# Statistik für Informatiker, SS 2019

# 1 Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

## 1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit, gemeinsame Verteilung

### 1.3.4 Die Situation im Fall mit Dichten

Matthias Birkner

http://www.staff.uni-mainz.de/birkner/StatInfo19/

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

20.5.2018

# Marginaldichten

## Beobachtung 1.55 (Marginaldichten)

*Die Zufallsvariable* $X = (X_1, X_2)$ *mit Werten in* $(S \subset)\ \mathbb{R}^2$ *habe (gemeinsame) Dichte* $f_X(x_1, x_2)$, *so hat* $X_1$ *die Dichte*

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 \quad (\text{für } x_1 \in \mathbb{R})$$

*und analog hat* $X_2$ *die Dichte* $f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1$ $(x_2 \in \mathbb{R})$.

$f_{X_1}$ *und* $f_{X_2}$ *heißen die Marginal- oder Randdichten von* $f_X$.

# Marginaldichten

## Beobachtung 1.55 (Marginaldichten)

*Die Zufallsvariable* $X = (X_1, X_2)$ *mit Werten in* ($S \subset$) $\mathbb{R}^2$ *habe (gemeinsame) Dichte* $f_X(x_1, x_2)$, *so hat* $X_1$ *die Dichte*

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 \quad (\text{für } x_1 \in \mathbb{R})$$

*und analog hat* $X_2$ *die Dichte* $f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1$ ($x_2 \in \mathbb{R}$).
$f_{X_1}$ *und* $f_{X_2}$ *heißen die Marginal- oder Randdichten von* $f_X$.

Argument:

$$P\big(X_1 \in [a, b]\big) = P\big(X_1 \in [a, b], X_2 \in \mathbb{R}\big)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[a,b]}(x_1) 1_{\mathbb{R}}(x_2) f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_a^b \Big( \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1$$

## Beobachtung 1.55 (Marginaldichten, allgemein)

*Allgemein: Für $X = (X_1, \ldots, X_d)$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und Dichte $f_X$ ist*

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_n$$

*die $i$-te Marginaldichte.*

Das kontinuierliche Analogon zu Prop. 1.52 lautet:

## Bericht 1.56 (Unabhängigkeit im reellwertigen Fall mit Dichte)

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ reellwertige ZVn, $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Wahrscheinlichkeitsdichten (d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\, dx = 1$), dann sind äquivalent:

1. $X_1, \dots, X_n$ sind u.a. und $X_i$ hat Dichte $f_i$ für $i = 1, \dots, n$ (d.h. $P(X_i \in B) = \int_B f_i(x)\, dx$ und $P\big(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\big) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i)$ für $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{R}$).
2. Die ZV $X = (X_1, \dots, X_n)$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ hat Dichte

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

d.h. die gemeinsame Dichte hat Produktgestalt.

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $X_i$ hat Dichte $f_i$

$\Longleftrightarrow$

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ hat Dichte

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $X_i$ hat Dichte $f_i$

$\Longleftrightarrow$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ hat Dichte
$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Vergleicht man dies mit Beob. 1.55, so folgt:
In diesem Fall ist die gemeinsame Dichtefunktion das Produkt der Marginaldichten.

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $X_i$ hat Dichte $f_i$

$\Longleftrightarrow$

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ hat Dichte
$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Vergleicht man dies mit Beob. 1.55, so folgt:
In diesem Fall ist die gemeinsame Dichtefunktion das Produkt der Marginaldichten.

*Beweisidee.* „Naiv“ rechnen wir

$$\int_{-\infty}^{x_1} f_1(y_1)\, dy_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(y_n)\, dy_n$$
$$= \int_{(-\infty,x_1]\times\cdots\times(-\infty,x_n]} f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\, dy_1 \ldots dy_n$$

□

## Beispiel 1.57

1. Wähle $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ in Bsp. 1.36, 1., d.h. $X = (X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf einem (achsenparallelen) Rechteck $A$ (mit Fläche $\mathrm{vol}(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$).

$X$ hat Dichte

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2) &= \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} 1_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]}(x_1, x_2) \\ &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

mit Marginaldichten $f_{X_i}(x_i) = \dfrac{1}{(b_i - a_i)} 1_{[a_i, b_i]}(x_i) \quad (i = 1, 2)$,

d.h. die Koordinaten $X_1$ und $X_2$ sind unabhängig (und jeweils uniform auf $[a_i, b_i]$ verteilt).

## Beispiel 1.57 (Forts.)

2. Wähle $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$ in Bsp. 1.36, d.h. $X = (X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf dem Einheitskreis (mit Fläche $\mathrm{vol}(A) = \pi$) mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} 1_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2).$$

## Beispiel 1.57 (Forts.)

2. Wähle $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$ in Bsp. 1.36, d.h. $X = (X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf dem Einheitskreis (mit Fläche $\mathrm{vol}(A) = \pi$) mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} 1_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2).$$

Die Marginaldichte ist

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} 1_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2)\, dx_2 = \frac{1}{\pi} 1_{[-1,1]}(x_1) \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} 1\, dx_2 \\ &= 1_{[-1,1]}(x_1) \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x_1^2} \end{aligned}$$

(und analog bzw. offensichtlich aus Symmetrie ist $f_{X_2} = f_{X_1}$).

## Beispiel 1.57 (Forts.)

2. Wähle $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$ in Bsp. 1.36, d.h. $X = (X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf dem Einheitskreis (mit Fläche $\mathrm{vol}(A) = \pi$) mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} 1_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2).$$

Die Marginaldichte ist

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} 1_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2)\, dx_2 = \frac{1}{\pi} 1_{[-1,1]}(x_1) \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} 1\, dx_2 \\ &= 1_{[-1,1]}(x_1) \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x_1^2} \end{aligned}$$

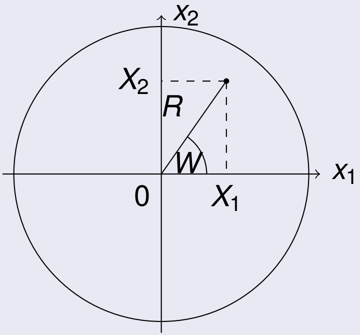
(und analog bzw. offensichtlich aus Symmetrie ist $f_{X_2} = f_{X_1}$).

Insbesondere sind (im Gegensatz zu 1.) $X_1$ und $X_2$ sind (natürlich) *nicht* unabhängig, denn $f_X(x_1, x_2) \neq f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$.

## Beispiel 1.57 (Forts.)

3. Betrachten wir $X = (X_1, X_2)$ aus 2. in Polarkoordinaten:

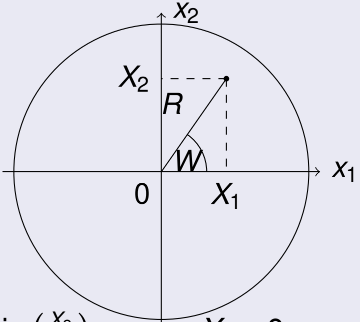
Sei $R$ der Radius, $W$ der Winkel von $X$



## Beispiel 1.57 (Forts.)

3. Betrachten wir $X = (X_1, X_2)$ aus 2. in Polarkoordinaten:

Sei $R$ der Radius, $W$ der Winkel von $X$




also

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad W = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 \geq 0, \\ \pi - \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 < 0, X_2 \geq 0, \\ -\pi - \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 < 0, X_2 < 0, \end{cases}$$

[knapp : $W = \mathrm{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right) + \pi 1_{[-1,0)}(X_1) \cdot \mathrm{sign}(X_2)$]

bzw. $X_1 = R\cos(W), X_2 = R\sin(W)$

## Beispiel 1.57 (Forts.)

3. $(X_1, X_2)$ uniform im Einheitskreis, in Polarkoordinaten:

$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $W = \mathrm{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right) + \pi 1_{[-1,0)}(X_1) \cdot \mathrm{sign}(X_2)$

## Beispiel 1.57 (Forts.)

3. $(X_1, X_2)$ uniform im Einheitskreis, in Polarkoordinaten:

$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $W = \mathrm{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right) + \pi 1_{[-1,0)}(X_1) \cdot \mathrm{sign}(X_2)$

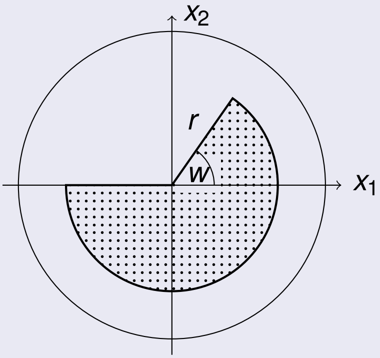
Dann sind $R$ und $W$ unabhängig,

$R$ hat Dichte

$f_R(r) = 2r1_{[0,1]}(r)$,

$W$ hat Dichte

$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-\pi,\pi)}(w)$



## Beispiel 1.57 (Forts.)

3. $(X_1, X_2)$ uniform im Einheitskreis, in Polarkoordinaten:

$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $W = \operatorname{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right) + \pi 1_{[-1,0)}(X_1) \cdot \operatorname{sign}(X_2)$

Dann sind $R$ und $W$ unabhängig,

$R$ hat Dichte

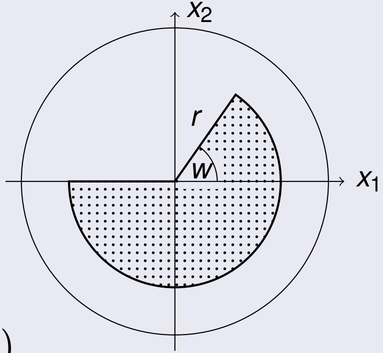
$f_R(r) = 2r 1_{[0,1]}(r)$,

$W$ hat Dichte

$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-\pi,\pi)}(w)$

denn (für $0 \le r \le 1$, $-\pi \le w < \pi$)

$P(R \le r, W \le w) = P\big(X \in$  $\big)$

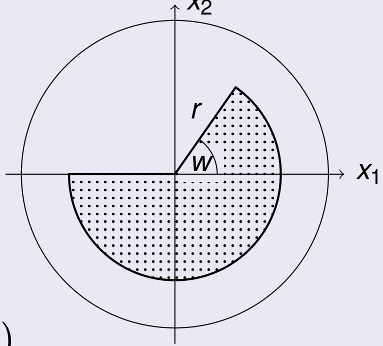


## Beispiel 1.57 (Forts.)

3. $(X_1, X_2)$ uniform im Einheitskreis, in Polarkoordinaten:

$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $W = \mathrm{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right) + \pi 1_{[-1,0)}(X_1) \cdot \mathrm{sign}(X_2)$

Dann sind $R$ und $W$ unabhängig,




$R$ hat Dichte

$f_R(r) = 2r 1_{[0,1]}(r)$,

$W$ hat Dichte

$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-\pi,\pi)}(w)$

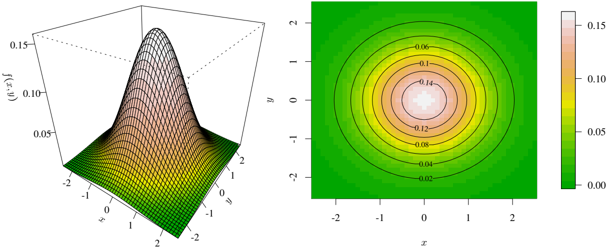
denn (für $0 \le r \le 1$, $-\pi \le w < \pi$)

$P(R \le r, W \le w) = P(X \in$  $)$

$$= \frac{\pi r^2 \frac{w+\pi}{2\pi}}{\pi 1^2} = r^2 \frac{w+\pi}{2\pi} = \int_0^r 2s\,ds \cdot \int_{-\pi}^w \frac{1}{2\pi}\,dv.$$

## Beispiel 1.57 (Forts.)

4. $X = (X_1, \ldots, X_d)$ $d$-dimensional Standard-normalverteilt, so sind $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig und jeweils $\sim \mathcal{N}_{0,1}$
(d.h. die $X_i$ sind [1-dimensional] Standard-normalverteilt)

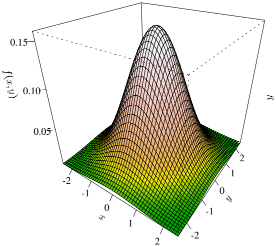


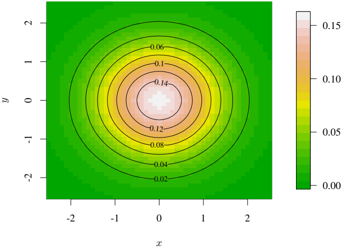
## Beispiel 1.57 (Forts.)

4. $X = (X_1, \dots, X_d)$ $d$-dimensional Standard-normalverteilt, so sind $X_1, \dots, X_d$ unabhängig und jeweils $\sim \mathcal{N}_{0,1}$
(d.h. die $X_i$ sind [1-dimensional] Standard-normalverteilt),

denn

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_d^2)\Big) = \prod_{i=1}^{d} \Big(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-x_i^2/2}\Big)$$



Die Beobachtung zur Rotationssymmetrie aus Bsp. 1.57, 3. verallgemeinert sich folgendermaßen:

## Beobachtung 1.58

*$X = (X_1, X_2)^T$ habe eine rotationssymmetrische Dichte $f_X$, d.h. $f_X(x_1, x_2)$ hängt nur von $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ab (also $f_X(x_1, x_2) = g(r)$ für eine gewisse Funktion $g \geq 0$), $X' = (X_1', X_2')^T$ entstehe aus $X$ durch Drehung (um Winkel $\alpha$ um den Ursprung), d.h.*

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)X_1 - \sin(\alpha)X_2 \\ \sin(\alpha)X_1 + \cos(\alpha)X_2 \end{pmatrix}.$$

*Dann hat $X'$ dieselbe Dichte (und somit dieselbe Verteilung) wie $X$.*

*(Dies ist anschaulich sehr plausibel, man kann es z.B. mit Bericht 1.59 [unten] beweisen.)*

## Beobachtung 1.58 (Forts.)

*$X = (X_1, X_2)^T$ habe eine rotationssymmetrische Dichte $f_X(x_1, x_2) = g\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big)$*

*Sei $(R, W)$ die Polarkoordinatendarstellung von $X$ (wie in Bsp. 1.57, 3., insbes. $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$)*

## Beobachtung 1.58 (Forts.)

$X = (X_1, X_2)^T$ *habe eine rotationssymmetrische Dichte* $f_X(x_1, x_2) = g\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big)$

*Sei* $(R, W)$ *die Polarkoordinatendarstellung von* $X$ *(wie in Bsp. 1.57, 3., insbes.* $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$*), so sind* $R$ *und* $W$ *unabhängig,* $W$ *ist uniform verteilt auf* $[-\pi, \pi)$ *und* $R$ *hat Dichte* $2\pi r g(r) 1_{[0,\infty)}(r)$

## Beobachtung 1.58 (Forts.)

*$X = (X_1, X_2)^T$ habe eine rotationssymmetrische Dichte $f_X(x_1, x_2) = g\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big)$*

*Sei $(R, W)$ die Polarkoordinatendarstellung von $X$ (wie in Bsp. 1.57, 3., insbes. $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$), so sind $R$ und $W$ unabhängig, $W$ ist uniform verteilt auf $[-\pi, \pi)$ und $R$ hat Dichte $2\pi r g(r) 1_{[0,\infty)}(r)$:*

$$P(R \le u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,u]}\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big) g\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big)\, dx_1\, dx_2$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^u g(r)\, r dr dw = \int_0^u 2\pi r g(r)\, dr$$

*(wir verwenden hier etwas salopp die „Polarkoordinatenform des Flächenelements" $dx_1\, dx_2 = r\, dr dw$, man kann dies wiederum mit Bericht 1.59 [unten] beweisen.)*

Speziell für $X_1$, $X_2$ unabhängig, $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, somit $X = (X_1, X_2)$ 2-dim. Standard-normalverteilt, ergibt sich (für $u > 0$):

$$P(R^2 \le u) = P(R \le \sqrt{u}) = \int_0^{\sqrt{u}} 2\pi r \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}\, dr$$

$$= \Big[ -e^{-r^2/2} \Big]_{r=0}^{r=\sqrt{u}} = 1 - e^{-u/2}$$

Speziell für $X_1$, $X_2$ unabhängig, $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, somit $X = (X_1, X_2)$ 2-dim. Standard-normalverteilt, ergibt sich (für $u > 0$):

$$P(R^2 \le u) = P(R \le \sqrt{u}) = \int_0^{\sqrt{u}} 2\pi r \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}\, dr$$
$$= \Big[ -e^{-r^2/2} \Big]_{r=0}^{r=\sqrt{u}} = 1 - e^{-u/2}$$

d.h. $R^2 \sim \mathrm{Exp}_{1/2}$.

Speziell für $X_1$, $X_2$ unabhängig, $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, somit $X = (X_1, X_2)$ 2-dim. Standard-normalverteilt, ergibt sich (für $u > 0$):

$$P(R^2 \le u) = P(R \le \sqrt{u}) = \int_0^{\sqrt{u}} 2\pi r \tfrac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}\, dr$$
$$= \Big[ - e^{-r^2/2} \Big]_{r=0}^{r=\sqrt{u}} = 1 - e^{-u/2}$$

d.h. $R^2 \sim \mathrm{Exp}_{1/2}$.

Dies ist der theoretische Hintergrund der *Box-Muller-Methode* zur Simulation normalverteilter ZVn.

# Allgemeine Dichtetransformation im $\mathbb{R}^d$

## Bericht 1.59 (Allgemeine Dichtetransformation im $\mathbb{R}^d$)

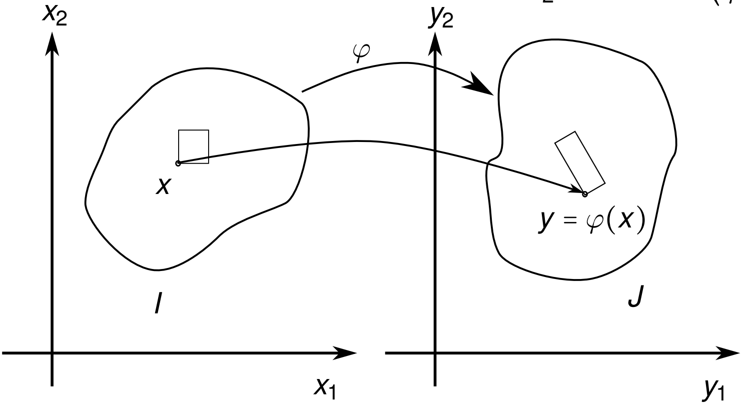
$X$ $\mathbb{R}^d$-wertige ZV mit Dichte $f_X$, $I \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $P(X \in I) = 1$, $J \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi : I \to J$ bijektiv, stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\varphi'(x) = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1}^{d} \qquad \text{(„Jacobi-Matrix“)}$$

(wobei $\varphi(x) = \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x)\big)^T$, d.h. $\varphi_i$ ist die $i$-te Koordinatenfunktion von $\varphi$), dann hat $Y := \varphi(X)$ die Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X\big(\varphi^{-1}(y)\big)}{\left|\det \varphi'\big(\varphi^{-1}(y)\big)\right|}, & y \in J, \\ 0, & y \notin J. \end{cases}$$

Heuristik (im Fall $d = 2$): Lokal sieht $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$

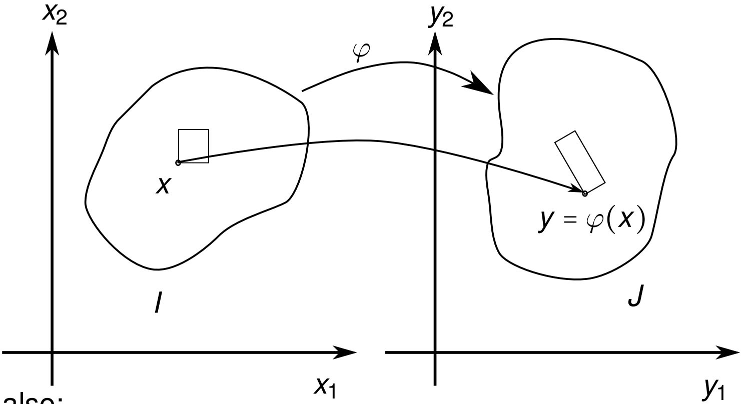



„aus wie“ $\quad \varphi(x') \approx \varphi(x) + \varphi'(x) \cdot (x' - x)$

$$= \varphi(x) + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(x) & \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_1(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2(x) & \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

(plus Terme, die $O(||x' - x||^2)$ sind)

Heuristik (im Fall $d = 2$): Lokal sieht $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$

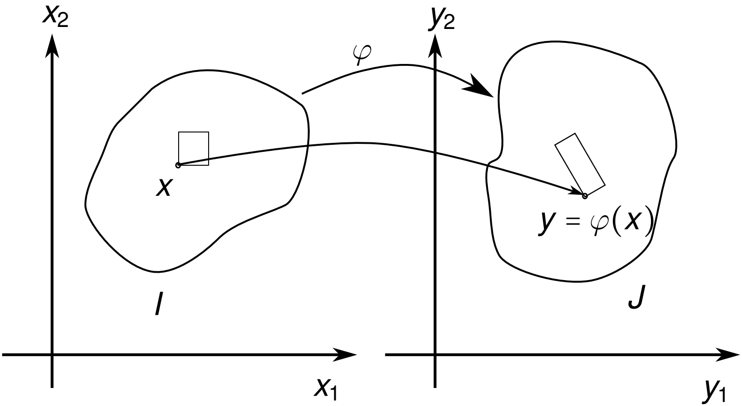



also:

die Fläche der Größe $h_1 \cdot h_2$ „rund um $x$"

wird auf

$\approx$ Fläche $h_1 \cdot h_2 \cdot |\det \varphi'(x)|$ „rund um $y$" abgebildet.




Wenden wir dies auf $Y = \varphi(X)$ an, so bedeutet das anschaulich:

Für $y = \varphi(x) \in J$ (und sehr kleines $h > 0$) ist

$$\begin{aligned} f_Y(y)h^2 &\approx \mathbb{P}\big(Y \text{ nimmt Wert in Quadrat der Fläche } h^2 \text{ mit „Aufpunkt" } y \text{ an}\big) \\ &\approx \mathbb{P}\big(X \text{ nimmt Wert in Quader d. Fl. } h^2/|\det \varphi'(x)| \text{ mit „Aufpkt." } x \text{ an}\big) \\ &\approx f_X(x)\frac{h^2}{|\det \varphi'(x)|} = \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\det \varphi'(\varphi^{-1}(y))|}h^2. \end{aligned}$$

# $d$-dimensionale Verteilungsfunktionen

Nur der Vollständigkeit halber, wir werden dies im Verlauf der Vorlesung nicht benötigen:

**Bericht 1.60**

Analog betrachtet zu Def. 1.26 betrachtet man im Fall $d > 1$ für $(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ gelegentlich die $d$-dimensionale Verteilungsfunktion

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_d) := P\big(X \in (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \ldots (-\infty, x_d]\big),$$

die allerdings etwas weniger „handlich" ist als im 1-dimensionalen Fall.

## Bericht 1.60 (Forts.)

Analog zu Bem. 1.27, 3. „weiß“ die $d$-dimensionale Verteilungsfunktion von $X$ „alles“ über die Verteilung von $X$.

Eigenschaften:

1. $F_X$ rechtsstetig, d.h. $x_n \searrow x$ (koordinatenweise) $\Rightarrow$ $F_X(x_n) \to F(x)$
2. $F_X(x_n) \to 1$ wenn $x_n \to (+\infty, \ldots, +\infty)$
3. $F_X(x_n) \to 0$ wenn $\min_{i=1,\ldots,d} x_{n,i} \to -\infty$
4. Für $x = (x_1, \ldots, x_d) < y = (y_1, \ldots, y_d)$ (koordinatenweise), parametrisiere die Ecken des $d$-Quaders $(x, y]$ mit $\{1, 2\}^d$ via $\left\{u = (z_1^{(i_1)}, \ldots, z_d^{(i_d)}) : i_1, \ldots, i_d \in \{1, 2\}\right\}$ wo $z_j^{(1)} = x_j$, $z_j^{(2)} = y_j$, es muss gelten

$$\sum_{u \text{ Ecken}} (-1)^{\#\{1 \le m \le d \,:\, i_m = 1\}} F_X(u) \Big( = \mu_F((x, y]) \Big) \ge 0$$