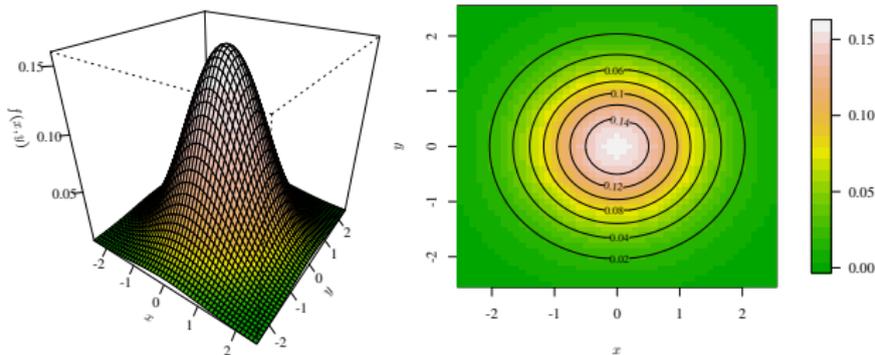


Beispiel 1.57 (Forts.)

4. $X = (X_1, \dots, X_d)$ d -dimensional Standard-normalverteilt, so sind X_1, \dots, X_d unabhängig und jeweils $\sim \mathcal{N}_{0,1}$ (d.h. die X_i sind [1-dimensional] Standard-normalverteilt)



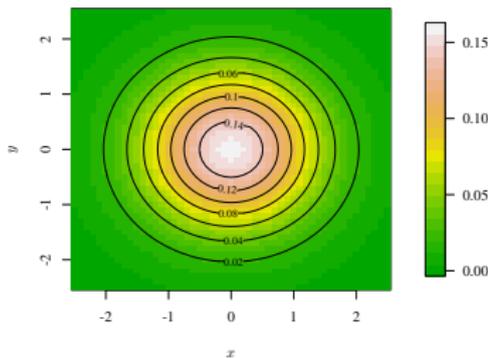
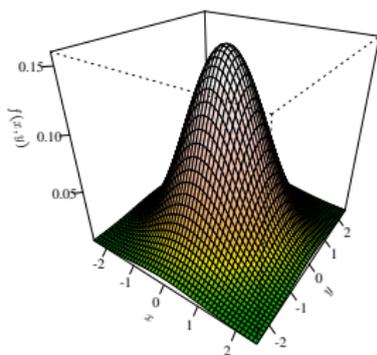
Beispiel 1.57 (Forts.)

4. $X = (X_1, \dots, X_d)$ d -dimensional Standard-normalverteilt, so sind X_1, \dots, X_d unabhängig und jeweils $\sim \mathcal{N}_{0,1}$

(d.h. die X_i sind [1-dimensional] Standard-normalverteilt),

denn $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, dann ist $\|(x_1, \dots, x_d)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$

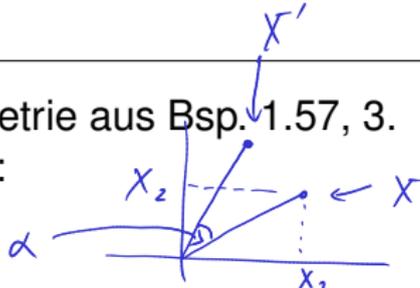
$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_d^2)\right) = \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-x_i^2/2}\right)$$



Die Beobachtung zur Rotationssymmetrie aus Bsp. 1.57, 3. verallgemeinert sich folgendermaßen:

Beobachtung 1.58

$$= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$



$X = (X_1, X_2)^T$ habe eine rotationssymmetrische Dichte f_X , d.h. $f_X(x_1, x_2)$ hängt nur von $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ab (also $f_X(x_1, x_2) = g(r)$ für eine gewisse Funktion $g \geq 0$), $X' = (X'_1, X'_2)^T$ entstehe aus X durch Drehung (um Winkel α um den Ursprung), d.h.

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)X_1 - \sin(\alpha)X_2 \\ \sin(\alpha)X_1 + \cos(\alpha)X_2 \end{pmatrix}.$$

Dann hat X' dieselbe Dichte (und somit dieselbe Verteilung) wie X .

(Dies ist anschaulich sehr plausibel, man kann es z.B. mit Bericht 1.59 [unten] beweisen.)

Beobachtung 1.58 (Forts.)

$X = (X_1, X_2)^T$ habe eine rotationssymmetrische Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$$

Sei (R, W) die Polarkoordinatendarstellung von X (wie in Bsp. 1.57, 3., insbes. $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$)

Beobachtung 1.58 (Forts.)

$X = (X_1, X_2)^T$ habe eine rotationssymmetrische Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$$

Sei (R, W) die Polarkoordinatendarstellung von X (wie in Bsp. 1.57, 3., insbes. $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$), so sind R und W unabhängig, W ist uniform verteilt auf $[-\pi, \pi)$

und R hat Dichte $2\pi r g(r) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(r)$

Beobachtung 1.58 (Forts.)

$X = (X_1, X_2)^T$ habe eine rotationssymmetrische Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$$

Sei (R, W) die Polarkoordinatendarstellung von X (wie in Bsp. 1.57, 3., insbes. $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$), so sind R und W unabhängig, W ist uniform verteilt auf $[-\pi, \pi)$

und R hat Dichte $2\pi r g(r) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(r)$:

$$\begin{aligned} P(R \leq u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{[0, u]}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^u g(r) r dr dw = \int_0^u 2\pi r g(r) dr \end{aligned}$$

(wir verwenden hier etwas salopp die „Polarkoordinatenform des Flächenelements“ $dx_1 dx_2 = r dr dw$, man kann dies wiederum mit Bericht 1.59 [unten] beweisen.)

Speziell für X_1, X_2 unabhängig, $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, somit $X = (X_1, X_2)$
2-dim. Standard-normalverteilt, ergibt sich (für $u > 0$):

$$\begin{aligned} P(R^2 \leq u) &= P(R \leq \sqrt{u}) = \int_0^{\sqrt{u}} 2\pi r \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} dr \\ &= \left[-e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{u}} = 1 - e^{-u/2} \end{aligned}$$

Speziell für X_1, X_2 unabhängig, $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, somit $X = (X_1, X_2)$
2-dim. Standard-normalverteilt, ergibt sich (für $u > 0$):

$$\begin{aligned} P(R^2 \leq u) &= P(R \leq \sqrt{u}) = \int_0^{\sqrt{u}} 2\pi r \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} dr \\ &= \left[-e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{u}} = 1 - e^{-u/2} \end{aligned}$$

d.h. $R^2 \sim \text{Exp}_{1/2}$.

Speziell für X_1, X_2 unabhängig, $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, somit $X = (X_1, X_2)$
2-dim. Standard-normalverteilt, ergibt sich (für $u > 0$):

$$\begin{aligned} P(R^2 \leq u) &= P(R \leq \sqrt{u}) = \int_0^{\sqrt{u}} 2\pi r \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} dr \\ &= \left[-e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{u}} = 1 - e^{-u/2} \end{aligned}$$

d.h. $R^2 \sim \text{Exp}_{1/2}$.

Dies ist der theoretische Hintergrund der *Box-Muller-Methode*
zur Simulation normalverteilter ZVn.



Allgemeine Dichtetransformation im \mathbb{R}^d

Bericht 1.59 (Allgemeine Dichtetransformation im \mathbb{R}^d)

X \mathbb{R}^d -wertige ZV mit Dichte f_X , $I \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $P(X \in I) = 1$,
 $J \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi: I \rightarrow J$ bijektiv, stetig differenzierbar mit
Ableitung

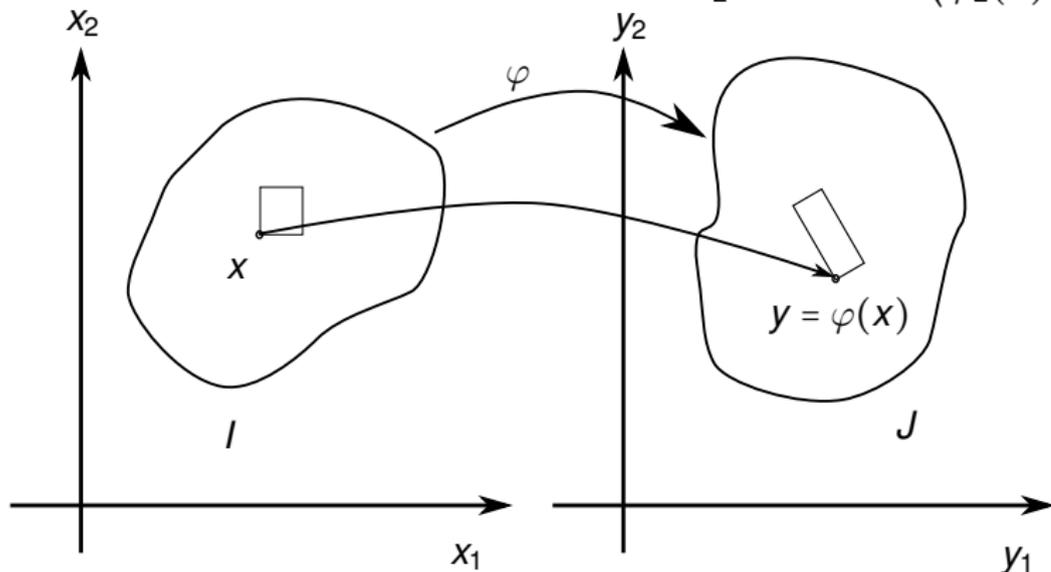
$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_d(x))^T$$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1}^d \quad (\text{„Jacobi-Matrix“})$$

(wobei $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x))^T$, d.h. φ_i ist die i -te
Koordinatenfunktion von φ), dann hat $Y := \varphi(X)$ die Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\det \varphi'(\varphi^{-1}(y))|}, & y \in J, \\ 0, & y \notin J. \end{cases}$$

Heuristik (im Fall $d = 2$): Lokal sieht $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$

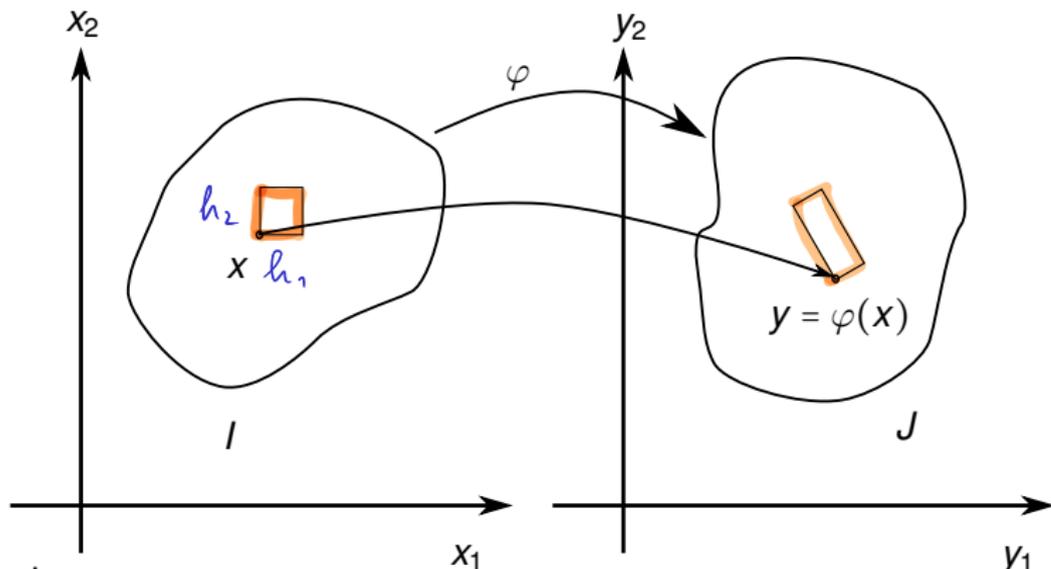


„aus wie“ $\varphi(x') \approx \varphi(x) + \varphi'(x) \cdot (x' - x)$

$$= \varphi(x) + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_1(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_1(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_2(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 - x_1 \\ x'_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

(plus Terme, die $O(\|x' - x\|^2)$ sind)

Heuristik (im Fall $d = 2$): Lokal sieht $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$

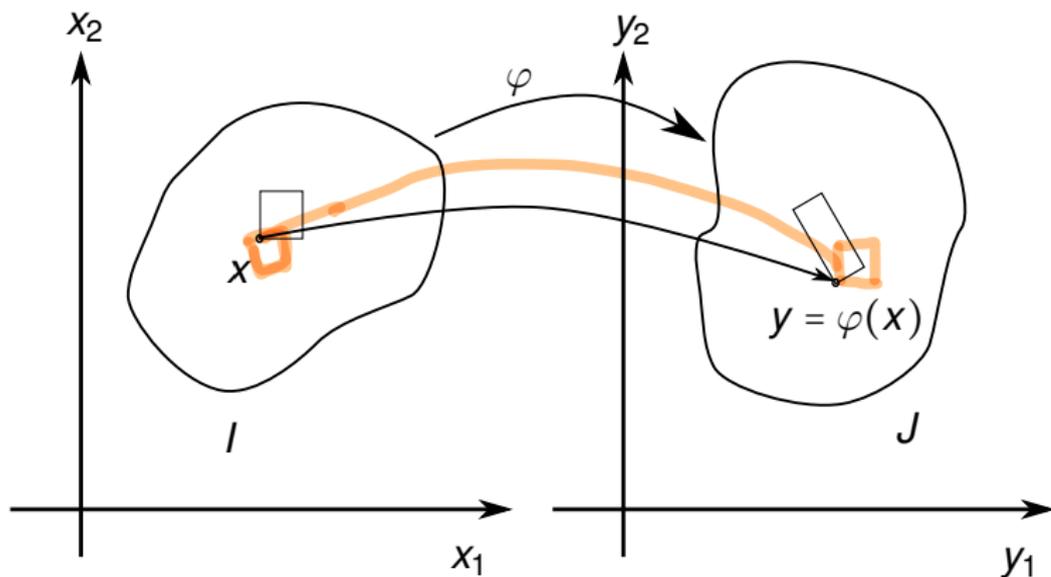


also:

die Fläche der Größe $h_1 \cdot h_2$ „rund um x “

wird auf

\approx Fläche $h_1 \cdot h_2 \cdot |\det \varphi'(x)|$ „rund um y “ abgebildet.



Wenden wir dies auf $Y = \varphi(X)$ an, so bedeutet das anschaulich:

Für $y = \varphi(x) \in J$ (und sehr kleines $h > 0$) ist

$$\begin{aligned} f_Y(y)h^2 &\approx \mathbb{P}(Y \text{ nimmt Wert in Quadrat der Fläche } h^2 \text{ mit „Aufpunkt“ } y \text{ an}) \\ &\approx \mathbb{P}(X \text{ nimmt Wert in Quader d. Fl. } h^2/|\det \varphi'(x)| \text{ mit „Aufpkt.“ } x \text{ an}) \\ &\approx f_X(x) \frac{h^2}{|\det \varphi'(x)|} = \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\det \varphi'(\varphi^{-1}(y))|} h^2. \end{aligned}$$



d -dimensionale Verteilungsfunktionen

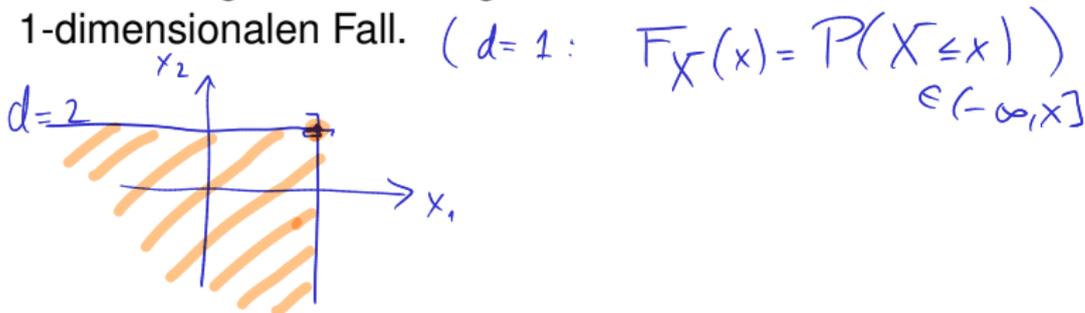
Nur der Vollständigkeit halber, wir werden dies im Verlauf der Vorlesung nicht benötigen:

Bericht 1.60

Analog betrachtet zu Def. 1.26 betrachtet man im Fall $d > 1$ für $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ gelegentlich die d -dimensionale Verteilungsfunktion

$$\underline{F_X(x_1, x_2, \dots, x_d)} := P(X \in (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_d]),$$

die allerdings etwas weniger „handlich“ ist als im 1-dimensionalen Fall.



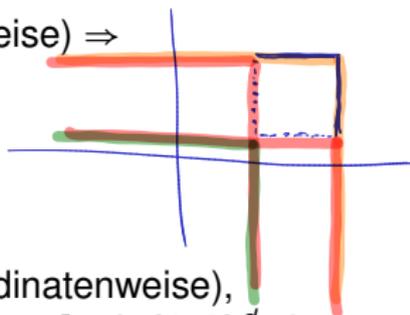
Bericht 1.60 (Forts.)

Analog zu Bem. 1.27, 3. „weiß“ die d -dimensionale Verteilungsfunktion von X „alles“ über die Verteilung von X .

Eigenschaften:

1. F_X rechtsstetig, d.h. $x_n \searrow x$ (koordinatenweise) $\Rightarrow F_X(x_n) \rightarrow F(x)$
2. $F_X(x_n) \rightarrow 1$ wenn $x_n \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)$
3. $F_X(x_n) \rightarrow 0$ wenn $\min_{i=1, \dots, d} x_{n,i} \rightarrow -\infty$
4. Für $x = (x_1, \dots, x_d) < y = (y_1, \dots, y_d)$ (koordinatenweise), parametrisiere die Ecken des d -Quaders $(x, y]$ mit $\{1, 2\}^d$ via $\{u = (z_1^{(i_1)}, \dots, z_d^{(i_d)}) : i_1, \dots, i_d \in \{1, 2\}\}$ wo $z_j^{(1)} = x_j, z_j^{(2)} = y_j$, es muss gelten

zu 4.



$$\sum_{u \text{ Ecken}} (-1)^{\#\{1 \leq m \leq d : i_m = 1\}} F_X(u) \left(= \mu_F((x, y]) \right) \geq 0$$

Faltung

Definition 1.61

X und Y unabhängige reellwertige ZVn, $X \sim \mu$, $Y \sim \nu$ (definiert auf demselben W'raum).

Die Verteilung von $X + Y$ heißt die *Faltung* von μ und ν , geschrieben $\mu * \nu$:

$$(\mu * \nu)(B) = P(X + Y \in B), \quad B \subset \mathbb{R}$$

Faltung

Definition 1.61

X und Y unabhängige reellwertige ZVn, $X \sim \mu$, $Y \sim \nu$ (definiert auf demselben W'raum).

Die Verteilung von $X + Y$ heißt die *Faltung* von μ und ν , geschrieben $\mu * \nu$:

$$(\mu * \nu)(B) = P(X + Y \in B), \quad B \subset \mathbb{R}$$

Bemerkung. $\mu * \nu = \nu * \mu$ (denn $X + Y = Y + X$).

Beobachtung 1.62 (Diskreter Fall)

Falls $\mu(\mathbb{Z}) = \nu(\mathbb{Z}) = 1$ (d.h. X und Y haben Werte in \mathbb{Z}), so ist

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(\{k\}) &= P(X + Y = k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} P(X = m, Y = k - m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mu(\{m\})\nu(\{k - m\}).\end{aligned}$$

Im allg. diskreten Fall $P(X \in \{x_i, i \in \mathbb{N}\}, Y \in \{y_j, j \in \mathbb{N}\}) = 1$ muss man die „Doppelsumme“ betrachten:

$$P(X + Y = z) = \sum_{i,j: x_i+y_j=z} P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

Beispiel 1.63

1. W_1, W_2 unabhängige 6-er Würfelwürfe, dann ist

$$S := W_1 + W_2 \sim \text{Unif}_{\{1,2,\dots,6\}} * \text{Unif}_{\{1,2,\dots,6\}}$$

mit

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{m=\max\{k-6,1\}}^{\min\{k-1,6\}} P(W_1 = m)P(W_2 = k - m) \\ &= \frac{1}{36} (\min\{k - 1, 6\} - \max\{k - 6, 1\} + 1) \\ &= \frac{6 - |7 - k|}{36} \end{aligned}$$

für $k \in \{2, 3, \dots, 12\}$

Beispiel 1.63 (Fortsetzung)

2. X, Y u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist $X + Y \sim \text{Bin}_{2,p}$, d.h.
 $\text{Ber}_p * \text{Ber}_p = \text{Bin}_{2,p}$.

Beispiel 1.63 (Fortsetzung)

2. X, Y u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist $X + Y \sim \text{Bin}_{2,p}$, d.h.

$$\text{Ber}_p * \text{Ber}_p = \text{Bin}_{2,p}.$$

3. (Binomialfamilie) X_1, X_2, \dots, X_n u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}_{n,p}, \text{ d.h.}$$

$\text{Ber}_p * \text{Ber}_p * \dots * \text{Ber}_p$

$$\text{Insbes. } \underbrace{\text{Ber}_p^{*n} = \text{Ber}_p * \text{Ber}_p * \dots * \text{Ber}_p}_{n\text{-mal}} = \text{Bin}_{n,p}.$$

$$\text{Bin}_{n_1,p} * \text{Bin}_{n_2,p} = \text{Bin}_{n_1+n_2,p} \quad \text{für } p \in [0, 1], n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

die Binomialverteilungen bilden (für festes p) eine *Faltungsfamilie*.

Beispiel 1.63 (Fortsetzung)

2. X, Y u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist $X + Y \sim \text{Bin}_{2,p}$, d.h.
 $\text{Ber}_p * \text{Ber}_p = \text{Bin}_{2,p}$.
3. (Binomialfamilie) X_1, X_2, \dots, X_n u.a., $\sim \text{Ber}_p$, so ist
 $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}_{n,p}$, d.h.

$$\text{Ber}_p^{*n} = \underbrace{\text{Ber}_p * \text{Ber}_p * \dots * \text{Ber}_p}_{n\text{-mal}} = \text{Bin}_{n,p}.$$

Insbes.

$$\text{Bin}_{n_1,p} * \text{Bin}_{n_2,p} = \text{Bin}_{n_1+n_2,p} \quad \text{für } p \in [0, 1], n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

die Binomialverteilungen bilden (für festes p) eine *Faltungsfamilie*.

(Schreibe $S_1 := X_1 + \dots + X_{n_1} \sim \text{Bin}_{n_1,p}$,
 $S_2 := X_{n_1+1} + X_{n_1+2} + \dots + X_{n_1+n_2} \sim \text{Bin}_{n_2,p}$, so ist
 $S_1 + S_2 = X_1 + \dots + X_{n_1+n_2} \sim \text{Bin}_{n_1+n_2,p}$.)

Beispiel 1.63 (Fortsetzung)

4. (Poissonfamilie) Für $\alpha, \beta > 0$ ist $\text{Poi}_\alpha * \text{Poi}_\beta = \text{Poi}_{\alpha+\beta}$, denn

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k e^{-\alpha} \frac{\alpha^m}{m!} \cdot e^{-\beta} \frac{\beta^{k-m}}{(k-m)!} &= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \alpha^m \beta^{k-m} \\ &= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{(\alpha + \beta)^k}{k!} \\ &= \text{Poi}_{\alpha+\beta}(\{k\}), \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^k \text{Poi}_\alpha(m) \cdot \text{Poi}_\beta(k-m)$$

Auch die Poissonverteilungen bilden eine Faltungsfamilie.

Beobachtung 1.64 (Faltung von Dichten)

X, Y u.a. reellwertige ZVn mit Dichte f_X bzw. f_Y , so hat $X + Y$ die Dichte

$$(f_X * f_Y)(z) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Beobachtung 1.64 (Faltung von Dichten)

X, Y u.a. reellwertige ZVn mit Dichte f_X bzw. f_Y , so hat $X + Y$ die Dichte

$$(f_X * f_Y)(z) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x+y \leq w\}} f_X(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x+z-x \leq w\}} f_X(x) f_Y(z-x) dz dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{z \leq w\}} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx dz \\ &= \int_{-\infty}^w (f_X * f_Y)(z) dz \end{aligned}$$

wobei wir in der 2. Zeile $y = z - x$ substituiert haben.

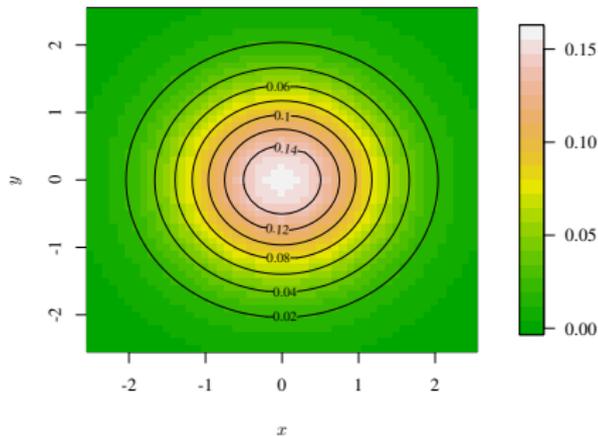
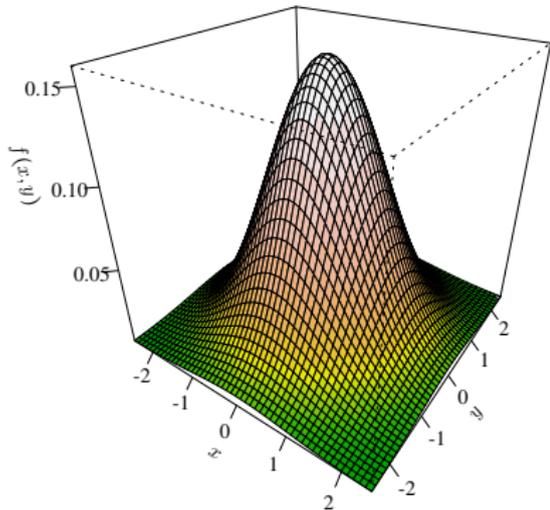
Beispiel 1.65 (Die Normalverteilungen bilden eine Faltungsfamilie)

Es gilt

$$\mathcal{N}_{\mu_1, \sigma_1^2} * \mathcal{N}_{\mu_2, \sigma_2^2} = \mathcal{N}_{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \text{für } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0$$

Erinnerung. Die 2-dimensionale Standard-Normalverteilung

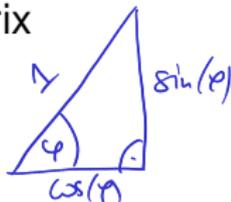
hat Dichte $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$



Zum Beweis von Bsp. 1.65:

Seien $a, b \in (0, 1)$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so ist die 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{orthogonal}$$



Dies ist eine Drehmatrix, wir könnten $a = \cos(\varphi)$, $b = \sin(\varphi)$ für ein geeign. $\varphi \in [-\pi, \pi)$ schreiben, und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ba \\ -ba + ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Zum Beweis von Bsp. 1.65:

Seien $a, b \in (0, 1)$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so ist die 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ orthogonal}$$

Dies ist eine Drehmatrix, wir könnten $a = \cos(\varphi)$, $b = \sin(\varphi)$ für ein geeign. $\varphi \in [-\pi, \pi)$ schreiben, und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ba \\ -ba + ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Seien Z_1, Z_2 u.a., $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, dann haben nach Beob. 1.42

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aZ_1 + bZ_2 \\ -bZ_1 + aZ_2 \end{pmatrix}$$

dieselbe Verteilung

d.h. $aZ_1 + bZ_2 \sim \mathcal{N}_{0, a^2}$ \uparrow \mathcal{N}_{0, b^2} $\sim \mathcal{N}_{0, a^2 + b^2}$

(Handwritten notes: "1" and "11" above the final normal distribution term)

Zum Beweis von Bsp. 1.65:

Seien $a, b \in (0, 1)$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so ist die 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{orthogonal}$$

Dies ist eine Drehmatrix, wir könnten $a = \cos(\varphi)$, $b = \sin(\varphi)$ für ein geeign. $\varphi \in [-\pi, \pi)$ schreiben, und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ba \\ -ba + ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Seien Z_1, Z_2 u.a., $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, dann haben nach Beob. 1.42

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aZ_1 + bZ_2 \\ -bZ_1 + aZ_2 \end{pmatrix}$$

dieselbe Verteilung, d.h. auch $aZ_1 + bZ_2$ und $-bZ_1 + aZ_2$ sind u.i.v., $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, insbesondere ist $aZ_1 + bZ_2$ standard-normalverteilt.

Zum Beweis von Bsp. 1.65:

Setzen wir $a := \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$, $b := \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$, so finden wir:

$X_1 := \sigma_1 Z_1 \sim \mathcal{N}_{0, \sigma_1^2}$, $X_2 := \sigma_2 Z_2 \sim \mathcal{N}_{0, \sigma_2^2}$ (und X_1, X_2 sind u.a.),

$$\frac{X_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} + \frac{X_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = aZ_1 + bZ_2 \sim \mathcal{N}_{0,1},$$

also gilt $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}_{0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

(Man kann – anstelle von Beob. 1.58 – in diesem Fall auch das Faltungsintegral explizit ausrechnen, vgl. die Vorlesungsnotizen)

Statistik für Informatiker, SS 2021

**1 Grundlagen aus der
Wahrscheinlichkeitstheorie**

1.4 Erwartungswert, Varianz und Kovarianz

Matthias Birkner

Der Erwartungswert ist eine wichtige Kenngröße der Verteilung einer reellwertigen Zufallsvariable X , er gibt eine Antwort auf die – etwas salopp formulierte – Frage „Wie groß ist X typischerweise?“

Diskreter Fall

Sei X reelle ZV mit abzählbarem Wertebereich (auf einem W'raum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert), d.h. es gibt eine abzählbare Menge $S = S_X \subset \mathbb{R}$ mit $P(X \in S) = 1$ und $\mathcal{L}_P(X)$ hat Gewichte $P(X = x)$, $x \in S$.

Diskreter Fall

Sei X reelle ZV mit abzählbarem Wertebereich (auf einem W'raum (Ω, \mathcal{F}, P) definiert), d.h. es gibt eine abzählbare Menge $S = S_X \subset \mathbb{R}$ mit $P(X \in S) = 1$ und $\mathcal{L}_P(X)$ hat Gewichte $P(X = x)$, $x \in S$.

Definition 1.66

Der *Erwartungswert* von X ist definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in S_X} xP(X = x),$$

sofern die Reihe absolut konvergiert (d.h. sofern $\sum_{x \in S_X} |x|P(X = x) < \infty$ gilt, dann kann die Summation in beliebiger Reihenfolge erfolgen). Manchmal schreibt man auch $\mu_X := \mathbb{E}[X]$. Man sagt dann „ X besitzt einen Erwartungswert“ und schreibt dies auch als $X \in \mathcal{L}^1$ (bzw. $X \in \mathcal{L}^1(P)$, wenn die zugrundeliegende W'keiten $P(\cdot)$ nicht aus dem Kontext klar sind).