Statistik für Informatiker, SS 2018

1.4 Erwartungswert, Varianz und Kovarianz

Matthias Birkner

http://www.staff.uni-mainz.de/birkner/StatInfo19/

27.5.2019 und 3.6.2019

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Der Erwartungswert ist eine wichtige Kenngröße der Verteilung einer reellwertigen Zufallsvariable X, er gibt eine Antwort auf die – etwas salopp formulierte – Frage „Wie groß ist X typischerweise?“

Sei X reelle ZV mit abzählbarem Wertebereich (auf einem W'raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert), d.h. es gibt eine abzählbare Menge $S = S_X \subset \mathbb{R}$ mit $P(X \in S) = 1$ und $\mathscr{L}_P(X)$ hat Gewichte $P(X = x)$, $x \in S$.

Definition 1.66

Der *Erwartungswert* von X ist definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in S_X} x P(X = x),$$

sofern die Reihe absolut konvergiert (d.h. sofern $\sum_{x \in S_X} |x| P(X = x) < \infty$ gilt, dann kann die Summation in beliebiger Reihenfolge erfolgen). Manchmal schreibt man auch $\mu_X := \mathbb{E}[X]$.

Man sagt dann „X besitzt einen Erwartungswert“ und schreibt dies auch als $X \in \mathcal{L}^1$ (bzw. $X \in \mathcal{L}^1(P)$, wenn die zugrundeliegende W'keiten $P(\cdot)$ nicht aus dem Kontext klar sind).

Beispiel 1.67

1. A ein Ereignis, so ist $\mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot P(I_A = 1) + 0 \cdot P(I_A = 0) = P(A)$.
2. W Augenzahl bei einem fairen Würfelwurf (W ist uniform auf $\{1,2,3,4,5,6\}$), so ist

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

(allgemein: X uniform auf $\{1, 2, \ldots, s\}$ mit $s \in \mathbb{N}$, so ist $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{s} \cdot i = \frac{1}{s} \frac{s(s+1)}{2} = \frac{s+1}{2}$.)

Beispiel 1.67 (Fortsetzung)

3. X habe Werte in $S := \{2,3,4,\dots\} \cup \{-2,-3,-4,\dots\}$ mit Gewichten $P(X=n) = P(X=-n) = \frac{1}{2n(n-1)}$ für $n = 2,3,\dots$
(es ist $\sum_{n=2}^{\infty} 2\frac{1}{2n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$, d.h. dies sind W'gewichte),
dann ist

$$\sum_{x\in S} |x| P(X=x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n(n-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

d.h. X besitzt keinen Erwartungswert.

Beispiel 1.67 (Fortsetzung)

3. Wenn man S durchnummerierte mit $x_{2i} = i + 1$, $x_{2i-1} = -i - 1$, $i \in \mathbb{N}$, so wäre

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} x_j P(X = x_j) = 0$$

(denn $\sum_{j=1}^{2N} x_j P(X = x_j) = 0$).

Beispiel 1.67 (Fortsetzung)

3. Wenn man andererseits S durchnummerierte mit $x_{3i} = -i - 1$, $x_{3i-2} = 2i$, $x_{3i-1} = 2i + 1$, $i \in \mathbb{N}$, so wäre

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j) = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} x_j P(X = x_j) = \frac{1}{2} \log(2) \neq 0$$

(denn $\sum_{j=1}^{3N} x_j P(X = x_j) = \sum_{i=2}^{N} \frac{-i}{2i(i-1)} + \sum_{i=2}^{2N} \frac{i}{2i(i-1)} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{k} \sim -\frac{1}{2} \log(N) + \frac{1}{2} \log(2N) = \frac{1}{2} \log(2)$).

(Wir sehen hier ein Beispiel für die Tatsache aus der Analysis, dass der Wert einer bedingt konvergenten Reihe von der Summationsreihenfolge abhängt.)

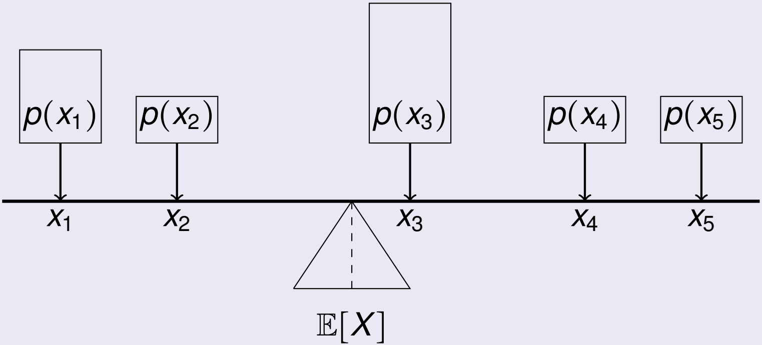
Bemerkung 1.68

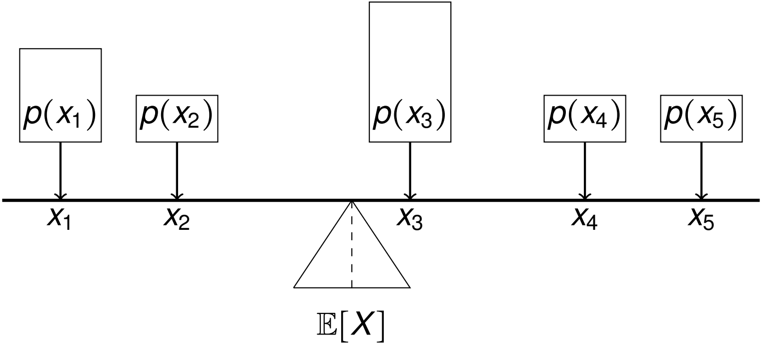
1. Eine beschränkte reellwertige ZV X
(d.h. es gibt eine Konstante $M < \infty$ mit
$P(-M \leq X \leq M) = 1$)
besitzt stets einen Erwartungswert.

(Dies gilt insbesondere, wenn X nur endlich viele mögliche Werte hat.)

Bemerkung 1.68 (Fortsetzung)

2. Wenn X endlich viele mögliche Werte $x_1, \ldots, x_n$ (mit Gewichten $p(x_i) = P(X = x_i)$) hat, so kann man $\mathbb{E}[X]$ als den „Massenschwerpunkt“ interpretieren.





Auf einer Balkenwaage (deren Balken Eigengewicht 0 habe) liege an der Position x_i das Gewicht $p(x_i)$, damit der Balken in Ruhelage ist, muss man in an der Stelle $\sum_{i=1}^n x_i p(x_i) = \mathbb{E}[X]$ unterstützen, denn dann ist das Gesamtdrehmonent (proportional zu)

$$\sum_{i=1}^n p(x_i)(x_i - \mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0.$$

Bemerkung 1.68 (Fortsetzung)

3. Der Erwartungswert von X muss nicht notwendigerweise ein möglicher Wert von X sein

   ($P(X = \mathbb{E}[X]) = 0$ ist durchaus möglich, siehe Bsp. 1.67),

   daher kann man die Interpretation von $\mathbb{E}[X]$ als „typischer Wert von X“ i.A. nicht wörtlich nehmen.

Bemerkung 1.68 (Fortsetzung)

3. Es gilt aber: Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig mit derselben Verteilung wie X, so konvergiert

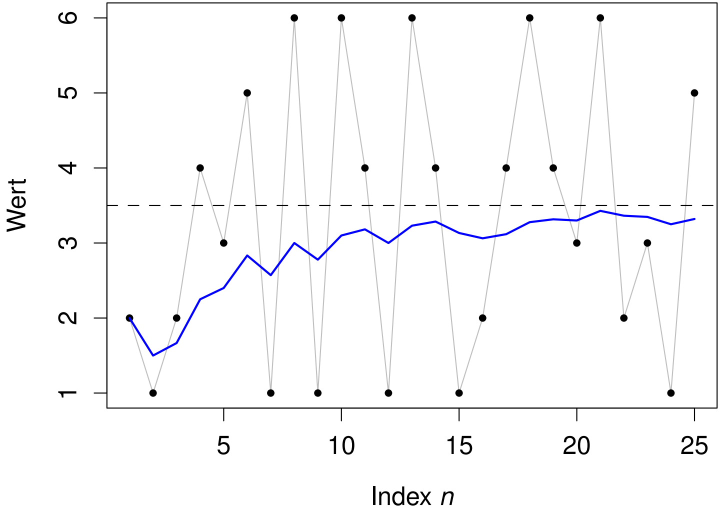
$$M_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X] = \sum_x xP(X = x)$$

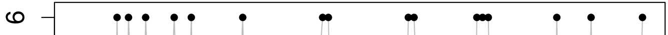
(in geeignetem Sinn), dies ist die Aussage des *Gesetzes der großen Zahlen*, das wir später sehen werden.
Es ist nämlich

$$M_n = \sum_x x \cdot \frac{\#\{i \le n : X_i = x\}}{n}$$

und $\#\{i \le n : X_i = x\}/n \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = x)$.

Illustration: $X_1, X_2, \ldots$ uniform auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
X_n sind jeweils die schwarzen Punkte, M_n die blaue Linie





Bemerkung 1.68 (Fortsetzung)

4. Man kann $\mathbb{E}[X]$ als den erforderlichen Einsatz in einem „fairen Spiel“ interpretieren, bei dem man eine zufällige Auszahlung X erhält.

5. Der Erwartungswert ist eine Eigenschaft der Verteilung: $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(Y)$ impliziert $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.
   (Klar, da dann $P(X = x) = P(Y = x)$ für alle x gilt.)

Beispiel 1.69

1. Sei $X \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}\\ &= np\mathrm{Bin}_{n-1,p}(\{0,1,\dots,n-1\})\\ &= np\end{aligned}$$

Beispiel 1.69 (Fortsetzung)

2. Sei $X \sim \mathrm{Geom}_p$, $p \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} np(1-p)^n = p\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot(1-p)^n \\ &= p\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}(1-p)^n = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = \frac{1}{p} - 1\end{aligned}$$

3. Sei $X \sim \mathrm{Poi}_\alpha$, $\alpha > 0$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!} = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha}\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} = \alpha$$

Satz 1.70 (Rechenregeln für Erwartungswerte)

Seien $X, Y, X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots \in \mathcal{L}^1(P)$*.*

1. (Linearität) Für $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt* $aX + bY \in \mathcal{L}^1(P)$ *und*

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

2. (Monotonie) Wenn $X \geq Y$ *(es genügt* $P(X \geq Y) = 1$*), so gilt* $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$*; insbesondere gilt* $\mathbb{E}[X] \geq 0$ *für* $X \geq 0$*.*

3. $P(X \geq 0) = 1$ *und* $\mathbb{E}[X] = 0 \Rightarrow P(X = 0) = 1$*.*

4. (Faktorisierung für unabhängige Produkte) Wenn X *und* Y *unabhängig sind, so ist* $XY \in \mathcal{L}^1(P)$ *und*

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Beweis.

1. Beachte, dass $aX + bY$ ebenfalls diskret ist, der Wertebereich $\{ax + by : x \in S_X, y \in S_Y\}$ ist abzählbar. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_z |z| P(aX + bY = z) &= \sum_{x,y} \underbrace{|ax + by|}_{\leq |a||x|+|b||y|} P(X = x, Y = y) \\ &\leq |a| \sum_x |x| P(X = x) + |b| \sum_y |y| P(Y = y) < \infty,\end{aligned}$$

d.h. $aX + bY \in \mathcal{L}^1(P)$. Analog ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[aX + bY] &= \sum_{x,y} (ax + by) P(X = x, Y = y) \\ &= a \sum_{x,y} x P(X = x, Y = y) + b \sum_{x,y} y P(X = x, Y = y) \\ &= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

Beweis.

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] = \sum_x xP(X=x) &= \sum_{x,y} x \underbrace{P(X=x, Y=y)}_{=0 \text{ falls } y>x} \\ &\geq \sum_{x,y} yP(X=x, Y=y) \\ &= \sum_y yP(Y=y) = \mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

3. Sei $X \geq 0$. $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\,(\geq 0)} xP(X=x)$ wäre > 0, wenn $P(X=x) > 0$ für ein $x > 0$ gälte. □

Beweis.

4. Beachte, dass XY wiederum diskret ist. Weiter ist

$$\sum_z |z| P(XY = z) = \sum_{x,y \neq 0} |xy| \underbrace{P(X = x, Y = y)}_{= P(X=x)P(Y=y)}$$
$$= \sum_{x \neq 0} |x| P(X = x) \cdot \sum_{y \neq 0} |y| P(Y = y) = \mathbb{E}[|X|]\,\mathbb{E}[|Y|],$$

d.h. $XY \in \mathcal{L}^1(P)$. Analog folgt

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_z zP(XY = z) = \sum_{x,y \neq 0} xyP(X = x, Y = y)$$
$$= \sum_{x \neq 0} xP(X = x) \cdot \sum_{y \neq 0} yP(Y = y)$$
$$= \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

$\square$

Beobachtung 1.71 (Erwartungswerte für Kompositionen)

X (diskrete) reelle ZV, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y := g(X)$.

Dann besitzt Y einen Erwartungswert g.d.w. $\sum_x |g(x)| P(X = x) < \infty$ und in diesem Fall ist

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_x g(x) P(X = x).$$

(Schreibe $\sum_y y P(Y = y) = \sum_y \sum_{x : g(x) = y} g(x) P(X = x) = \sum_x g(x) P(X = x)$.)

Beispiel 1.72

1. Seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v., $\sim \mathrm{Ber}_p$, so ist $X := X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$ und

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = np.$$

(Wir hatten den Erwartungswert einer binomialverteilten ZV bereits in Bsp. 1.69, 2. bestimmt, hier kommen wir allerdings ohne explizite Rechnung aus.)

Beispiel 1.72 (Fortsetzung)

2. Sei $X \sim \mathrm{Hyp}_{s,w,k}$ hypergeometrisch verteilt,
($P(X = \ell) = \frac{\binom{s}{\ell}\binom{w}{k-\ell}}{\binom{s+w}{k}}$, dies war Bsp. 1.17)

Denken wir an eine Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln, aus der k mal ohne Zurücklegen gezogen wird, so ist

$$X \overset{d}{=} \mathbf{1}_{A_1} + \cdots + \mathbf{1}_{A_k} \quad \text{mit } A_i = \{i\text{-te gezogene Kugel ist schwarz}\}$$

und $P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_k) = \dfrac{s}{s+w}$, also
$\mathbb{E}[X] = k \cdot \dfrac{s}{s+w}$.

Definition 1.73

Sei X reellwertige ZV mit Dichte f_X, dann besitzt X einen Erwartungswert (auch $X \in \mathcal{L}^1$ geschrieben), wenn gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx < \infty$ und man setzt dann

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx.$$

Beispiel 1.74

1. $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$ hat $\mathbb{E}[X] = 0$, denn aus der Symmetrie der Dichte folgt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2}\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2/2}\, dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2/2}\, dx = 0$$

(strenggenommen muss man auch prüfen, dass $(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2/2}\, dx = (2/\pi)^{1/2} \int_0^\infty x e^{-x^2/2}\, dx = (2/\pi)^{1/2} \big[-e^{-x^2/2} \big]_0^\infty = (\pi/2)^{-1/2} < \infty$)

Somit gilt auch: $Y \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ hat $\mathbb{E}[Y] = \mu$, denn $\sigma X + \mu =^d Y$ nach Bsp. 1.32.

Beispiel 1.74 (Fortsetzung)

2. $X \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ hat $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$, denn

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \big[x(-e^{-\lambda x})\big]_0^\infty - \int_0^\infty 1\cdot(-e^{-\lambda x})\,dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

3. Die Cauchy-Verteilung mit Dichte $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ besitzt keinen Erwartungswert:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi}\frac{|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \Big[\frac{1}{\pi}\log\big(1+x^2\big)\Big]_0^\infty = \infty.$$

Bericht 1.75

1. Man kann prinzipiell den Fall mit Dichte aus dem diskreten Fall herleiten: X habe Dichte f_X, so nimmt $X_{(n)} = \frac{1}{n}\lfloor nX \rfloor$ den Wert $\frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$ an mit

$$P\Big(X_{(n)} = \frac{k}{n}\Big) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f_X(x)\,dx,$$

also ist (sofern die Reihe absolut konvergiert, was man analog überprüft)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[X_{(n)}\big] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor f_X(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\end{aligned}$$

Bericht 1.75

2. (Analogon zu Beob. 1.71 im Fall mit Dichte)

Sei $X = (X_1, \dots, X_d)$ $\mathbb{R}^d$-wertig mit Dichte $f_X : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $Y := g(X)$. Dann gilt $Y \in \mathcal{L}^1$ g.d.w.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x_1, \dots, x_d)| f_X(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d < \infty$$

und in diesem Fall

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, \dots, x_d) f_X(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d < \infty.$$

3. Die Rechenregeln aus Satz 1.70 gelten auch im Fall mit Dichte.

(Siehe z.B. das Buch von Georgii)

Für eine reellwertige Zufallsvariable X heißt $\mathbb{E}[X^2]$ das *2. Moment von X* (allgemein heißt $\mathbb{E}[X^p]$ das p-te Moment).

Man sagt, dass X ein 2. Moment besitzt, wenn $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ gilt und schreibt dies auch als $X \in \mathcal{L}^2$ (bzw. $X \in \mathcal{L}^2(P)$, wenn die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeiten $P(\cdot)$ nicht aus dem Kontext klar sind).

Definition 1.76

Für $X, Y \in \mathcal{L}^2$ heißt

1. $\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}\big[X^2\big] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$ die *Varianz* von X
   (manchmal schreibt man auch $\sigma_X^2 := \mathrm{Var}[X]$),
   $\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ die *Standardabweichung* (oder *Streuung*) von X
   (manchmal auch $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ geschrieben),
2. $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X, Y] &:= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\big] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$
   die *Kovarianz* von X und Y.

X und Y heißen *unkorreliert*, wenn $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

Die Standardabweichung σ_X ist – neben dem Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ – eine weitere wichtige Kenngröße der Verteilung einer Zufallsvariable X, sie gibt eine Antwort auf die – etwas salopp formulierte – Frage

„Wie sehr weicht X typischerweise von $\mathbb{E}[X]$ ab?“

Einen Hinweis dazu gibt die Chebyshev-Ungleichung $\rightsquigarrow$ (nächste Folie)

Satz 1.77

Sei X reelle ZV, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton wachsend.

1. *Für $a > 0$ mit $f(a) > 0$ gilt*

$$P\big(|X| \geq a\big) \leq \frac{1}{f(a)}\mathbb{E}\big[f(|X|)\big] \qquad \text{(Markov}^1\text{-Ungleichung).} \tag{1}$$

2. *Für $X \in \mathcal{L}^2$ gilt*

$$P\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\big) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{a^2} \qquad \text{(Chebyshev}^2\text{-Ungleichung).} \tag{2}$$

[2] Andrei Andrejewich Markov, 1856–1922.

[2] Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821–1894.

1. $P\big(|X| \geq a\big) \leq \dfrac{1}{f(a)}\mathbb{E}\big[f(|X|)\big]$

2. $P\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\big) \leq \dfrac{\mathrm{Var}[X]}{a^2}$

Beweis.

1. Sei $Y := f(a) I_{\{|X| \geq a\}}$, so ist $Y \leq f(|X|)$ und

$$\mathbb{E}[Y] = f(a)P\big(|X| \geq a\big) \leq \mathbb{E}\big[f(|X|)\big]$$

nach Satz 1.70, 2.

2. Wende *1.* an auf $\widetilde{X} := X - \mathbb{E}[X]$ und $f(a) = a^2$. □

Insbesondere (wähle $a = b\sigma_X$ in (2)):
Die W'keit $P\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq b\sigma_X\big)$, dass X von $\mathbb{E}[X]$ um mehr als das b-fache von σ_X abweicht, ist höchstens $1/b^2$.

Beobachtung 1.78

1. *Wegen $|XY| \leq X^2 + Y^2$ ist die Kovarianz wohldefiniert. Es gilt (offensichtlich)*

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{Cov}[Y, X].$$

2. *Es ist*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\big] \\
&= \mathbb{E}\big[XY - X\mathbb{E}[Y] - Y\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\big] \\
&= \mathbb{E}[YX] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

(und analog für $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Cov}[X, X]$).

Beobachtung 1.78 (Fortsetzung)

3. $\mathrm{Var}[X] = 0 \iff P\big(X = \mathbb{E}[X]\big) = 1$
   („⇐“ ist klar, für „⇒“ wende Satz 1.70, 3. an auf die ZV $(X - \mathbb{E}[X])^2$)

4. $\mathrm{Var}[X]$ *ist eine Eigenschaft der Verteilung von* X*,* $\mathrm{Cov}[X, Y]$ *ist eine Eigenschaft der gemeinsamen Verteilung von* X *und* Y*.*

Beispiel 1.79

1. $X \sim \mathrm{Ber}_p$, $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$.
2. $X \sim \mathrm{Poi}_\alpha$,

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!} = \alpha^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\alpha}\frac{\alpha^{k-2}}{(k-2)!} = \alpha^2,$$

also

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 = \mathbb{E}\left[X(X-1)\right] + \mathbb{E}[X] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha\end{aligned}$$

Beispiel 1.79 (Fortsetzung)

3. $X \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}\\ &= n(n-1)p^2\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}\big[X(X-1)\big] + \mathbb{E}[X] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2\\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np\\ &= np(1-p)\end{aligned}$$

Beispiel 1.79 (Fortsetzung)

4. $X \sim \mathrm{Geom}_p$, $p \in [0,1]$ (wir hatten gesehen, dass $\mathbb{E}[X] = (1-p)/p$, siehe Bsp. 1.69, 2)

Es ist

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p(1-p)^n$$
$$= p(1-p)^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p(1-p)^{n-2} = 2\frac{(1-p)^2}{p^2}$$

(verwende, dass $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ (für $|t| < 1$) erfüllt $\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \frac{2}{(1-t)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)t^{n-2}$), somit

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]\big(1 - \mathbb{E}[X]\big)$$
$$= 2\frac{(1-p)^2}{p^2} - \frac{1-p}{p} \cdot \frac{2p-1}{p} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Beispiel 1.79 (Fortsetzung)

5. $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ hat $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$ (wir hatten in Bsp. 1.74 bereits gesehen, dass $\mathbb{E}[X] = \mu$):

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\big[(X-\mu)^2\big] = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sigma^2 z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{z^2 e^{-z^2/2}}_{=z\left(-\frac{d}{dz}e^{-z^2/2}\right)} dz$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \Bigg(\Big[z\Big(-\frac{d}{dz} e^{-z^2/2}\Big)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-z^2/2}\,dz \Bigg)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \big(0 + \sqrt{2\pi}\big) = \sigma^2$$

(Wir haben Bericht 1.75, 2. verwendet, dann im Integral $z = (x - \mu/\sigma)$ substituiert und partiell integriert.)

Satz 1.80 (Rechenregeln für Varianz und Kovarianz)

Seien $X, Y, X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{L}^2$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. $aX + b, cY + d \in \mathcal{L}^2$ und

$$\mathrm{Cov}[aX + b, cY + d] = ac\mathrm{Cov}[X, Y],$$

insbesondere $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2\mathrm{Var}[X]$ (die Kovarianz ist eine Bilinearform, die Varianz ein quadratisches Funktional).

2. $$\mathrm{Var}\Big[\sum_{i=1}^n X_i\Big] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}} \mathrm{Cov}[X_i, X_j],$$

insbesondere gilt für paarweise unkorrelierte $X_1, \dots, X_n$ also $\mathrm{Var}\Big[\sum_{i=1}^n X_i\Big] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i]$.

Satz 1.80 (Rechenregeln für Varianz und Kovarianz, 2)

3. Sind X und Y unabhängig, so gilt $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

4. Es gilt

$$\left|\mathrm{Cov}[X, Y]\right| \leq \sqrt{\mathrm{Var}[X]}\,\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}$$

(die Cauchy-Schwarz-Ungleichung[3]*)*

[3] nach Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) und Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)

Beweis.

1. Es ist

$$\mathrm{Cov}[aX + b, cY + d] = \mathrm{Cov}[aX, cY]$$

(denn $\mathbb{E}[aX + b] = \mathbb{E}[aX] + b$ und $\mathbb{E}[cY + d] = \mathbb{E}[cY] + d$)

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[aX\,cY] - \mathbb{E}[aX]\,\mathbb{E}[cY] \\ &= ac\big(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]\big) \\ &= ac\mathrm{Cov}[X, Y]. \end{aligned}$$

□

Beweis.

2. Dies folgt etwa per Induktion über n aus 1., oder direkt folgendermaßen:

Sei o.E. $\mathbb{E}[X_1] = \cdots = \mathbb{E}[X_n] = 0$ (sonst ziehe jeweils die Erwartungswerte ab, verwende 1.), dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\Big[\sum_{i=1}^n X_i\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big)^2\Big] = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}[X_i X_j] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i \neq j}^n \mathbb{E}[X_i X_j] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{i \neq j}^n \mathrm{Cov}[X_i, X_j]
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis.

3. Klar: für X und Y unabhängig ist $\mathbb{E}[X\,Y] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ nach Satz 1.70, 4, also
$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[X\,Y] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0$

4. Falls $\mathrm{Var}[Y] = 0$, so ist die Ungleichung
$\big|\mathrm{Cov}[X,Y]\big| \le \sqrt{\mathrm{Var}[X]}\,\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}$ (als $0 \le 0$) erfüllt

(denn dann ist $P(Y - \mathbb{E}[Y] = 0) = 1$ nach Beob. 1.78, 3. und somit auch $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$).

Falls $\mathrm{Var}[Y] > 0$, setze $\alpha := -\dfrac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[Y]}$, es ist

$$\begin{aligned}
0 &\le \mathrm{Var}[X+\alpha Y]\,\mathrm{Var}[Y] \\
&\stackrel{1.}{=} \big(\mathrm{Var}[X] + 2\alpha\mathrm{Cov}[X,Y] + \alpha^2\mathrm{Var}[Y]\big)\mathrm{Var}[Y] \\
&= \mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y] - \big(\mathrm{Cov}[X,Y]\big)^2.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.81

Es gilt Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung g.d.w.

> es gibt $a, b, c \in \mathbb{R}$ (mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$), so dass
> $$P\big(aX + bY + c = 0\big) = 1.$$

In diesem Fall heißen X und Y *perfekt korreliert*.

(Denn wir sehen aus dem Beweis, dass Gleichheit genau dann eintritt, wenn $\mathrm{Var}[Y] = 0$ oder $\mathrm{Var}[X + \alpha Y] = 0$.)

Beispiel 1.82

1. $X \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$, schreibe $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ mit Y_i u.i.v. $\sim \mathrm{Ber}_p$, so ist (mit Satz 1.80, 2.)

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[Y_i] = n\mathrm{Var}[Y_1] = np(1-p)$$

(vgl. auch Bsp. 1.79, 3.).

Beispiel 1.82 (Fortsetzung)

2. $X \sim \mathrm{Hyp}_{s,w,n}$, stelle dar als $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ mit $Y_i = \mathbf{1}_{A_i}$, $A_i = \{i\text{-te gezogene Kugel ist schwarz}\}$
(bei n-fachem Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln)

   Erinnerung: Für $y_1, \dots, y_n \in \{0, 1\}$ mit $y_1 + \cdots + y_n = k$ gilt

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1) \cdot w(w-1)\cdots(w-n+k+1)}{(s+w)(s+w-1)(s+w-2)\cdots(s+w-n+1)},$$

   was nicht von der Reihenfolge abhängt – die Y_i sind „austauschbar".

Beispiel 1.82 (Fortsetzung)

2. Es ist $\mathbb{E}[\,Y_i\,] = P(A_i) = P(A_1) = \dfrac{s}{s+w} =: p$, $\mathrm{Var}[\,Y_i\,] = p(1-p)$; für $i \neq j$ ist

$$\mathbb{E}[\,Y_i\,Y_j\,] = \mathbb{E}[\,Y_1\,Y_2\,] = P(A_1 \cap A_2) = \frac{s}{s+w}\,\frac{s-1}{s+w-1},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[\,Y_i, Y_j\,] &= \mathbb{E}[\,Y_i\,Y_j\,] - \mathbb{E}[\,Y_i\,]\,\mathbb{E}[\,Y_j\,] \\ &= \frac{s}{s+w}\,\frac{s-1}{s+w-1} - \Big(\frac{s}{s+w}\Big)^2 \\ &= \frac{s}{s+w}\Big(\underbrace{\frac{s-1}{s+w-1} - \frac{s}{s+w}}_{=-\frac{w}{s+w}\,\frac{1}{s+w-1}}\Big) \\ &= -p(1-p)\,\frac{1}{s+w-1},\end{aligned}$$

Beispiel 1.82 (Fortsetzung)

2. $X = Y_1 + \cdots + Y_n \sim \mathrm{Hyp}_{s,w,n}$
   mit $Y_i = \mathbf{1}_{A_i}$, $A_i = \{i\text{-te gezogene Kugel ist schwarz}\}$
   Also (mit $p = s/(s+w)$)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[Y_i] + \sum_{i \neq j}^{n} \mathrm{Cov}[Y_i, Y_j] \\ &= np(1-p) - n(n-1)\Big(-p(1-p)\frac{1}{s+w-1}\Big) \\ &= np(1-p)\Big(1 - \frac{n-1}{s+w-1}\Big)\end{aligned}$$

   Wir sehen: Die Varianz ist kleiner im Fall ohne Zurücklegen als im Fall mit Zurücklegen – insbes. ist sie natürlich $= 0$ im Fall $n = s + w$.

Beispiel 1.82 (Fortsetzung)

3. Z reelle ZV mit $\mathbb{E}\big[|Z|^3\big] < \infty$ und *symmetrischer* Verteilung, d.h. es gilt $P(Z > z) = P(Z < -z)$ für alle $z \geq 0$ (z.B. $Z \sim \mathcal{N}_{0,1}$), setze

$$Y := Z^2,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[Y, Z] &= \mathbb{E}[Z^2 Z] - \mathbb{E}[Z^2]\mathbb{E}[Z] \\ &= \mathbb{E}[Z^3] - \mathbb{E}[Z^2]\mathbb{E}[Z] = 0 - \mathbb{E}[Z^2] \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Z und Y sind also unkorreliert, aber i.A. *nicht* unabhängig.

Definition 1.83

Seien $X, Y \in \mathcal{L}^2$.

$$\kappa_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]}} \in [-1, 1]$$

heißt *Korrelationskoeffizient* von X und Y (manche Autoren schreiben auch $\rho_{X,Y}$).

(Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 1.80, 4.) zeigt, dass $|\kappa_{X,Y}| \leq 1$.)

Beobachtung 1.84 (Interpretation des Korrelationskoeffizienten via „beste lineare Vorhersage“)

Es ist

$$\begin{aligned}&\min_{\beta_0,\beta_1\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[(Y-\beta_1 X-\beta_0)^2\big]\\ &\quad = (1-\kappa_{X,Y}^2)\min_{\beta_0\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[(Y-\beta_0)^2\big] \quad \Big(=(1-\kappa_{X,Y}^2)\mathrm{Var}[Y]\Big),\end{aligned}$$

Denn

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(Y-\beta_1 X-\beta_0)^2\big]\\
&= \mathrm{Var}[Y-\beta_1 X-\beta_0] + \big(\mathbb{E}[Y]-\beta_1\mathbb{E}[X]-\beta_0\big)^2\\
&= \mathrm{Var}[Y] - 2\beta_1\mathrm{Cov}[X,Y] + \beta_1^2\mathrm{Var}[X] + \big(\mathbb{E}[Y]-\beta_1\mathbb{E}[X]-\beta_0\big)^2\\
&= \sigma_Y^2 - 2\beta_1\sigma_X\sigma_Y\kappa_{X,Y} + \beta_1^2\sigma_X^2 + \big(\mathbb{E}[Y]-\beta_1\mathbb{E}[X]-\beta_0\big)^2\\
&= \sigma_Y^2\big(1-\kappa_{X,Y}^2\big) + \sigma_X^2\Big(\beta_1-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\kappa_{X,Y}\Big)^2 + \big(\mathbb{E}[Y]-\beta_1\mathbb{E}[X]-\beta_0\big)^2
\end{aligned}
$$

was offensichtlich minimal wird für die Wahl

$$
\beta_1 = \beta_1^* := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\kappa_{X,Y}, \qquad \beta_0 = \beta_0^* := \mathbb{E}[Y] - \beta_1^*\mathbb{E}[X]
$$

und dann den Wert $(1-\kappa_{X,Y}^2)\sigma_Y^2$ hat.

Für den Zusatz beachte analog:

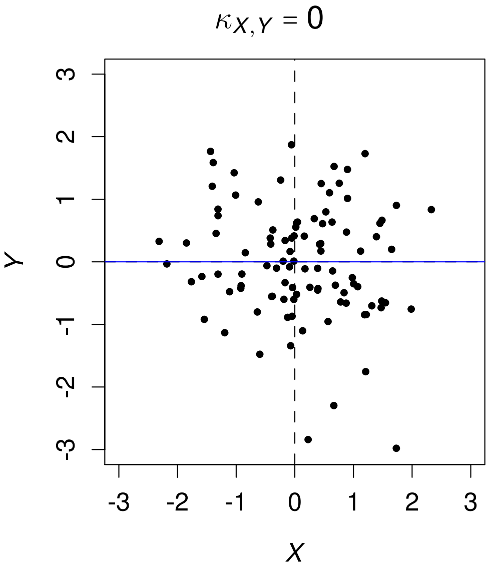
$$\mathbb{E}\big[(Y-\beta_0)^2\big] = \mathbb{E}[Y^2] - 2\beta\mathbb{E}[Y] + \beta^2 = \mathrm{Var}[Y] + \big(\beta - \mathbb{E}[Y]\big)^2$$

ist minimal für die Wahl $\beta = \mathbb{E}[Y]$.

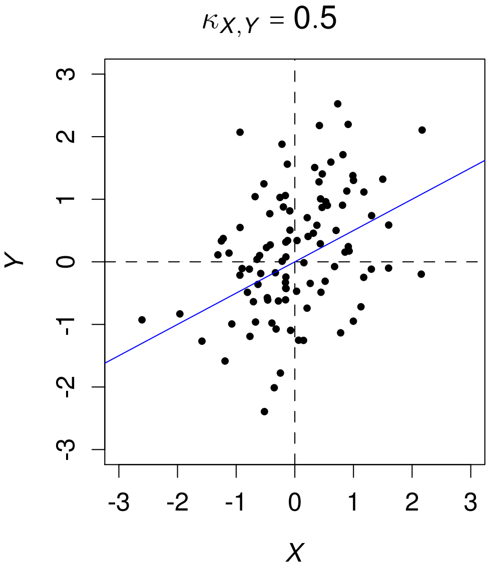
Im Sinne einer möglichst kleinen quadratischen Abweichung ist $\mathbb{E}[Y]$ die beste konstante „Vorhersage" von Y. Man kann demnach um einen Faktor $(1-\kappa_{X,Y}^2)$ besser vorhersagen, wenn man stattdessen eine affin-lineare Funktion von X verwenden darf.

Die folgenden Scatterplots zeigen jeweils 100 simulierte Paare (X, Y), wobei $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ und $\kappa_{X,Y}$ den angegebenen Wert hat.

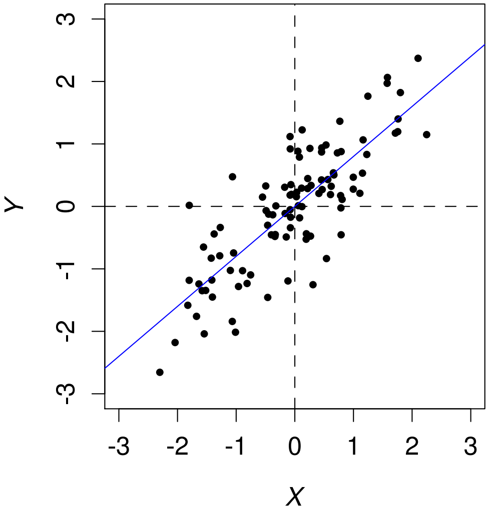
(Blau eingezeichnet ist die „Vorhersagegerade" $x \mapsto \beta_1^* x + \beta_0^*$.)

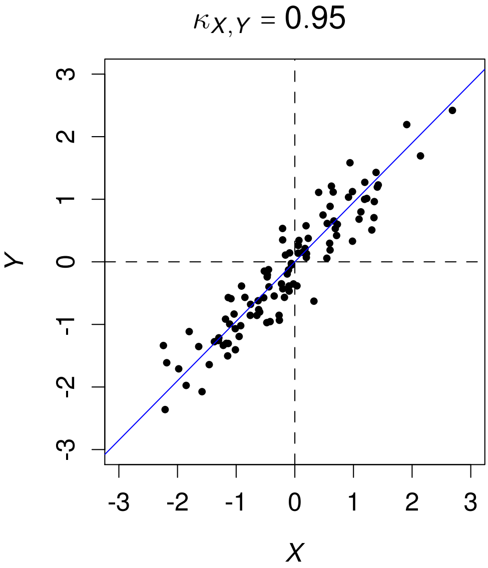


$\kappa_{X,Y} = 0$
3
2
1
0
-1
-2
-3
Y
-3
-2
-1
0
1
2
3
X

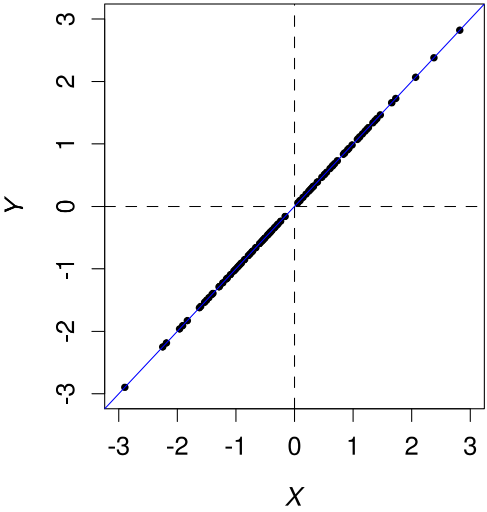

$\kappa_{X,Y} = 0.5$
Y
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
X

$\kappa_{X,Y} = 0.8$

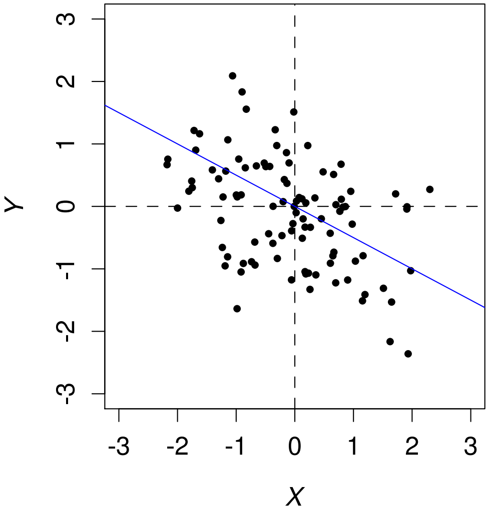



$\kappa_{X,Y} = 0.95$
Y
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
X

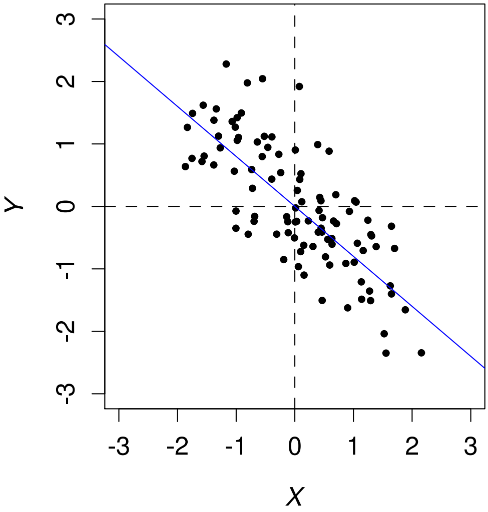
$\kappa_{X,Y} = 1$



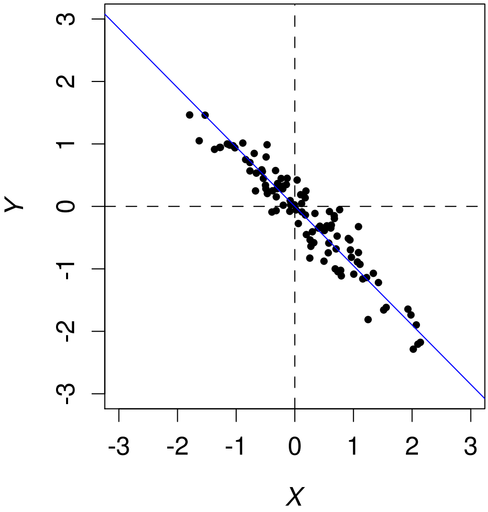
$$\kappa_{X,Y} = -0.5$$



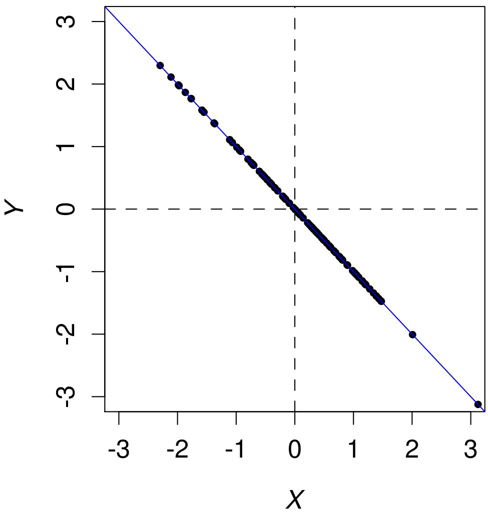
$\kappa_{X,Y} = -0.8$



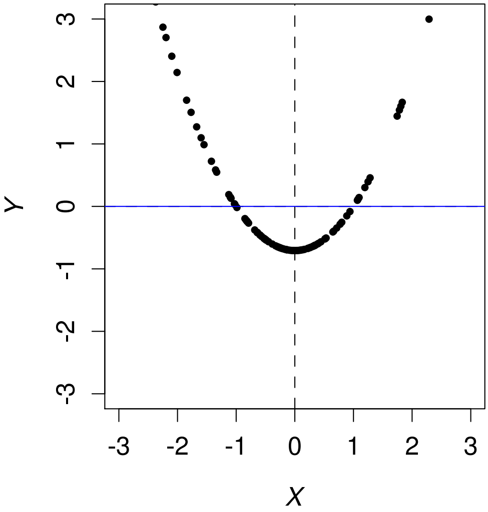
$$\kappa_{X,Y} = -0.95$$



$\kappa_{X,Y} = -1$



$\kappa_{X,Y} = 0$



Demnach (vgl. auch Bem. 1.81)

$|\kappa_{X,Y}| = 1 \quad \leftrightarrow$ perfekter linearer Zusammenhang zwischen X und Y

$\kappa_{X,Y} = 1 \quad \leftrightarrow$ perfekter linearer Zusammenhang zwischen X und Y mit positivem Koeffizienten (X größer als $\mathbb{E}[X] \iff Y$ größer als $\mathbb{E}[Y]$)

$\kappa_{X,Y} = -1 \quad \leftrightarrow$ perfekter linearer Zusammenhang zwischen X und Y mit negativem Koeffizienten (X größer als $\mathbb{E}[X] \iff Y$ kleiner als $\mathbb{E}[Y]$)

Nicht-lineare Zusammenhänge erfasst der Korrelationskoeffizient möglicherweise nicht korrekt (oder gar nicht), vgl. Bsp. 1.82, 3.