Tippfehler in Prop. 1.33

X ZV mit Dichte f_X,
Wertebereich $I \subseteq \mathbb{R}$ (I Intervall)

$\varphi : I \to J$, bijektiv & diff'bar

$J \subseteq \mathbb{R}$ (automatisch auch ein Intervall)

$Y := \varphi(X)$ hat Dichte $$\frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}$$

Tippfehler war: $\cancel{J \subset I}$

Erinnerung:

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

(sofern $P(A) > 0$)

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Bedingte Verteilung und mehrstufige Experimente

Wir haben ZVn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ im Sinn und kennen

1. die Verteilung von X_1,
2. für $2 \leq k \leq n$ die bedingte Verteilung von X_k, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ schon beobachtet wurden.
   (d.h. für beliebige beobachtete Werte $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ kennen wir $P(X_k \in \cdot \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1})$)

Bedingte Verteilung und mehrstufige Experimente

Wir haben ZVn $X_1, X_2, \dots, X_n$ im Sinn und kennen

1. die Verteilung von X_1,
2. für $2 \leq k \leq n$ die bedingte Verteilung von X_k, wenn $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ schon beobachtet wurden.
   (d.h. für beliebige beobachtete Werte $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ kennen wir $P(X_k \in \cdot \mid X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}))$

Dann kann man die gemeinsame Verteilung (zumindest im diskreten Fall, d.h. die gemeinsamen Gewichte) des Vektors $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ mittels der Multiplikationsformel (Beob. 1.44) bestimmen („Pfadregel"):

Bedingte Verteilung und mehrstufige Experimente

Wir haben ZVn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ im Sinn und kennen

1. die Verteilung von X_1,
2. für $2 \le k \le n$ die bedingte Verteilung von X_k, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ schon beobachtet wurden. (d.h. für beliebige beobachtete Werte $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ kennen wir $P(X_k \in \cdot \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{k-1})$)

Dann kann man die gemeinsame Verteilung (zumindest im diskreten Fall, d.h. die gemeinsamen Gewichte) des Vektors $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ mittels der Multiplikationsformel (Beob. 1.44) bestimmen („Pfadregel"):

$$P(X_1 = x_1, X_2 = \overset{x_2}{\cancel{X_2}}, \ldots, X_n = x_n)$$
$$= P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) \cdot P(X_3 = x_3 \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$
$$\cdot \cdots \cdot P(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

Man stellt Rechnungen, die die verschiedenen Fälle (längs der „Pfade“) in dieser Weise aufzählen, oft mittels eines Baumdiagramms dar, wie in dem folgenden Beispiel.

Man stellt Rechnungen, die die verschiedenen Fälle (längs der „Pfade") in dieser Weise aufzählen, oft mittels eines Baumdiagramms dar, wie in dem folgenden Beispiel.

Beispiel 1.47

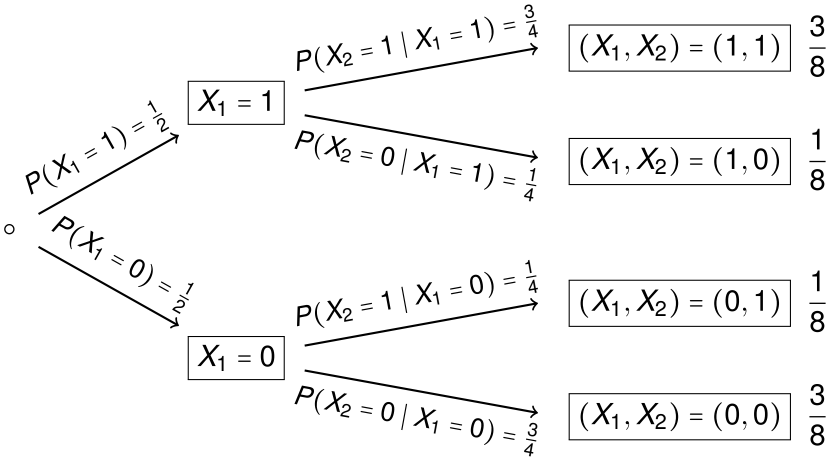
Wir haben eine faire Münze M_1 und zwei gezinkte Münzen M_2, M_3 (deren Seiten jeweils mit 0 und 1 beschriftet seien), wobei

$$P(M_2 = 1) = \frac{3}{4}, P(M_3 = 1) = \frac{1}{4}.$$

Wir werfen erst M_1, wenn M_1 den Wert 1 zeigt, so werfen wir dann M_2, sonst M_3. Sei

$$X_i = \text{Resultat des } i\text{-ten Wurfs}, \ i = 1, 2.$$

Beispiel 1.47, Forts.



Beispiel 1.47, Forts.

Die gemeinsame Verteilung von (X_1, X_2) ist damit

$X_1 \backslash X_2$	1	0	
1	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Beispiel 1.47, Forts.

Die gemeinsame Verteilung von (X_1, X_2) ist damit

X_1 \ X_2	1	0	
1	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Wir sehen hier wieder: Die Randverteilungen legen (i.A.) nicht die gemeinsame Verteilung fest. Es ist
$P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$
(und dieselben Randverteilungen ergäben sich, wenn man zwei Mal M_1 wirft, aber die gemeinsame Verteilung wäre eine andere).

Beispiel 1.48

Nehmen wir an, in der Situation von Bsp. 1.42 („verrauschter Übertragungskanal") wird das zufällige Bit X sicherheitshalber zweimal gesendet (wobei jedesmal unabhängig mit den genannten W'keiten ein Übertragungsfehler auftritt), seien Y_1 und Y_2 die beiden empfangenen Bits, $Z_1 = \mathbf{1}_{\{Y_1=Y_2\}}$, $Z_2 = \mathbf{1}_{\{Y_1=Y_2=X\}}$ (beachte, dass der Empfänger Z_1 beobachten kann, nicht aber Z_2).

Beispiel 1.48

Nehmen wir an, in der Situation von Bsp. 1.42 („verrauschter Übertragungskanal") wird das zufällige Bit X sicherheitshalber zweimal gesendet (wobei jedesmal unabhängig mit den genannten W'keiten ein Übertragungsfehler auftritt), seien Y_1 und Y_2 die beiden empfangenen Bits, $Z_1 = \mathbf{1}_{\{Y_1=Y_2\}}$, $Z_2 = \mathbf{1}_{\{Y_1=Y_2=X\}}$ (beachte, dass der Empfänger Z_1 beobachten kann, nicht aber Z_2).

Dann ist wegen $\{Z_2 = 1\} \subset \{Z_1 = 1\}$

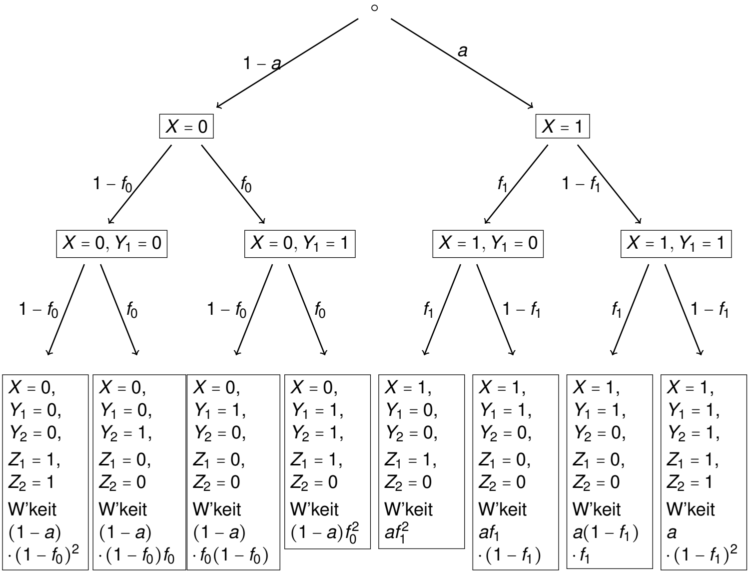
$$P(Z_2 = 1 \mid Z_1 = 1) = \frac{P(Z_2 = 1)}{P(Z_1 = 1)}$$

(dies ist die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Empfänger, der den gesendeten Bits „vertraut", sofern er zweimal dasselbe empfangen hat, „richtig liegt").

Beispiel 1.48, Forts.

Wir fassen die möglichen Ausgänge von (X, Y_1, Y_2) (und die sich daraus ergebenden Werte von Z_1, Z_2) in einem Baumdiagramm zusammen:

Beispiel 1.48, Forts.



Beispiel 1.48, Forts.

Wir sehen:

$$P(Z_1 = 1) = (1-a)(1-f_0)^2 + (1-a)f_0^2 + af_1^2 + a(1-f_1)^2$$

$$P(Z_2 = 1) = (1-a)(1-f_0)^2 + a(1-f_1)^2$$

$$P(Z_2 = 1 \mid Z_1 = 1)$$
$$= \frac{(1-a)(1-f_0)^2 + a(1-f_1)^2}{(1-a)(1-f_0)^2 + (1-a)f_0^2 + af_1^2 + a(1-f_1)^2}$$

Beispiel 1.48, Forts.

Wir sehen:

$$P(Z_1 = 1) = (1-a)(1-f_0)^2 + (1-a)f_0^2 + af_1^2 + a(1-f_1)^2$$

$$P(Z_2 = 1) = (1-a)(1-f_0)^2 + a(1-f_1)^2$$

$$P(Z_2 = 1 \mid Z_1 = 1) = \frac{(1-a)(1-f_0)^2 + a(1-f_1)^2}{(1-a)(1-f_0)^2 + (1-a)f_0^2 + af_1^2 + a(1-f_1)^2}$$

Für die konkreten Zahlenwerte aus Beispiel 1.42 ($a = 0.3, f_1 = 0.05, f_0 = 0.1$) ergibt sich

$$P(Z_2 = 1 \mid Z_1 = 1) \approxeq 0.991.$$

Unabhängigkeit

Definition 1.49

Ereignisse A und B (auf demselben W'raum) heißen (stochastisch) *unabhängig*, falls gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(Sofern $P(A) > 0$, so gilt dann auch $P(B \mid A) = P(B)$, d.h. die bedingte und die unbedingte W'keit von B stimmen überein, analog mit vertauschten Rollen.)

In diesem Fall:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot \cancel{P(A)}}{\cancel{P(A)}}$$

Unabhängigkeit

Definition 1.49

Ereignisse A und B (auf demselben W'raum) heißen (stochastisch) *unabhängig*, falls gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(Sofern $P(A) > 0$, so gilt dann auch $P(B \mid A) = P(B)$, d.h. die bedingte und die unbedingte W'keit von B stimmen überein, analog mit vertauschten Rollen.)

Allgemein: Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ heißen (stochastisch) *unabhängig*, falls gilt

$$P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i) \quad \text{für alle } \varnothing \neq J \subset \{1, 2, \dots, n\} \qquad (1)$$

(für unendlich viele Ereignisse $A_1, A_2, \dots$: (1) für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$).

Beispiel

Wir ziehen eine Karte (nennen wir sie K) aus einem gut gemischtem Skatblatt, sei $A = \{K \text{ ist ein As}\}$, $B = \{K \text{ ist kreuz}\}$.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32} = P(B) \cdot P(A)$$

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

A und B sind u.a.

Bemerkung 1.50

1. Sind Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ unabhängig, so gilt dies offenbar auch für jede Teilfamilie $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ (mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$).

Bemerkung 1.50

1. Sind Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ unabhängig, so gilt dies offenbar auch für jede Teilfamilie $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ (mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$).

2. Es genügt i.A. nicht, in (1) nur Paare zu prüfen.

Werfe 3-mal faire Münze, M_1, M_2, M_3 die Ergebnisse

$A_1 = \{M_1 = M_2\}$, $A_2 = \{M_1 = M_3\}$, $A_3 = \{M_2 = M_3\}$

$$P(A_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(M_1 = M_2 = M_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Diskussion.

1. Stochastische Unabhängigkeit ist eine (gemeinsame) Eigenschaft von Ereignissen und deren Wahrscheinlichkeiten; (Un-)abhängigkeit ist nicht automatisch mit (Nicht-)Existenz eines kausalen Zusammenhangs gleichzusetzen.

Diskussion.

Beispiel:

Wir befragen eine zufällig an einem Samstagnachmittag auf dem Mainzer Gutenbergplatz ausgewählte Testperson. Die Ereignisse „hat Schuhgröße $\geq$ 41“ und „hat Führerschein“ sind nicht unabhängig

Diskussion.

Beispiel:

Wir befragen eine zufällig an einem Samstagnachmittag auf dem Mainzer Gutenbergplatz ausgewählte Testperson. Die Ereignisse „hat Schuhgröße ≥ 41“ und „hat Führerschein“ sind nicht unabhängig

(gegeben $\{$hat Schuhgröße $\geq 41\}$ handelt es sich vermutlich eher um einen Erwachsenen, daher ist die Chance, dass die Person auch einen Führerschein hat größer als der Anteil der Führerscheinbesitzer in der Gesamtbevölkerung, die auch viele Kinder umfasst).

Diskussion.

Beispiel:

Wir befragen eine zufällig an einem Samstagnachmittag auf dem Mainzer Gutenbergplatz ausgewählte Testperson. Die Ereignisse „hat Schuhgröße ≥ 41“ und „hat Führerschein“ sind nicht unabhängig

(gegeben $\{$hat Schuhgröße $\geq 41\}$ handelt es sich vermutlich eher um einen Erwachsenen, daher ist die Chance, dass die Person auch einen Führerschein hat größer als der Anteil der Führerscheinbesitzer in der Gesamtbevölkerung, die auch viele Kinder umfasst).

Trotzdem wäre die Behauptung, dass große Füße Führerscheine hervorbringen, natürlich unsinnig.

Diskussion.

2. Nichtsdestoweniger *modelliert* man die erneute Wiederholung eines gewissen zufälligen Experiments unter gleichen Bedingungen (oder auch die Befragung verschiedener Versuchspersonen aus einer großen Grundgesamtheit) zumeist mittels (angenommener) stochastischer Unabhängigkeit.

Die Annahme unabhängiger Kopien eines gewissen Zufallsexperiments bildet häufig einen zentralen Ansatzpunkt statistischer Analysen.

Unabhängige Zufallsvariablen

X_i habe Wertebereich S_i

Definition 1.51

Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_d$ (die auf einem gemeinsamen W'raum definiert sind) heißen (stochastisch) *unabhängig*, wenn für alle Ereignisse $\{X_i \in B_i\}$ gilt ($B_i \subset S_i$)

$$P\big(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_d \in B_d\big) = \prod_{i=1}^{d} P(X_i \in B_i) \qquad (2)$$

(Bem.: Man kann in (2) für manche $B_i = S_i$ einsetzen, daher enthält (2) auch alle Schnitte Teilmengen von Indizes aus $\{1, \ldots, d\}$)

Beobachtung 1.52

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ZVn, X_i habe Werte in S_i, S_i abzählbar für $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig g.d.w. gilt $\forall\, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \ldots, x_n \in S_n$:

$$P\big(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) \qquad (*)$$

(d.h. die gemeinsamen Gewichte haben Produktgestalt).

(wähle $B_i = \{x_i\}$ in Def. 1.51, d.h. $(*)$ gilt.
Wenn $(*)$ gilt, stelle allg. B_i dar als
$B_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots\}$, nutze
$P(X_i \in B_i) = \sum_j P(X_i = x_{i,j})$)

Beobachtung und Definition 1.53

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ ist also die gemeinsame Verteilung, d.h. die Verteilung von $X := \big(X_1, \dots, X_n\big)$ durch die Randverteilungen festgelegt (siehe Def. 1.45).

Man nennt dann $\mu := \mathscr{L}(X)$ das Produkt der $\mu_1 := \mathscr{L}(X_1), \dots, \mu_n := \mathscr{L}(X_n)$ und schreibt

$$\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$$

Bemerkung 1.54

Sind ZVn $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, so auch

1. jede Teilfamilie $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ (mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$)

2. $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ für Funktionen $f_i : S_i \to S_i'$

für $B_i' \subset S_i'$

denn $\{f_i(X_i) \in B_i'\}$

$= \{X_i \in \underbrace{f_i^{-1}(B_i')}_{=: B_i}\}$

Bemerkung 1.54 (Fortsetzung)

3. In Def. 1.51 genügt es i.A. nicht, jeweils nur Paare auf Unabhängigkeit zu prüfen:

Bemerkung 1.54 (Fortsetzung)

3. In Def. 1.51 genügt es i.A. nicht, jeweils nur Paare auf Unabhängigkeit zu prüfen:

Beispiel (wir sprechen Bsp. 1.50, 2. mit ZVn aus):
Seien X_1, X_2, X_3 unabhängige faire Münzwürfe
$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$,
$Y_1 = \mathbf{1}_{\{X_1 = X_2\}}$, $Y_2 = \mathbf{1}_{\{X_1 = X_3\}}$, $Y_3 = \mathbf{1}_{\{X_2 = X_3\}}$.

Dann sind jeweils Y_1 und Y_2, Y_1 und Y_3, Y_2 und Y_3 unabh., aber Y_1, Y_2, Y_3 zusammen *nicht*.

Bemerkung 1.54 (Fortsetzung)

4. Vergleichen wir Def. 1.49 und Def. 1.51, so sehen wir:

Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn dies für ihre Indikatorvariable $\mathbf{1}_{A_1}, \mathbf{1}_{A_2}, \ldots, \mathbf{1}_{A_N}$ gilt.

Die Situation im Fall mit Dichten

Beobachtung 1.55 (Marginaldichten)

Die Zufallsvariable $X = (X_1, X_2)$ mit Werten in ($S \subset$) $\mathbb{R}^2$ habe (gemeinsame) Dichte $f_X(x_1, x_2)$, so hat X_1 die Dichte

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 \quad (\textit{für } x_1 \in \mathbb{R})$$

und analog hat X_2 die Dichte $f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1$ ($x_2 \in \mathbb{R}$).
f_{X_1} und f_{X_2} heißen die Marginal- oder Randdichten von f_X.

Die Situation im Fall mit Dichten

Beobachtung 1.55 (Marginaldichten)

Die Zufallsvariable $X = (X_1, X_2)$ mit Werten in ($S \subset$) $\mathbb{R}^2$ habe (gemeinsame) Dichte $f_X(x_1, x_2)$, so hat X_1 die Dichte

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 \quad (\text{für } x_1 \in \mathbb{R})$$

und analog hat X_2 die Dichte $f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_1$ ($x_2 \in \mathbb{R}$).
f_{X_1} und f_{X_2} heißen die Marginal- oder Randdichten von f_X.

Argument:

$$P\big(X_1 \in [a,b]\big) = P\big(X_1 \in [a,b], X_2 \in \mathbb{R}\big)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{[a,b]}(x_1) \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x_2) f_X(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_a^b \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 \Big) dx_1$$

Beobachtung 1.55 (Marginaldichten, allgemein)

Allgemein: Für $X = (X_1, \ldots, X_d)$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und Dichte f_X ist

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_{\cancel{n}\, d}$$

die i-te Marginaldichte.

Das kontinuierliche Analogon zu Prop. 1.52 lautet:

Bericht 1.56 (Unabhängigkeit im reellwertigen Fall mit Dichte)

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ reellwertige ZVn, $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Wahrscheinlichkeitsdichten (d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\,dx = 1$), dann sind äquivalent:

1. $X_1, \dots, X_n$ sind u.a. und X_i hat Dichte f_i für $i = 1, \dots, n$ (d.h. $P(X_i \in B) = \int_B f_i(x)\,dx$ und $P\big(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i)$ für $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{R}$).
2. Die ZV $X = (X_1, \dots, X_n)$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ hat Dichte

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

d.h. die gemeinsame Dichte hat Produktgestalt.

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und X_i hat Dichte f_i

$\iff$

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ hat Dichte
$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und X_i hat Dichte f_i

$\iff$

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ hat Dichte
$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Vergleicht man dies mit Beob. 1.55, so folgt:

In diesem Fall ist die gemeinsame Dichtefunktion das Produkt der Marginaldichten.

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und X_i hat Dichte f_i

$\iff$

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ hat Dichte
$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Vergleicht man dies mit Beob. 1.55, so folgt:
In diesem Fall ist die gemeinsame Dichtefunktion das Produkt der Marginaldichten.

Beweisidee. „Naiv" rechnen wir

$$\int_{-\infty}^{x_1} f_1(y_1)\, dy_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(y_n)\, dy_n$$
$$= \int_{(-\infty,x_1]\times\cdots\times(-\infty,x_n]} f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\, dy_1 \ldots dy_n$$

□

Beispiel 1.57

1. Wähle $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ in Bsp. 1.36, 1., d.h. $X = (X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf einem (achsenparallelen) Rechteck A
(mit Fläche $\mathrm{vol}(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$).
X hat Dichte

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2) &= \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \mathbf{1}_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]}(x_1, x_2) \\ &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

mit Marginaldichten $f_{X_i}(x_i) = \dfrac{1}{(b_i - a_i)} \mathbf{1}_{[a_i, b_i]}(x_i) \quad (i = 1, 2)$,

d.h. die Koordinaten X_1 und X_2 sind unabhängig
(und jeweils uniform auf $[a_i, b_i]$ verteilt).

Beispiel 1.57 (Forts.)

2. Wähle $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$ in Bsp. 1.36, d.h. $X = (X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf dem Einheitskreis (mit Fläche $\mathrm{vol}(A) = \pi$) mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2).$$

Beispiel 1.57 (Forts.)

2. Wähle $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$ in Bsp. 1.36, d.h. $X = (X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf dem Einheitskreis (mit Fläche $\mathrm{vol}(A) = \pi$) mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2).$$

Die Marginaldichte ist

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2)\, dx_2 = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x_1) \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} 1\, dx_2$$
$$= \mathbf{1}_{[-1,1]}(x_1)\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x_1^2}$$

(und analog bzw. offensichtlich aus Symmetrie ist $f_{X_2} = f_{X_1}$).

Beispiel 1.57 (Forts.)

2. Wähle $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$ in Bsp. 1.36, d.h. $X = (X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf dem Einheitskreis (mit Fläche $\mathrm{vol}(A) = \pi$) mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2).$$

Die Marginaldichte ist

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[0,1]}(x_1^2 + x_2^2)\, dx_2 = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x_1) \int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} 1\, dx_2 \\ &= \mathbf{1}_{[-1,1]}(x_1)\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x_1^2} \end{aligned}$$

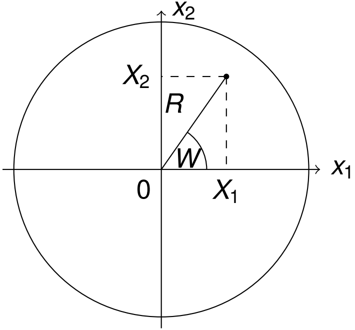
(und analog bzw. offensichtlich aus Symmetrie ist $f_{X_2} = f_{X_1}$).

Insbesondere sind (im Gegensatz zu 1.) X_1 und X_2 sind (natürlich) *nicht* unabhängig, denn $f_X(x_1, x_2) \neq f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$.

Beispiel 1.57 (Forts.)

3. Betrachten wir $X = (X_1, X_2)$ aus 2. in Polarkoordinaten:

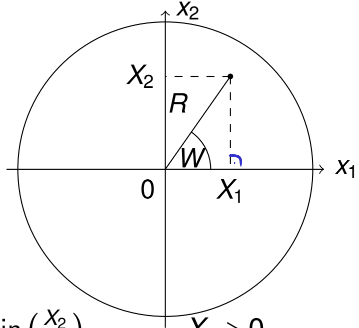
Sei R der Radius, W der Winkel von X



Beispiel 1.57 (Forts.)

3. Betrachten wir $X = (X_1, X_2)$ aus 2. in Polarkoordinaten:

Sei R der Radius, W der Winkel von X



also

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad W = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 \geq 0, \\ \pi - \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 < 0, X_2 \geq 0, \\ -\pi - \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right), & X_1 < 0, X_2 < 0, \end{cases}$$

[knapp : $W = \mathrm{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right) + \pi \mathbf{1}_{[-1,0)}(X_1) \cdot \mathrm{sign}(X_2)$]

bzw. $X_1 = R\cos(W), X_2 = R\sin(W)$

Beispiel 1.57 (Forts.)

3. (X_1, X_2) uniform im Einheitskreis, in Polarkoordinaten:

$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $W = \operatorname{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right) + \pi \mathbf{1}_{[-1,0)}(X_1) \cdot \operatorname{sign}(X_2)$

Beispiel 1.57 (Forts.)

3. (X_1, X_2) uniform im Einheitskreis, in Polarkoordinaten:

$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $W = \mathrm{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\frac{X_2}{R}\right) + \pi \mathbf{1}_{[-1,0)}(X_1) \cdot \mathrm{sign}(X_2)$

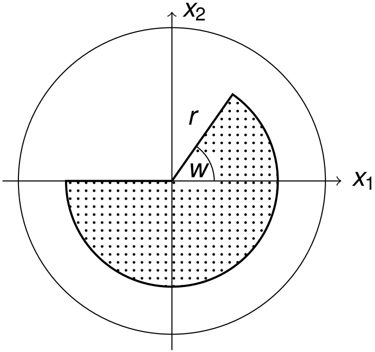
Dann sind R und W unabhängig,

R hat Dichte

$f_R(r) = 2r\mathbf{1}_{[0,1]}(r)$,

W hat Dichte

$f_W(w) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi)}(w)$

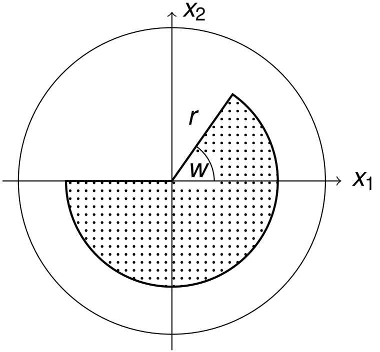


Beispiel 1.57 (Forts.)

3. (X_1, X_2) uniform im Einheitskreis, in Polarkoordinaten:

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2},\ W = \mathrm{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\tfrac{X_2}{R}\right) + \pi \mathbf{1}_{[-1,0)}(X_1) \cdot \mathrm{sign}(X_2)$$

Dann sind R und W unabhängig,



R hat Dichte

$f_R(r) = 2r\mathbf{1}_{[0,1]}(r)$,

W hat Dichte

$f_W(w) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi)}(w)$

denn (für $0 \le r \le 1$, $-\pi \le w < \pi$)

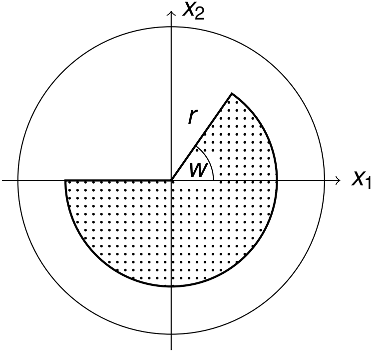
$P(R \le r, W \le w) = P\big(X \in$  $\big)$

Beispiel 1.57 (Forts.)

3. (X_1, X_2) uniform im Einheitskreis, in Polarkoordinaten:

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2},\ W = \operatorname{sign}(X_1) \cdot \arcsin\left(\tfrac{X_2}{R}\right) + \pi \mathbf{1}_{[-1,0)}(X_1) \cdot \operatorname{sign}(X_2)$$

Dann sind R und W unabhängig,



R hat Dichte

$f_R(r) = 2r\mathbf{1}_{[0,1]}(r)$,

W hat Dichte

$f_W(w) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi)}(w)$

denn (für $0 \le r \le 1$, $-\pi \le w < \pi$)

$P(R \le r, W \le w) = P\big(X \in$  $\big)$

$$= \frac{\pi r^2 \frac{w+\pi}{2\pi}}{\pi 1^2} = r^2 \frac{w+\pi}{2\pi} = \int_0^r 2s\,ds \cdot \int_{-\pi}^{w} \frac{1}{2\pi}\,dv.$$