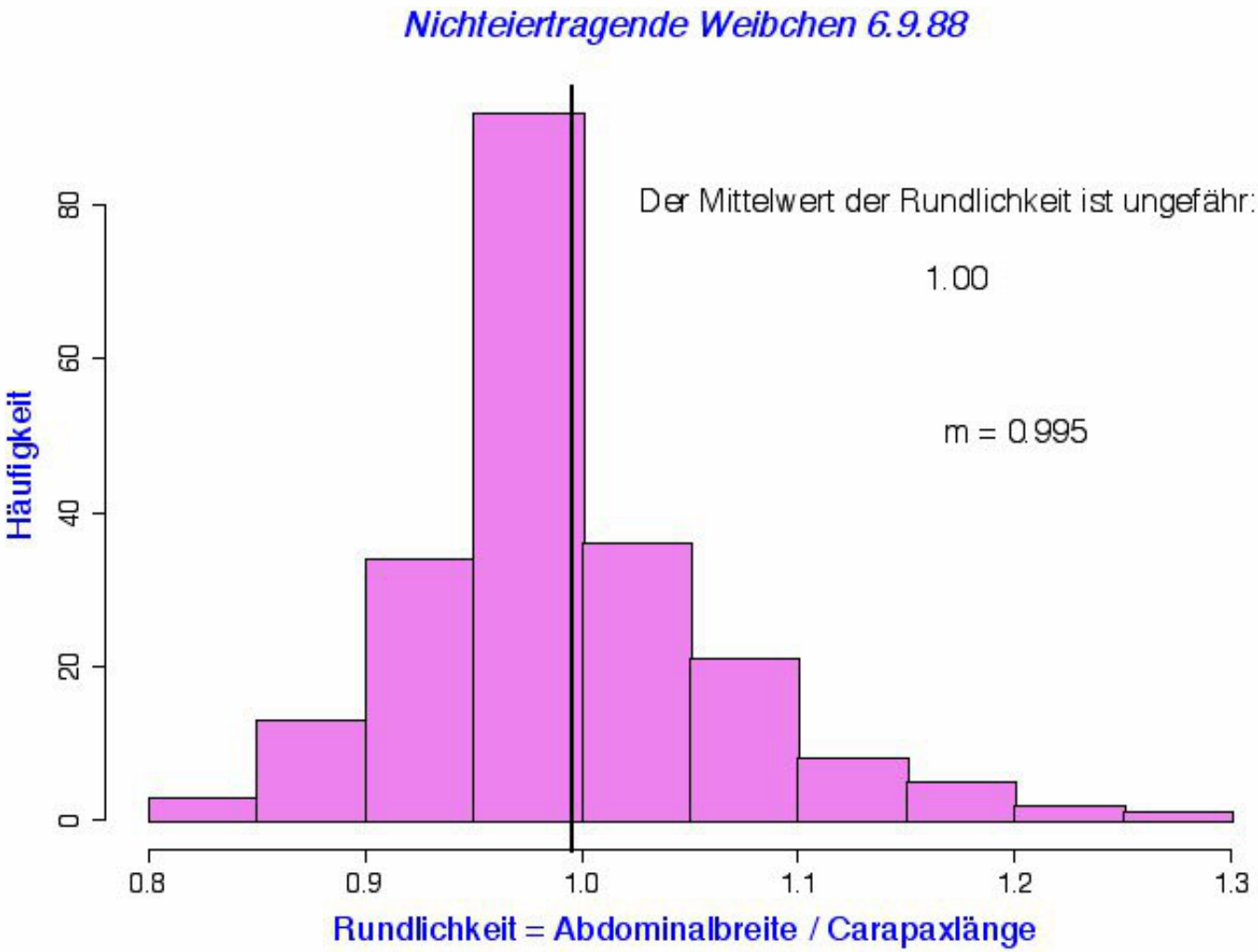


richtig

Oft kann man „mit dem bloßen Auge“ anhand eines Histogramms den Mittelwert gut einschätzen.

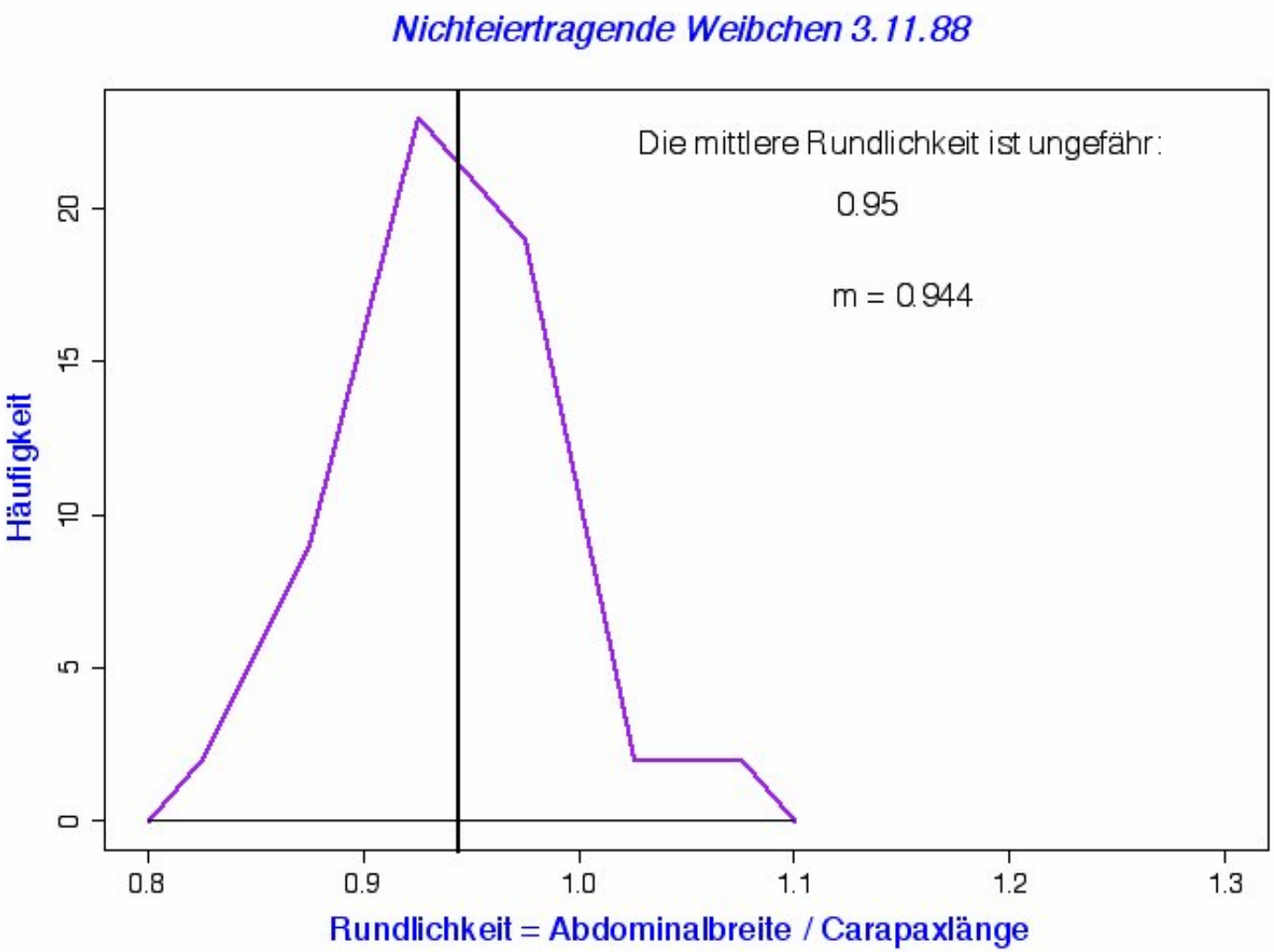
Beispiel: *Galathea intermedia*

„Rundlichkeit“
:=
Abdominalbreite / Carapaxlänge


Nichteiertragende Weibchen 6.9.88
Der Mittelwert der Rundlichkeit ist ungefähr:
1.00
m = 0.995
Häufigkeit
0
20
40
60
80
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

Beispiel:

3.11.88


Nichteiertragende Weibchen 3.11.88
Die mittlere Rundlichkeit ist ungefähr:
0.95
m = 0.944
Häufigkeit
0
5
10
15
20
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
Rundlichkeit = Abdominalbreite / Carapaxlänge

Die Standardabweichung (auch: Streuung)

Wie weit weicht
eine typische Beobachtung
vom
Mittelwert
ab ?

Mit n oder $n-1$ berechnen?

Die Standardabweichung σ eines Zufallsexperiments mit n gleichwahrscheinlichen Ausgängen $x_1, \ldots, x_n$ (z.B. Würfelwurf) ist definiert durch

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

Wenn es sich bei $x_1, \ldots, x_n$ um Beobachtungswerte in einer Stichprobe handelt, verwendet man eher

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

s als Schätzer für σ

Wir werden sehen:

Wenn $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. *Zufallsvariablen* mit Varianz $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$,

$$\overline{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

so hat die *Zufallsvariable*

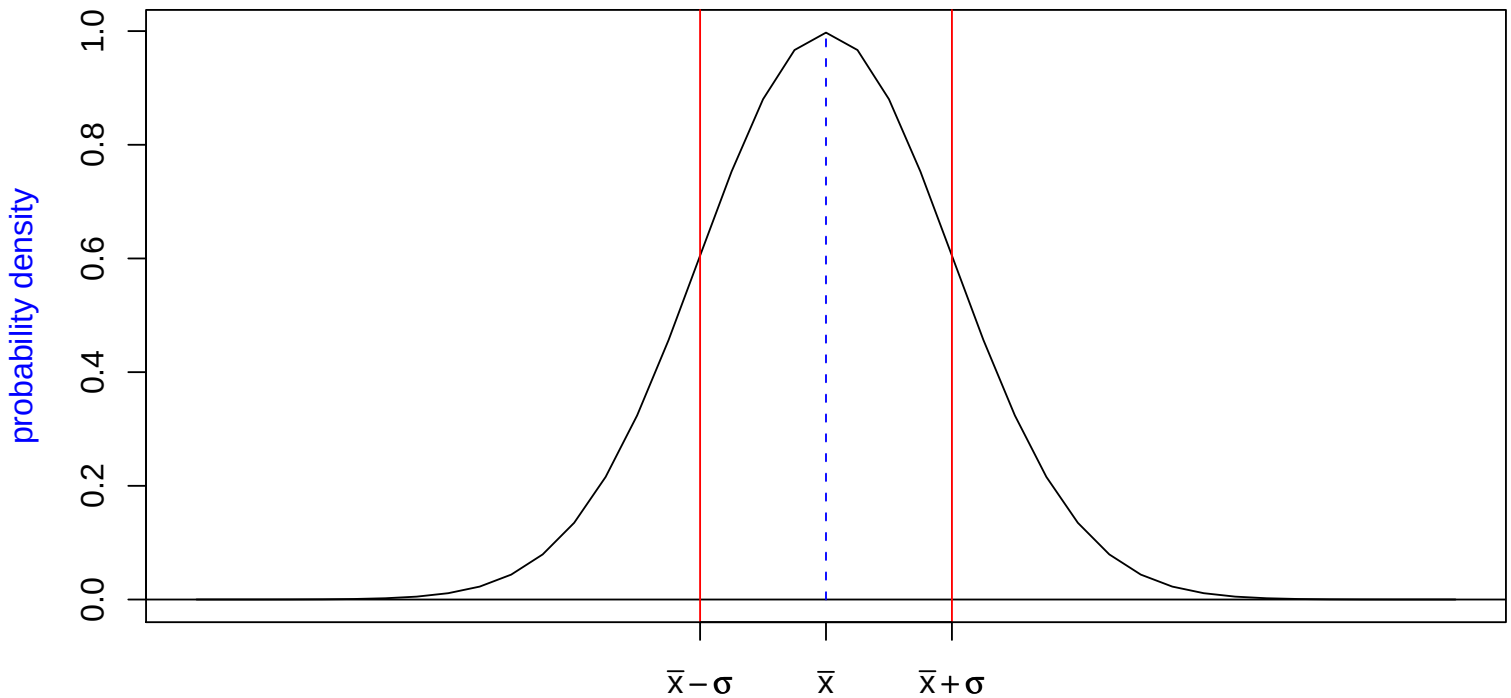
$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

die Eigenschaft

$$\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2.$$

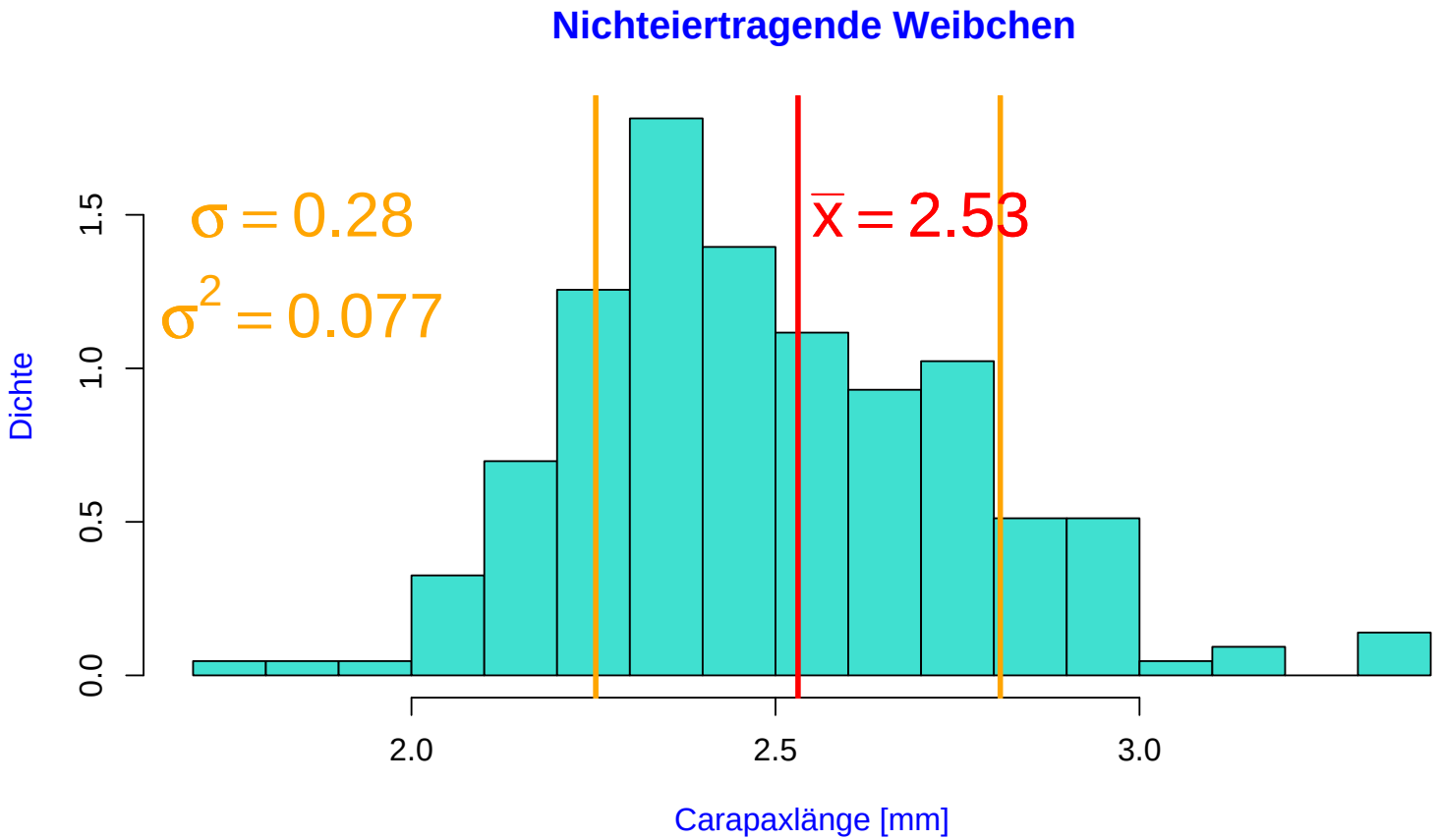
Faustregel für die Standardabweichung

Bei ungefähr glockenförmigen (also eingipfligen und symmetrischen) Verteilungen liegen ca. 2/3 der Verteilung zwischen $\overline{x} - \sigma$ und $\overline{x} + \sigma$.



Oft kann man so die Standardabweichung „mit bloßem Auge“ abschätzen.

Standardabweichung der Carapaxlängen nichteiertragender Weibchen vom 6.9.88



Hier liegt der Anteil zwischen $\bar{x} - \sigma$ und $\bar{x} + \sigma$ bei 72%.

Übrigens: Einschlägige R-Befehle

Mittelwert (`mean`), Standardabweichung (`sd`), Median, und Quantile

```
mean(x)
sd(x)
median(x)
quantile(x, 0.25, type=1)
quantile(x, 0.75, type=1)
summary(x)
```

Boxplot, Histogramm

```
boxplot(x)
hist(x)
```

(für Dichtehistogramm: `hist(x, prob=T)`)

Ein Dichtepolygon gewinnt man z.B. via

```
h <- hist(x)
plot(h$mids, h$density, type='l')
```

Mittelwert und Standardabweichung. . .

- charakterisieren die Daten gut, falls deren Verteilung (zumindest in etwa) glockenförmig ist
- und müssen andernfalls mit Vorsicht interpretiert werden.

Wir betrachten dazu einige Lehrbuch-Beispiele aus der Biologie, siehe z.B.

M. Begon, C. R. Townsend, and J. L. Harper. *Ecology: From Individuals to Ecosystems*. Blackell Publishing, 4 edition, 2008.

(Wir verwenden an die Originalpublikationen angelehnte simulierte Daten, nehmen Sie also nicht alle Datenpunkte wörtlich.)

Bachstelzen fressen Dungfliegen

Räuber

Bachstelze (White Wagtail)
Motacilla alba alba

image (c) by Artur Mikołajewski

Beute

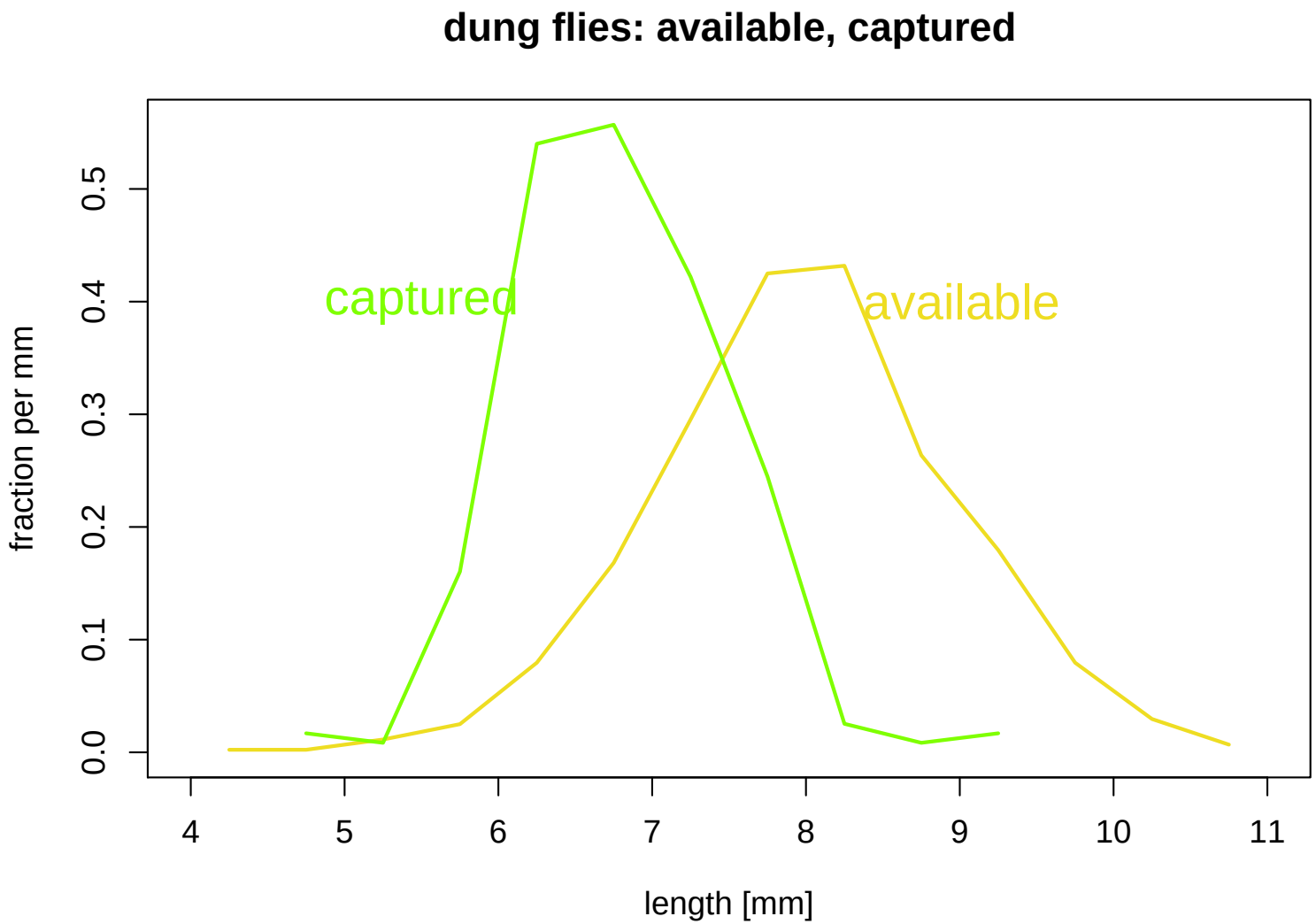
Gelbe Dungfliege
Scatophaga stercoraria

image (c) by Viatour Luc

Vermutung

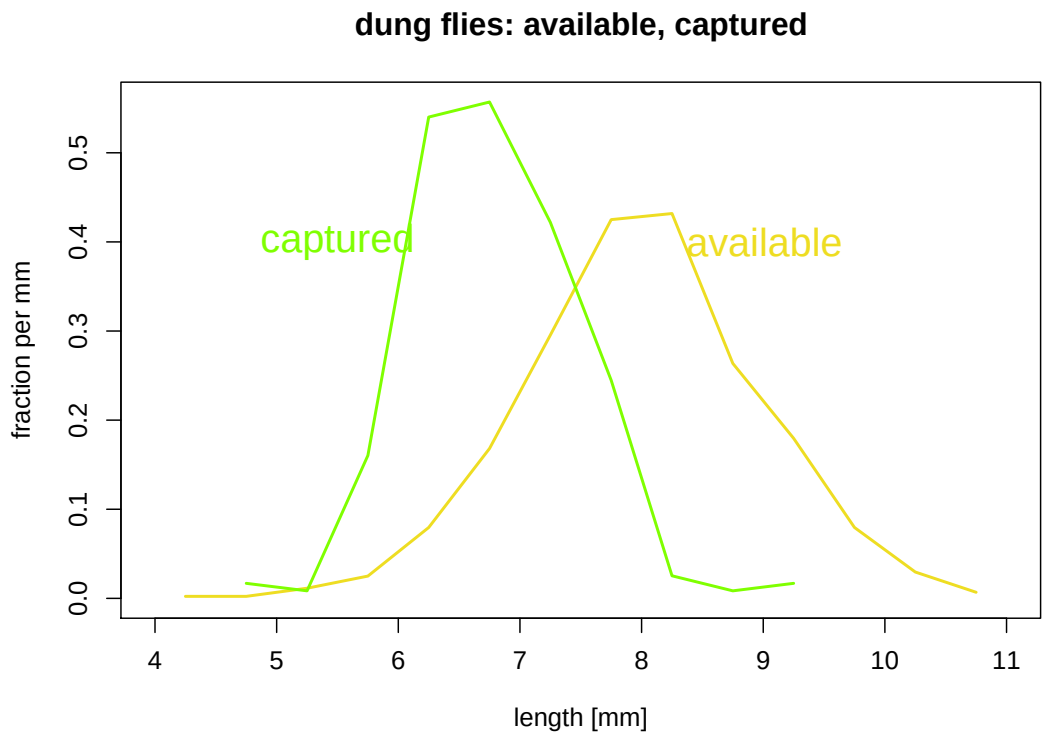
- Die Fliegen sind unterschiedlich groß
- Effizienz für die Bachstelze = Energiegewinn / Zeit zum Fangen und fressen
- Laborexperimente lassen vermuten, dass die Effizienz bei 7mm großen Fliegen maximal ist.

N.B. Davies.
Prey selection and social behaviour in wagtails (Aves: Motacillidae).
J. Anim. Ecol., 46:37–57, 1977.


dung flies: available, captured
captured
available
fraction per mm
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]

Vergleich der Größenverteilungen

	captured		available
Mittelwert	6.29	<	7.99
Standardabweichung	0.69	<	0.96



Interpretation

Die Bachstelzen bevorzugen Dungfliegen, die etwa 7mm groß sind.

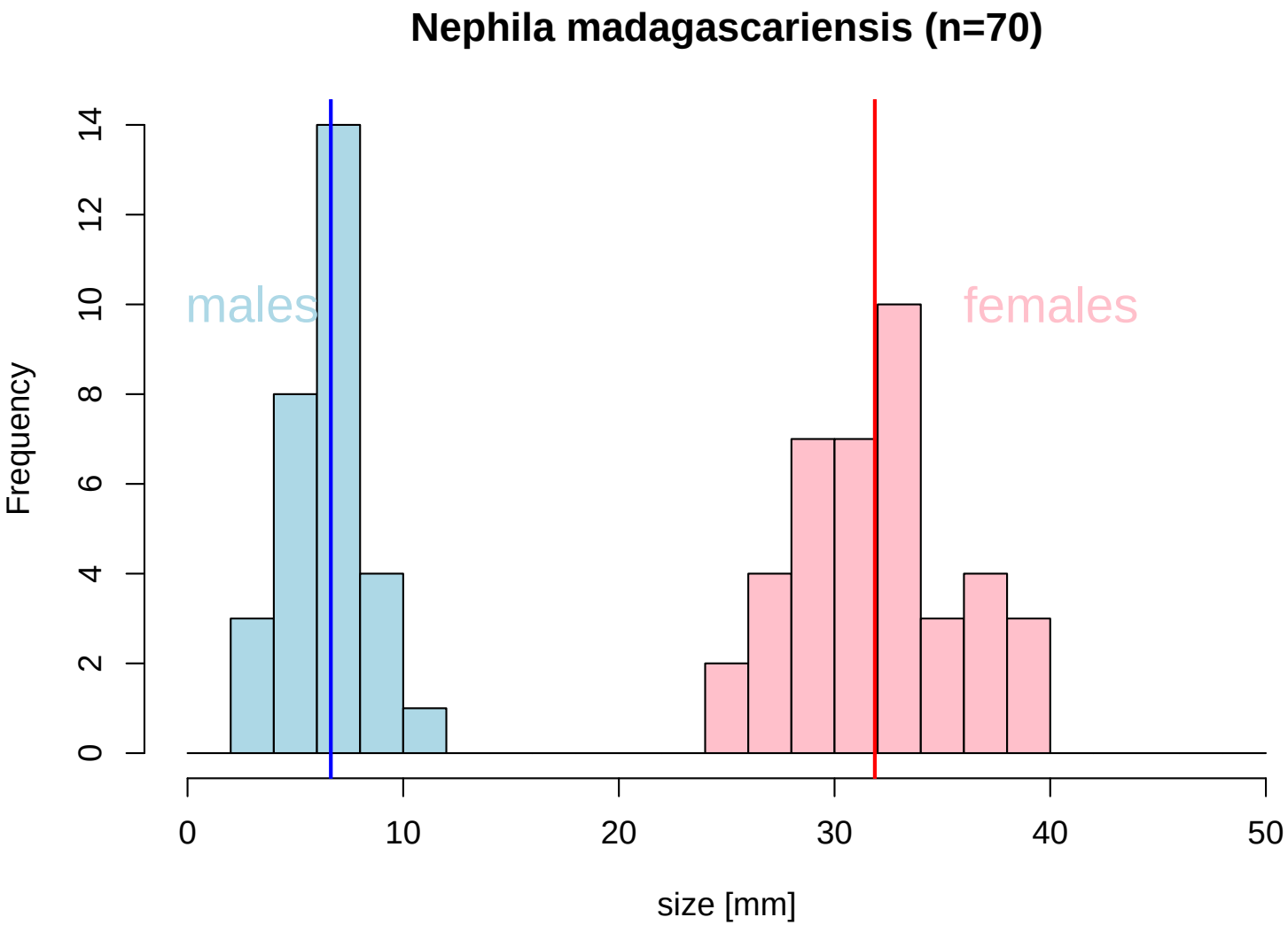
Hier waren die Verteilungen glockenförmig und es genügten 4 Werte (die beiden Mittelwerte und die beiden Standardabweichungen), um die Daten adäquat zu beschreiben.

Nephila madagascariensis

image (c) by Bernard Gagnon

Simulierte Daten:

Eine Stichprobe von 70 Spinnen
Mittlere Größe: 21,06 mm
Standardabweichung der Größe: 12,94 mm


Nephila madagascariensis (n=70)
males
females
Frequency
0
2
4
6
8
10
12
14
0
10
20
30
40
50
size [mm]

Nephila madagascariensis

image (c) by Arthur Chapman

Fazit des Spinnenbeispiels

Wenn die Daten aus verschiedenen Gruppen zusammengesetzt sind, die sich bezüglich des Merkmals deutlich unterscheiden, kann es sinnvoll sein, Kenngrößen wie den Mittelwert für jede Gruppe einzeln zu berechnen.

Kupfertolerantes Rotes Straußgras

Rotes Straußgras
Agrostis tenuis

image (c) Kristian Peters

Kupfer
Cuprum

Hendrick met de Bles

Anpassung an Kupfer?

- Pflanzen, denen das Kupfer schadet, haben kürzere Wurzeln.
- Die Wurzellängen von Pflanzen aus der Umgebung von Kupferminen wird gemessen.
- Samen von unbelasteten Wiesen werden bei Kupferminen eingesät.
- Die Wurzellängen dieser “Wiesenpflanzen” werden gemessen.

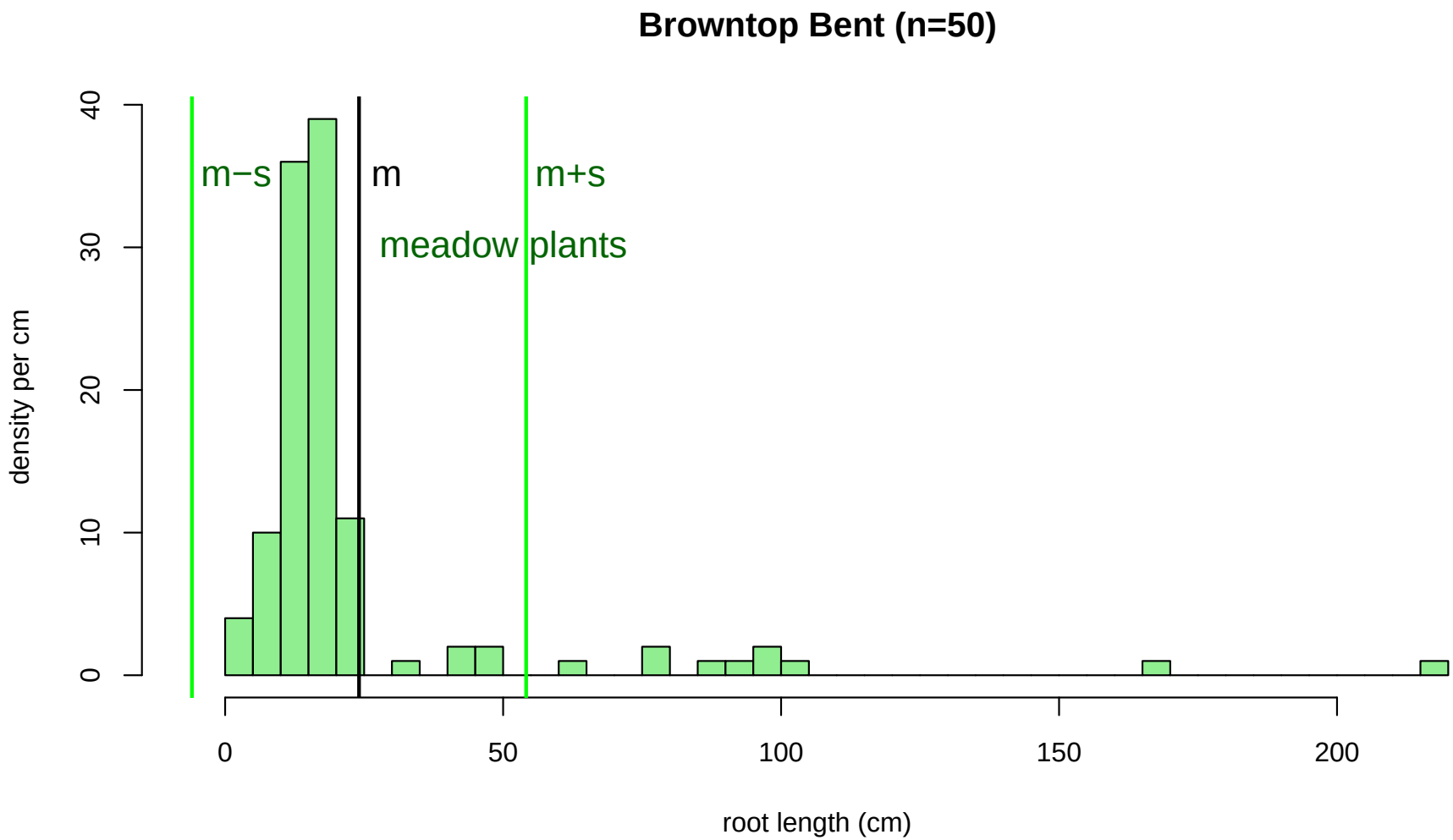
A.D. Bradshaw.

Population Differentiation in *agrostis tenius Sibth*. III. populations in varied environments.

New Phytologist, 59(1):92 – 103, 1960.

T. McNeilly and A.D Bradshaw.

Evolutionary Processes in Populations of Copper Tolerant Agrostis tenuis Sibth.

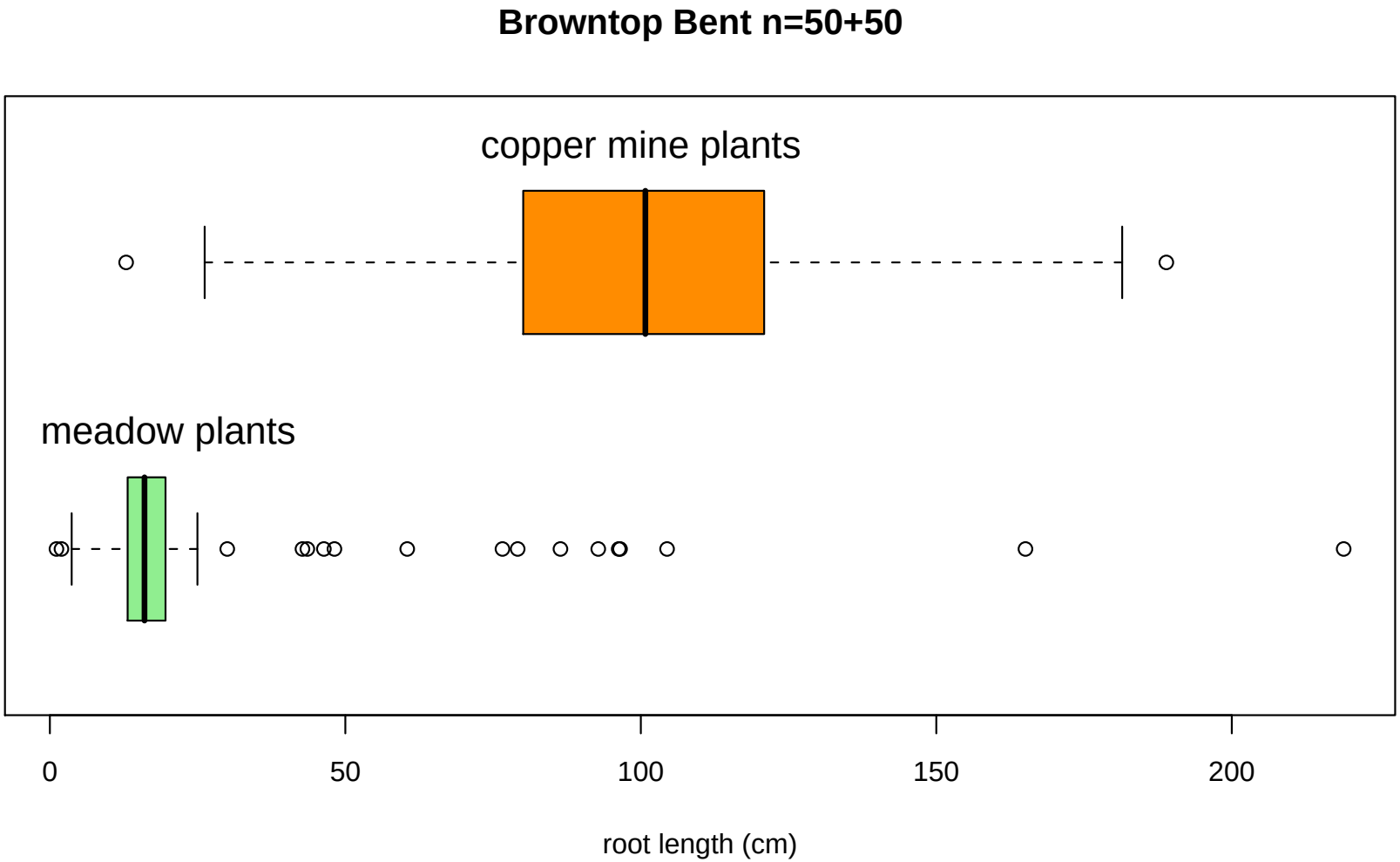


2/3 der Wurzellängen innerhalb [m-sd,m+sd]???? Nein!

Fazit des Straußgras-Beispiels

Manche Verteilungen können nur mit mehr als zwei Variablen angemessen beschrieben werden.

z.B. mit den fünf Werten der Boxplots:
min, Q_1, median, Q_3, max


Browntop Bent n=50+50
copper mine plants
meadow plants
0
50
100
150
200
root length (cm)

Schlussfolgerung

Viele Datenverteilungen sind annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung hinreichend beschrieben werden.

Es gibt aber auch Ausnahmen. Also:

Besser ist es, die Daten auch graphisch zu untersuchen,
und sich nicht allein auf numerische Kenngrößen zu verlassen.

Nochmal: Idee der Statistik

Variabilität (Erscheinung der Natur) durch Zufall (mathematische Abstraktion) modellieren

Die Daten werden als Realisierungen von Zufallsvariablen aufgefasst, die in einem stochastischen Modell spezifiert werden.

Man versucht dann, anhand der Daten Rückschlüsse auf Parameter des Modells zu ziehen, und so systematische Effekte von Zufälligem zu trennen.